Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 567-574
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145210

Hans汉斯

集值均衡问题的E_∞-Benson真有效解的非线性标量化

梁可慧

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2024年4月7日；录用日期：2024年5月10日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

众所周知，在最优化理论中，集值均衡问题是一个关键组成部分，它在数理经济和交通系统等实际应用中具有重要的研究意义和理论价值。许多学者从不同的角度提出了集值均衡问题不同类型的解。然而，如何推广和改进集值均衡问题的解是有意义的。本文，我们利用改进集和回收锥这两种研究最优化理论的重要工具，研究了带约束集值均衡问题的E_∞-Benson真有效解，建立了集值均衡问题的非线性标量化定理。

关键词

集值均衡问题，E_∞-Benson真有效解，非线性标量化

Nonlinear Scalarization of the Properly Effective E_∞-Benson Solution for the Equilibrium Problem with Set-Valued Maps

Kehui Liang

College of Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Apr. 7th, 2024; accepted: May 10th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

As is well-known in optimization theory, the problem of set-valued equilibrium is a key component. It holds significant research significance and theoretical value in practical applications such

文章引用: 梁可慧. 集值均衡问题的E_∞-Benson 真有效解的非线性标量化[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 567-574.
DOI: 10.12677/pm.2024.145210

as mathematical economics and transportation systems. Many scholars have proposed various types of solutions to the set-valued equilibrium problem from different perspectives. However, the meaningful task lies in generalizing and improving the solutions to the set-valued equilibrium problem. In this paper, utilizing the improvement set and the recession cone which are two important tools to study optimization theory, we investigate E_∞-Benson properly efficient solution of the set-valued equilibrium problem. Furthermore, we establish the nonlinear scalarization theorems of the set-valued equilibrium problem.

Keywords

Set-Valued Equilibrium Problems, E_∞-Benson Proper Efficient Solutions, Nonlinear Scalarization

1. 引言

集值均衡问题是在向量优化理论和均衡理论基础上发展起来的研究领域，旨在解决多目标、多变量、多约束条件下的优化问题以及经济系统中的均衡状态和调整过程。这一领域的研究具有重要的理论和应用意义。

在研究集值优化问题(SVOP)时，学术界普遍观察了解集中存在过于广泛的有效解的现象。这一问题的存在挑战着我们对于有效解的界定和选择，因此引发了学者们的广泛关注。针对这一挑战，学者们不断提出了各种方法和概念。首先，针对解集中存在的广泛有效解的问题，学者们开始探讨并提出了真有效解的概念。这类解能够缩小解集范围。这一概念的提出在一定程度上填补了现有解集优化研究中的理论空白，并为进一步优化解集提供了新的思路和方法。同时，不仅仅是在集值优化问题中，类似的情况也出现在向量均衡问题(VEP)以及集值均衡问题(SVEPC)等领域。在这些问题中，同样存在着过于广泛的有效解，给问题的求解带来了困难。为此，一些学者选择引入近似解的概念，通过研究近似解与其他解之间的关系，寻求更为精确的解。另一方面，为了更深入地探讨解集的优化问题，学者们也开始基于改进集的特殊性质与概念将其引入了真有效解的定义，并在统一的理论框架下进行了深入探索和研究。这一方法的提出使得解集优化问题的研究更加系统化和规范化，为解集优化问题的进一步研究提供了更为稳固的理论基础。此外，一些学者利用回收锥的性质来研究解的最优性条件。这一方法的应用帮助我们更加深入地研究解集中各种解的标量化特征和最优性条件，为解集优化问题的数值计算提供了更为丰富和有力的理论支持。综上所述，研究集值优化问题的真有效解以及相关优化方法在学术界引起了广泛的关注。通过引入不同的概念和方法，学者们在解集优化问题的研究中取得了一系列重要的进展，并为该领域的未来发展奠定了坚实的理论基础。

近年来，学者们对集值优化问题的近似解产生了广泛兴趣。这是因为在一般数学模型中，某些次要因素被忽略，从而导致所建立的模型往往是近似的。那么当我们使用数值算法来获得解时，就会出现大多数得到的也是近似解的情况。在集值均衡问题中，定义不同类型的近似解，探究近似解与有效解之间的联系，是解决均衡问题的一项关键思路。然而，尽管精确解可能不可获得，但在条件较弱时，近似解集却可能存在。这意味着即使不能得到精确解，我们仍然可以找到在一定程度上满足问题需求的近似解。因此，研究近似解不仅在理论上有着重要价值，而且在实践中也非常有意义。通过研究近似解的性质和

有效性，我们可以为解决实际问题提供更多的选择和方法，从而提高解决问题的效率和准确性。Dhingra [1]利用集合的下限和上限拟序关系提出了两类近似解，并探讨了其紧致性和稳定性，还利用广义 Gerstewitz 函数研究了这类解的存在性和标量化。Gao [2]提出了一种新的用于向量优化问题的 ε-有效性概念，并通过 Ekeland 变分原理得到了几个存在性结果和非线性标量化方法。Zhou 等[3] [4] [5] [6]探讨了集值优化问题的多种近似解，其中包括 ε-弱真有效解、ε-全局真有效解和 ε-全局真有效解等，并对这些近似解的关系进行了详细地讨论。Gutiérrez 等人[7]通过由非线性标量化获得必要和充分条件的方法，使得在不需要任何凸性假设的条件下，能够在一个通用框架中研究新型近似解。

在该领域早期的学术探索中，研究者们对解的定义进行了广泛探讨，其中涵盖了常见的近似解的概念以及 Benson 真有效解概念等。在解决优化问题时，除了一般的有效解，Kuhn 和 Tucker [8]提出了真有效解的概念，以期改善解的质量。此后，许多学者在此基础上进行了改进和完善，相继提出了一系列真有效解，其中包括 Geoffrion 真有效解、Borwein 真有效解、全局真有效解以及 E-Benson 真有效解[9]-[15]等。这些研究成果为解的性质提供了更深入的认识与定义，为解决实际问题提供了有力的理论支持。杨新民[16]对 Benson 真有效解与 Borwein 真有效解之间的等价关系进行了探讨，进一步丰富了真有效解的研究内容。Zhao 等人[17]则通过改进集提出了一些不同类型的近似真有效解的概念，并在无范数单调性假设的情况下，通过非线性标量化方法研究了(C, ε)-Benson 真有效解的特征。付[18]利用 E-次似凸性及择一定理建立了集值向量优化基于回收锥的 Benson 真有效解，并进一步研究这类解的鞍点定理和对偶性结果。

另一方面，在研究集值均衡问题各类解时，非线性标量化方法是一个不可或缺的工具。赵[19]借助两类经典的非线性泛函给出了向量优化问题的 E-有效解以及 E-弱有效解的一些非线性标量化性质。局部凸拓扑线性空间中，徐[20]研究了无约束和带约束集值均衡问题近似 Benson 真有效解二点非线性标量化最优性条件。付[18]利用非线性标量化函数研究了向量优化问题基于回收锥的 E-Benson 真有效解的一些非线性标量化性质。

本文拟在无凸性条件下，利用非线性泛函研究带约束集值均衡问题的 E_∞-Benson 真有效解的最优性条件。

2. 预备知识

在本篇论文中，设 X 为实线性空间，Y 和 Z 为实局部凸拓扑向量空间，Y^* 和 Z^* 是 Y 和 Z 对应的拓扑对偶空间。0 表示每个空间的零元。用 $\mathcal{N}(0)$ 表示凸开零邻域的全体。本文规定 $\mathbb{R}_+ :=\{r: r\geq 0\}$。

设 A 是 X 中的非空子集。集合 A 拓扑内部和拓扑闭包分别定义为

$$\operatorname{int} A := \{x\in A \mid \text{存在零邻域} U, \text{满足 } x+U\subset A\},$$

$$\operatorname{cl} A := \{x\in A \mid \text{对任意的零邻域} U, \text{满足} (x+U)\cap A\neq\varnothing\}.$$

若集合 $A\subseteq X$ 满足

$$\lambda a_1+(1-\lambda)a_2\in A,\ \forall a_1,a_2\in A,\ \lambda\in[0,1],$$

则称 A 是 X 中的凸集。

若集合 $A\subseteq X$ 满足

$$\lambda a\in A,\ \forall a\in A,\ \forall\lambda>0,$$

则称 A 是锥。同时为凸集的锥称之为凸锥。

设 A 是 X 中的非空子集，A 的生成锥表示为

$$\operatorname{cone} A := \{\lambda a \mid \lambda \geq 0, a \in A\},$$

$\operatorname{cone}(A)$ 的闭包表示为 $\operatorname{clcone}(A)$。

设非空集合 $C \subseteq Y$，将 C 的正极锥 C^+ 和严格正极锥 C^{+i} 分别定义为

$$C^+ := \left\{y^* \in Y^* : \left\langle y, y^* \right\rangle \geq 0, \forall y \in C\right\};$$

$$C^{+i} := \left\{y^* \in Y^* : \left\langle y, y^* \right\rangle > 0, \forall y \in C \setminus \{0\}\right\},$$

对于非空集合 $C \subseteq Y$，都有 $(-C)^+ = -(C^+)$。

在本文中，规定 $C \subseteq Y$ 和 $D \subseteq Z$ 都是非平凡(即 $C \neq \varnothing$ 且 $C \neq Y$； $D \neq \varnothing$ 且 $D \neq Z$)的点(即 $C \cap (-C) = \{0\}$、$D \cap (-D) = \{0\}$)闭凸锥，并且 $\operatorname{int} C \neq \varnothing$， $\operatorname{int} D \neq \varnothing$。基于凸锥 C 而定义的 Y 中的序关系为：对任意的 $x, y \in Y$，有

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in C.$$

定义 1 [21] 设 E 是 Y 中的非空子集，C 是 Y 中的凸锥。如果 $0 \notin E$ 且 $E + C = E$，则称 E 是关于 C 的改进集。

本文将 Y 中关于 C 的改进集全体记为 $\mathfrak{L}_C$。

引理 1 [22] 若 $E \in \mathfrak{L}_C$，那么 $\operatorname{int} E = E + \operatorname{int} C$。

定义 2 [23] 设 M 是 Y 中的非空子集，M 的回收锥表示为

$$M_\infty := \{d \in Y : y + \lambda d \in M, \forall y \in M, \forall \lambda > 0\}.$$

显然，M_∞ 是一个凸锥。此外，如果 M 是 Y 中的非空闭集，则 M_∞ 是一个闭凸锥。且易得 $-M_\infty = (-M)_\infty$。

引理 2 [24] 设 M 是 Y 中的非空子集。如果存在一个点闭锥 P 使得 $M \subseteq P$，那么 M_∞ 是一个点凸锥。

在本文中，除非另有规定，令 $E \in \mathfrak{L}_C$，其中 E_∞ 是一个非平凡的、点闭凸锥且 $\operatorname{int} E_\infty \neq \varnothing$。

引理 3 [24] 若 $E \in \mathfrak{L}_C$，则 $E + E_\infty = E$，即 $E \in \mathfrak{L}_{E_\infty}$。

注 1 由引理 1 和引理 3 可知，

$$\operatorname{int} E = E + \operatorname{int} E_\infty.$$

如果 E 是关于 C 的改进集，则 $C \subseteq E_\infty$，见文献[24]。

引理 4 [25] 若 M 是 Y 中的非空子集，则 $M + \operatorname{cone} M = M$ 当且仅当 $M \subseteq M_\infty$。

设集值映射 $H : A \times A \rightrightarrows Y$ 和 $G : A \rightrightarrows Z$，对于任意的 $x \in A$，都有 $0 \in H(x, x)$，其中 0 表示 Y 中的零元。设 D 是 Z 中的非平凡点闭凸锥且 $\operatorname{int} D \neq \varnothing$，并且可行集 $S := \{x \in A : G(x) \cap (-D) \neq \varnothing\}$。对于带约束的集值均衡问题(SVEPC)：找到 $x_0 \in S$，使得

$$H(x_0, x) \cap (-C_0) = \varnothing, \ \forall x \in S. \tag{1}$$

其中，$C_0 = C \setminus \{0\}$ 且 C 是 Y 中的点凸锥。如果 $H(x_0, x) = F(x) - y_0, \forall x \in A$，其中集值映射 $F : A \rightrightarrows Y$，$y_0 \in F(x_0)$，那么式(1)变为

$$(F(x) - y_0) \cap (-C_0) = \varnothing, \ \forall x \in S. \tag{2}$$

由式(2)知道

$$(F(S) - y_0) \cap (-C_0) = \varnothing, \ \forall x \in S. \tag{3}$$

式(3)表明 x_0 是带约束集值优化问题(SVOPC)的有效解：

$$(\text{SVOPC}) \quad \operatorname{Min} F(x)$$
$$\text{s.t. } x \in S = \{x \in A : G(x) \cap (-D) \neq \varnothing\}.$$

定义 3 若 $E\in\mathfrak{L}_C$。称 $x_0\in S$ 是问题(SVEPC)的 E_∞-Benson 真有效解，如果

$$\operatorname{clcone}\left(H\left(x_0,S\right)+E\right)\cap\left(-E_\infty\right)=\{0\},$$

将问题(SVEPC)的 E_∞-Benson 真有效解的全体记为 $V_{BS}^{E_\infty}\left(H,S\right)$。

定义 4 [26] 设 $E\in\mathfrak{L}_C$，$q\in\operatorname{int}C$。将泛函 $\xi:Y\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\xi\left(y\right)=\inf\left\{t\in\mathbb{R}:y\in tq-E\right\},\ \forall y\in Y.$$

引理 5 [26] 若 $E\in\mathfrak{L}_C$，$q\in\operatorname{int}C$。则

(1) $\xi\left(y\right)<t\Leftrightarrow y\in tq-\operatorname{int}E$；

(2) $\xi\left(y\right)\le t\Leftrightarrow y\in tq-\operatorname{cl}E$。

3. 带约束集值均衡问题的 E_∞-Benson 真有效解的非线性刻画

主要利用非线性泛函建立问题(SVEPC)的 E_∞-Benson 真有效解的最优性条件。

定理 1 设 $E\in\mathfrak{L}_C$ 且 E 是一个闭凸集，$E+\operatorname{cone}E=E$。如果 x_0 是问题(SVEPC)的 E_∞-Benson 真有效解，则存在 $Y\times Z\to\mathbb{R}$ 上的泛函 ξ 使得

(1) 若 $y_1-y_2\in\operatorname{int}E$，$z_1-z_2\in D$，则 $\xi\left(y_1,z_1\right)\ge\xi\left(y_2,z_2\right)$；

(2) $\xi\left(y,z\right)\ge 0$，$\forall x\in A$，$y\in H\left(x_0,x\right)$，$z\in G\left(x\right)$。

证明： 由于 x_0 是问题(SVEPC)的 E_∞-Benson 真有效解，那么有

$$\operatorname{clcone}\left(H\left(x_0,S\right)+E\right)\cap\left(-E_\infty\setminus\{0\}\right)=\varnothing.\tag{4}$$

进而有

$$\left(H\left(x_0,S\right)+E\right)\cap\left(-E_\infty\setminus\{0\}\right)=\varnothing.\tag{5}$$

由于 $0\notin\operatorname{int}E_\infty$，所以

$$\left(H\left(x_0,S\right)+E\right)\cap\left(-\operatorname{int}E_\infty\right)=\varnothing.\tag{6}$$

因为 $0\notin E$ 且 $E+\operatorname{cone}E=E$，由引理 4 得 $E\subseteq E_\infty\setminus\{0\}$，故

$$\left(H\left(x_0,S\right)\right)\cap\left(-\operatorname{int}E\right)=\varnothing.\tag{7}$$

下证

$$\left(H\left(x_0,x\right),G\left(x\right)\right)\cap\left(-\operatorname{int}E,-\operatorname{int}D\right)=\varnothing,\ \forall x\in A.\tag{8}$$

假设式(8)不成立，那么存在 $\bar{x}\in A,\ \bar{y}\in H\left(x_0,\bar{x}\right),\ \bar{z}\in G\left(\bar{x}\right)$，使得 $\bar{y}\in-\operatorname{int}E$ 且 $\bar{z}\in-\operatorname{int}D$。于是 $G\left(\bar{x}\right)\cap\left(-\operatorname{int}D\right)\neq\varnothing$，进而有 $G\left(\bar{x}\right)\cap\left(-D\right)\neq\varnothing$。于是 $\bar{x}\in S$，$\bar{y}\in H\left(x_0,S\right)$。又由 $\bar{y}\in-\operatorname{int}E$ 知

$$\left(H\left(x_0,S\right)\right)\cap\left(-\operatorname{int}E\right)\neq\varnothing.$$

这与式(7)矛盾，故而式(8)成立。

令 $q\in\operatorname{int}E_\infty\times\operatorname{int}D$ 并定义 $\xi:Y\times Z\to\mathbb{R}$ 为

$$\xi\left(y,z\right)=\inf\left\{t\in\mathbb{R}:\left(y,z\right)\in tq-\left(E\times D\right)\right\}.$$

设 $\xi\left(y_1,z_1\right)=\inf\left\{t\in\mathbb{R}:\left(y_1,z_1\right)\in t\left(e,d\right)-\left(E\times D\right)\right\}:=t_1$。那么由引理 5 (2)知

$$\left(y_1,z_1\right)\in t_1\left(e,d\right)-\operatorname{cl}\left(E\times D\right)=t_1\left(e,d\right)-\left(E\times D\right),$$

那么有 $y_1\in t_1e-E$，$z_1\in t_1d-D$。

DOI: 10.12677/pm.2024.145210

由于 $E \subseteq E_\infty \setminus \{0\}$，那么有

$$\begin{aligned} y_2 &\in y_1 - \operatorname{int} E \subseteq t_1 e - E - \operatorname{int} E \subseteq t_1 e - E_\infty - \operatorname{int} E \\ &= t_1 e - E_\infty - E - \operatorname{int} E_\infty = t_1 e - E - \operatorname{int} E_\infty \\ &= t_1 e - \operatorname{int} E \subseteq t_1 e - E. \end{aligned}$$

且

$$z_2 \in z_1 - D \subseteq t_1 d - D - D \subseteq t_1 d - D.$$

故 $(y_2, z_2) \in t_1(e,d) - (E \times D)$，由引理 5 (2)可得 $\xi(y_2, z_2) \le t_1 = \xi(y_1, z_1)$。

由式(8)知 $(y,z) \notin (-\operatorname{int} E, -\operatorname{int} D)$，再根据引理 5 (1)有，

$$\xi(y,z) \ge 0,\ \forall x \in A,\ y \in H(x_0, x),\ z \in G(x).$$

定理 2 设 $x_0 \in A$，$E \in \mathfrak{L}_C$ 且 E 是一个闭凸集，$E + \operatorname{cone} E = E$。若存在正齐次、次可加、连续泛函 $\xi : Y \times D \to \mathbb{R}$ 使得

(1) 若 $y_1 - y_2 \in E_\infty \setminus \{0\}$，$z_1 - z_2 \in D$，则 $\xi(y_1, z_1) \ge \xi(y_2, z_2)$；

(2) $\xi(y,z) \ge 0$，$\forall x \in S$，$y \in H(x_0, x)$，$z \in G(x)$。

那么 x_0 是问题(SVEPC)的 E_∞-Benson 真有效解。

证明：首先证明存在点凸锥 P 使得 $E_\infty \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} P$。

令

$$P_1 = \{y \in Y : \xi(y,0) < 0\} \cup \{0\}.$$

因为 ξ 是正齐次、次可加的连续泛函，所以 P_1 是 Y 上的凸锥。下证 P_1 是点的。设 $y_0 \in P_1 \cap (-P_1)$，若 $y_0 \ne 0$，则 $\xi(y_0, 0) < 0$ 且 $\xi(-y_0, 0) < 0$。又由于 ξ 是次可加的，那么得到 $0 = \xi(y_0 - y_0, 0) \le \xi(y_0, 0) + \xi(-y_0, 0)$。故 $-\xi(-y_0, 0) \le \xi(y_0, 0) < 0$，从而有 $\xi(-y_0, 0) > 0$，这与 $\xi(-y_0, 0) < 0$ 矛盾。所以有 P_1 是点的。

令 $P := -P_1$，则 P 是点凸锥。对于任意的 $\bar{y} \in E_\infty \setminus \{0\}$，有 $0 - (-\bar{y}) \in E_\infty \setminus \{0\}$。由条件(1)可知 $\xi(-\bar{y}, 0) < \xi(0,0) = 0$。因此，$-\bar{y} \in \{y \in Y : \xi(y,0) < 0\}$。又因为 ξ 是连续的，所以 $\operatorname{int} P_1 = \{y \in Y : \xi(y,0) < 0\}$。从而有 $\bar{y} \in -\operatorname{int} P_1 = \operatorname{int} P$。因而 $E_\infty \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int} P$。

下证

$$(H(x_0, S) + E) \cap (-\operatorname{int} P) = \varnothing. \tag{9}$$

假设式(9)不成立，则存在 $\bar{x} \in S$ 使得 $(H(x_0, S) + E) \cap (-\operatorname{int} P) \ne \varnothing$。由 $\bar{x} \in S$ 有 $G(\bar{x}) \cap (-D) \ne \varnothing$，于是存在 $\bar{y} \in H(x_0, x)$，$\bar{e} \in E$，$\bar{z} \in G(\bar{x})$ 使得 $\bar{y} + \bar{e} \in -\operatorname{int} P$，$\bar{z} \in -D$。又因为 $0 \notin E$ 且 $E + \operatorname{cone} E = E$，故 $E \subseteq E_\infty \setminus \{0\}$。因此，$\bar{e} \subseteq E_\infty \setminus \{0\}$，故 $\bar{e} \subseteq \operatorname{int} P$。那么 $\bar{y} \in -\operatorname{int} P - \operatorname{int} P \subseteq -\operatorname{int} P$。

由 P 的定义得 $-\operatorname{int} P = \{y \in Y : \xi(y,0) < 0\}$，于是

$$\xi(\bar{y}, 0) < 0. \tag{10}$$

由 ξ 的次可加性可得

$$\xi(\bar{y}, \bar{z}) \le \xi(\bar{y}, 0) + \xi(0, \bar{z}). \tag{11}$$

取 $e_0 \in E_\infty \setminus \{0\}$，那么 $\frac{1}{n} e_0 \in E_\infty \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}^+$。

由 $z \in -D$ 和条件(1)可得

$$\xi\left(-\frac{1}{n} e_0, \bar{z}\right) < \xi(0,0) = \xi(0), \tag{12}$$

当$n\to+\infty$时，由ξ的连续性得

$$\xi\left(0,\bar{z}\right)\le 0. \tag{13}$$

综合式(10)，(11)，(13)得

$$\xi\left(\bar{y},\bar{z}\right)<0.$$

这与条件(2)矛盾，因此式(9)成立。

因为$\operatorname{int}P$是开集，那么由式(9)得

$$\operatorname{clcone}\left(H\left(x_0,S\right)+E\right)\cap\left(-\operatorname{int}P\right)=\varnothing. \tag{14}$$

又因为$E_\infty\setminus\{0\}\subset\operatorname{int}P$，那么有

$$\operatorname{clcone}\left(H\left(x_0,S\right)+E\right)\cap\left(-E_\infty\setminus\{0\}\right)=\varnothing.$$

故x_0是问题(SVEPC)的E_∞-Benson真有效解。

4. 结论

本文中，借助非线性标量化函数的性质，对带约束集值均衡问题的E_∞-Benson真有效解这一类新的有效解进行非线性刻画，并得到这类解非线性标量化的充分最优性条件和必要最优性条件，且该解的必要条件和充分条件在形式上大致统一。利用非线性泛函刻画E_∞-Benson真有效解丰富了集值均衡问题的研究内容，为解的性质提供了更深入的研究与定义。特别的，此结果推广和改进了文献[18]和[20]中相应内容。

参考文献

[1] Dhingra, M. and Lalitha, C.S. (2017) Approximate Solutions and Scalarization in Set-Valued Optimization. *Optimization*, **66**, 1793-1805. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1271419

[2] Gao, Y., Hou, S.H. and Yang, X.M. (2012) Existence and Optimality Conditions for Approximate Solutions to Vector Optimization Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **152**, 97-120. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9891-6

[3] Zhou, Z.A., Yang, X.M. and Peng, J.W. (2012) ε-Strict Subdifferentials of Set-Valued Maps and Optimality Conditions. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **75**, 3761-3775. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.01.030

[4] Zhou, Z.A., Yang, X.M. and Peng, J.W. (2014) ε-Optimality Conditions of Vector Optimization Problems with set-Valued Maps Based on the Algebraic Interior in Real Linear Spaces. *Optimization Letters*, **8**, 1047-1061. https://doi.org/10.1007/s11590-013-0620-y

[5] Zhou, Z.A. and Peng, J.W. (2012) Scalarization of Set-Valued Optimization Problems with Generalized Cone Subconvexlikeness in Real Ordered Linear Spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **154**, 830-841. https://doi.org/10.1007/s10957-012-0045-2

[6] Zhou, Z.A. and Yang, X.M. (2014) Scalarization of ε-Super Efficient Solutions of Set-Valued Optimization Problems in Real Ordered Linear Spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **162**, 680-693. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0565-z

[7] Gutiérrez, C., Jiménez, B. and Novo, V. (2006) A Unified Approach and Optimality Conditions for Approximate Solutions of Vector Optimization Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **17**, 688-710. https://doi.org/10.1137/05062648X

[8] Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. (1951) Nonlinear Analysis. In: David, F.N. and Neyman, J., Eds., *Proceeding of the Second Berley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, California, 481-492. https://doi.org/10.1525/9780520411586-036

[9] Hartley, R. (1978) On Cone-Efficiency, Cone-Convexity and Cone-Compactness. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **34**, 211-222. https://doi.org/10.1137/0134018

[10] Benson, H.P. (1979) An Improved Definition of Proper Efficiency for Vector Maximization with Respect to Cones. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **71**, 232-241. https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90226-9

[11] Borwein, J.M. (1980) The Geometry of Pareto Efficiency Over Cones. *Optimization*, **11**, 236-248. https://doi.org/10.1080/02331938008842650

[12] Henig, M.L. (1982) Proper Efficiency with Respect to Cones. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **36**, 387-407. https://doi.org/10.1007/BF00934353

[13] Borwein, J.M. and Zhuang, D.M. (1991) Super Efficiency in Convex Vector Optimization. *Methods and Models of Operations Research*, **35**, 175-184. https://doi.org/10.1007/BF01415905

[14] Borwein, J.M. and Zhuang, D.M. (1993) Super Efficiency in Vector Optimization of Set-Valued Maps. *Transaction of American Mathematical Society*, **338**, 105-122. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1098432-5

[15] Yang, X.M., Yang, X.Q. and Chen, G.Y. (2000) Theorems of the Alternative and Optimization with Set-Valued Maps. *Journal of Optimization and Applications*, **107**, 627-640. https://doi.org/10.1023/A:1026407517917

[16] 杨新民. Benson 真有效解与 Borwein 真有效解的等价性[J]. 应用数学, 1994, 7(2): 246-247.

[17] Zhao, K.Q., Yang, X.M. and Chen, G.Y. (2015) Approximate Proper Efficiency in Vector Optimization. *Optimization*, **64**, 1777-1793. https://doi.org/10.1080/02331934.2014.979818

[18] 付科程. 向量优化中基于回收锥的真有效解的性质研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学, 2015.

[19] 赵克全, 戎卫东, 杨新民. 新的非线性分离定理及其在向量优化中的应用[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(4): 533-544.

[20] 徐义红, 龙鑫灿, 黄斌. 集值均衡问题近似 Benson 真有效解的非线性刻画[J]. 运筹学学报, 2021, 25(4): 80-90.

[21] Chicco, M., Mignanego, F., Pusillo, L. and Tijs, S. (2011) Vector Optimization Problems via Improvement Sets. *Journal of Optimization of Theory and Applications*, **150**, 516-529. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9851-1

[22] Zhao, K.Q. and Yang, X.M. (2015) E-Benson Proper Efficiency in Vector Optimization. *Optimization*, **64**, 739-752. https://doi.org/10.1080/02331934.2013.798321

[23] Mishra, S.K., Wang, S.Y. and Lai, K.K. (2009) Generalized Convexity and Vector Optimization. Springer Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-85671-9

[24] Gutiérrez, C., Jiménez, B. and Novo, V. (2012) Improvement Sets and Vector Optimization. *European Journal of Operational Research*, **223**, 304-311. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

[25] Zhou, Z.A., Liang, K.H. and Ansari, Q.H. (2020) Optimality Conditions for Benson Proper Efficiency of Set-Valued Equilibrium Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2020**, Article No. 87. https://doi.org/10.1186/s13660-020-02352-6

[26] Zhao, K.Q., Xia, Y.M. and Yang, X.M. (2015) Nonlinear Scalarization Characterizations of *E*-Efficiency in Vector Optimization. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **19**, 455-466. https://doi.org/10.11650/tjm.19.2015.4360