

# 高等数学之知识点探究

——以空间直角坐标系、函数的连续性及柯西审敛原理为例

葛岩岩

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年4月15日; 录用日期: 2024年5月17日; 发布日期: 2024年5月31日

## 摘要

基于高等数学逻辑缜密、结构连贯的特点, 我们从空间直角坐标系、函数连续性以及柯西审敛原理三个知识点中挖掘出人生观、价值观、世界观等方面的价值理念元素。并通过将元素无形地融入课堂教学实现三全育人目的。

## 关键词

高等数学, 三全育人, 空间直角坐标系, 函数的连续性, 柯西审敛原理

# Exploration of Knowledge Points in Advanced Mathematics

—Taking the Space Cartesian Coordinate System, Continuity of  
Functions, and Cauchy's Convergence Principle as Examples

Yanyan Ge

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 15<sup>th</sup>, 2024; accepted: May 17<sup>th</sup>, 2024; published: May 31<sup>st</sup>, 2024

## Abstract

Based on the characteristics of rigorous logic and coherent structure in advanced mathematics, we explore the value concept elements of life philosophy, values, and worldview from three knowledge points: spatial Cartesian coordinate system, function continuity, and Cauchy's convergence principle and achieve the goal of comprehensive education by invisibly integrating elements into classroom teaching.

文章引用: 葛岩岩. 高等数学之知识点探究[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 519-524.

DOI: 10.12677/pm.2024.145205

## Keywords

Advanced Mathematics, Three Comprehensive Education, Space Cartesian Coordinate System, The Continuity of Functions, Cauchy Convergence Criteria

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

十七大首次以教育理念的形式提出“坚持教育为本、育德为先”；十八大定位“教育之根本于立德树人”为基本教育方针；十九大再次强调“落实立德树人导向”；“立德树人”亦从根本上解答了育人过程中的三大问题：“培养怎样的人、如何培养人、为谁培养人”[1]。

“才高八斗，德才俱佳”自古以来才与德兼备者方为士。国家和学校倡导全体教师专业课程的授课中融入相关课程思政的目的是为了在立德树人的同时实现三全育人[2]；这种教育方式具有将知识传授、价值塑造、能力培养相统一的多元立体化教育结构；并采用渗透融合的方式将专业学科思想和理念沉浸于传统课程的教授过程中，让学生在掌握专业知识、提高学习兴趣的同时，深刻感悟学科的魅力，从而启迪思维、升华品德[3]。借助于广渗透、全覆盖的“大思政”格局；结合“学高为师，身正为范”的教师工作规范，以及将“教书”和“育人”有机结合、将“经师”和“人师”有机同化、将“教书匠”与“大先生”有机交融的教师素养，精准把握知识脉络、传授知识点的精髓、启发学习兴趣、落实学科价值引领、充分挖掘学科及知识点的思政要素，做好学生的引路人。

高等数学是理工科学生大学时期的一门必修课程[4]，当前其课程思政的主要方式有：在课堂中讲述数学发展史、数学家的故事；插入思想政治教育的相关内容；借鉴部分学者挖掘出的思政元素等[5][6]，这些方式在一定程度上可以实现课程思政的教育目的。由于高等数学课程思政的元素发掘尚不够全面、系统，融入的方式尚可进一步优化[7][8]。由于在高等数学中空间直角坐标系是研究立体几何的基础，函数的连续性是研究函数的重要性质之一，而柯西审敛原理是判断数项级数敛散性的充分必要条件之一，为了从不同角度更加充分地理解高等数学中所蕴含的深刻思想，本文主要从高等数学中的空间直角坐标系、函数连续性以及柯西审敛原理三个知识点出发，研究其课程思政元素及这些元素在实际的教学过程中具体的融入方式。

## 2. 高等数学中所蕴含的价值理念元素

### 2.1. 专业教师的素养是教育的第一课

教师的本职工作是教书育人，“授人以鱼不如授人以渔”的谚语告诉我们，传授学习方法要比填鸭式的传授知识本身更为重要。从站在讲台上的那一刻起，教师的言行举止就以最直观的方式展现在学生面前，教师的言行举止亦是课程思政的第一要素。举止得体、谈吐优雅、思想积极乐观的教师形象可以无形中给学生起到示范的作用，也能在一定程度上提高学生的学习兴趣。在讲授课程的过程中，教师的教学态度、知识水平和教学能力体现了课程思政的第二要素。严谨认真的教学态度、完备的知识体系以及优秀的教学能力直接决定着教学效果，所以做好课程思政的关键在于教师，教师不仅是课程思政的传授者，也是课程思政的践行者。高等数学作为一门逻辑严密而又高度抽象的学科，这就要求教师在课堂

上的表现要能够展现出学科特色, 从而进一步彰显高等数学的学科魅力。

除了教师本身之外, 课程内容中也蕴含着丰富的思政元素, 接下来我们从高等数学中具体的教学内容中挖掘出相关的思政元素, 并对其融入方式进行研究。

## 2.2. 空间直角坐标系中蕴含的价值理念元素

常言道: “无规矩不成方圆”, 人类赖以生存的地球借助于经线和纬线来确定具体方位, 地球表面及其上方空间中的点和线可借助空间直角坐标系来描述。取定空间中的一点  $O$  和三个两两垂直的单位向量  $i_1$ 、 $i_2$ 、 $i_3$ , 则可确定三条过点  $O$  且两两垂直的数轴( $x$ 、 $y$ 、 $z$ ), 即空间直角坐标系(如图 1)。借助于空间直角坐标系, 空间中点、线、面都能用数值精准刻画(如图 2)。

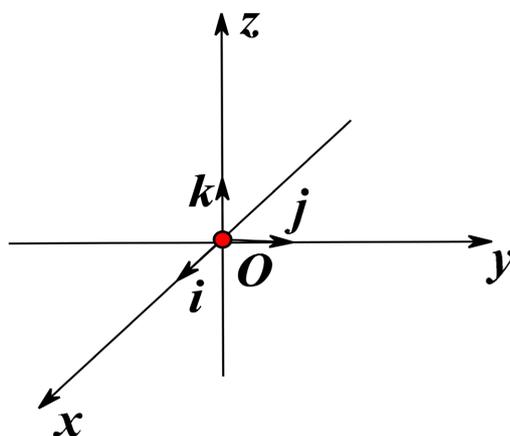


Figure 1. Spatial cartesian coordinate system  
图 1. 空间直角坐标系

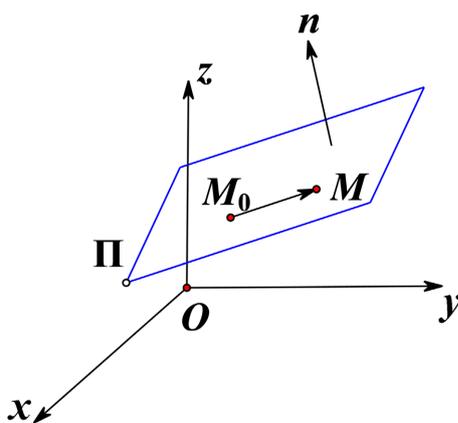


Figure 2. Points, lines, and surfaces in a spatial cartesian coordinate system  
图 2. 空间直角坐标系中的点、线、面

结合空间直角坐标系的特点, 我们可以探索出以下几方面的价值理念元素:

(1) 培养自己拥有广阔胸怀和大格局。从空间直角坐标系的坐标轴及其特点出发, 可以探索出胸怀与格局的理念。由于三个坐标轴都是无限延伸性, 由此空间直角坐标系可以囊括空间中所有的点、线、面, 具有包罗万象的特征。大学生作为中国特色社会主义事业的传承人, 胸怀决定了我们能够“走多远”、格局决定了我们能够“跳多高”。

(2) 找准定位和方向, 充分发挥个人价值。从空间直角坐标系可以给出每个点、线、面的具体描述出

发可以研究出找准个人定位及价值的理念。空间中的每一点在空间直角坐标系中都有其唯一的坐标和相对于原点的方向。作为一名大学生，也要在家庭、学校、社会中找准自己的定位和发展方向，充分施展自己的能量，为更好地发展“小家”、“大家”添砖加瓦。

### 2.3. 高等数学中与函数的连续性相关的价值理念探究

函数的连续性是指：设在点  $x_0$  的某一邻域内  $y = f(x)$  有定义，若

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续(如图 3)。

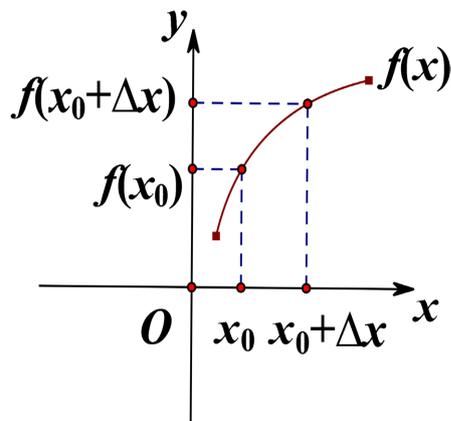


Figure 3. The increment of independent variables and the increment of corresponding functions  
图 3. 自变量的增量及对应函数的增量

根据函数具有连续性的条件及邻域的概念可探究出以下几点价值理念相关元素：

(1) 细节处见真章。定义使用了极限来刻画函数的连续性，而极限却是一个极小的关键变化量，从而发掘出细节的重要性。借助极限的思想，函数的连续性被清晰的描述，这也向我们揭示了无限趋近于零和等于零在概念上的本质区别。有鉴于此，这也要求我们在日常生活、学习、工作中要注意细节，着眼小处，所谓见微知著即是此理。

(2) 包容。从函数的连续性是在点的某一邻域内来考虑，可以探索出包容的理念。函数的连续性定义在点的某一邻域内，根据邻域的定义可知其中一定包含无限多个点。包容在教育的过程中同样适用，海纳百川，有容乃大；壁立千仞，无欲则刚。包容是几千年来经过历史和现实的考验留存下来的宝贵品质，更是每一位优秀的大学生应有的素养。

### 2.4. 高等数学中与柯西审敛原理相关价值理念元素的挖掘

柯西审敛原理：级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充要条件是任给  $\varepsilon > 0$ ，总有正整数  $N$ ，满足当  $n > N$  时，任取正整数  $p$ ，均有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

成立。

根据柯西审敛原理的研究背景及定理的严谨表述可以挖掘出以下几方面价值理念元素：

(1) 从柯西审敛原理发明者柯西的生平出发可以探索出青春是用来奋斗的理念。奥古斯丁·路易斯·柯西(Cauchy)是法国的数学大家，他成长于法国大革命时期，七月革命时期甚至被流放，但其发表文章的

开创性和数量均震惊学术界。天才从来都不是一蹴而就的灵光乍现，却是穷年累月的披星戴月、辛勤耕耘。最勤奋数学家的排行榜上必有柯西的一席之地，无论外部的环境多么动荡不安，他始终拥有探索真知的恒心和毅力。大学一年级的学生们刚刚经历完高考，正值自主学习的初始阶段，应当培养自己坚定的意志、勤奋努力的学风和坚韧不拔的精神，正值青春、正当奋斗。

(2) 思维活跃、逻辑严谨是数学学科独有的韵味。从柯西审敛原理的研究角度及阐述方式出发可以提炼出思维活跃、逻辑严谨的数学思维。根据定义可知无穷级数收敛即其部分和数列有极限，由部分和的取法不唯一但极限唯一可以知道，若将两个含有不同项的部分和做减法即可得到有限个中间项的和的极限为零，从而将无穷级数的部分和转化为有限项的部分和问题，且省去求解部分和的极限的过程。通过对无穷级数收敛定义的深层剖析，在理解透彻的基础上学会融会贯通，从而得到柯西审敛原理，其本质并没有发生改变，思考的角度不同，则解题的思路有变。因此，大学生们需要具备透过现象看本质的能力，根据事物的本质发散思维、融会贯通，并将严谨的逻辑思维能力恰当地融入到日常的学习生活中。

### 3. 高等数学中相关价值理念元素课堂融入方式探究

#### 3.1. 与空间直角坐标系相关元素融入方式研究

在介绍空间直角坐标系的坐标轴时，由于每个坐标轴向其各自的方向都有无限延伸的特点，我们借助于计算机作图可以展示出空间直角坐标系的动态无限延伸状态并可以借助于坐标唯一表示出空间中的任何一个点，此时引伸出胸怀的广度和格局的高度亦如此，并引导学生思考拥有广阔胸怀和大格局能够带给我们什么，自然地启发同学们有将自己培养成“有胸怀、有格局”的意识。

对于空间中的定点  $A$ ，我们分别将其放在以几个不重合的点为原点而构造出的空间直角坐标系中，并借助于画图工具动态展示在不同坐标系下  $A$  的坐标及原点到点  $A$  的向量的方向，这也揭示了同一点的位置和方向依度量标准的不同而发生改变，进而引导同学们思考“准确自我定位和明确发展方向”的重要性。

#### 3.2. 与函数的连续性相关元素融入方式研究

讲解完利用极限的思想来刻画函数的连续性概念时，着重说明极限是一个无限逼近的状态量，强调极限的思想在高等数学中的应用非常广泛，这也进一步揭示了无限趋近本质上是对细节的探讨，在数学中它是一个不可忽视的量；引出“细节处见真章”的理念。

介绍函数的连续性概念时着重强调此定义需假设函数在点的某一邻域内有定义，引导学生思考：为什么要假设这样的条件呢？在解释给定此假设条件的原因时强调：条件中的邻域给定变量一个容许范围，在这个范围内，任意取点均可。从而引出邻域的引入体现了数学研究的包容的思想，且这里的“包容”使得我们的研究对象更加具有一般性，使得研究变得有意义，生活中的包容可以让我们拥有更多爱与被爱，让我们更加能够体会生命的美好。

#### 3.3. 与柯西审敛原理相关的元素融入方式研究

在介绍柯西审敛原理的研究背景时，通过 ppt 展示柯西审敛原理的发展来源及发明此原理的数学家的故事相结合的方式介绍柯西审敛原理的研究背景，在调动学生学习兴趣的同时传达出我们“正值青春、正当奋斗”的理念。

课堂上对柯西审敛原理的本质进行深度剖析，柯西审敛原理从一个新的角度出发：即跳过前  $n$  项和而从第  $n+1$  项出发使得其后任意的  $p$  项相加均被一个无穷小的正数  $\varepsilon$  控制来刻画级数的敛散性，但其本质上与考虑前  $n$  项和收敛于某一常数相比并未发生改变。加深学生对定理的理解的同时，传达“万变不

离其宗”的数学思想。任何定义、定理之间都存在着千丝万缕的关系，逻辑严谨、思维活跃是数学学科的独特魅力，学会拥有严谨的逻辑和灵活的思维是学习数学的最重要目的之一。与此同时引导学生们拥有发现美的眼睛和感知幸福的能力。

#### 4. 结论

本项目主要从理论知识、价值理念、精神追求三个方面充分发掘高等数学课程中空间直角坐标系、函数的连续性、柯西审敛原理三个知识点中所蕴含的思政教育元素，以实现三全育人、协同育人、长效育人的教育目标。研究内容主要分为三个方面：

(1) 课程思政不等同于思政课，它是同时兼具智育和德育的专业课程教学课堂。由于逻辑严谨、趣味性不强的高等数学是纯理论的基础课程，这就对任课教师提出了更高的要求，我们需要深刻理解课程思政的本质，更要把高等数学课程思政在课堂上讲出专属此门课程的味道，避免在理论讲解的过程中生硬插入思政教育内容。

(2) 以专业的知识结构、严谨数学逻辑、认真的教学态度、灵活的教学方式等，引导学生培养出正确的价值观、社会观、人生观；通过以身作则的方式，培养出积极乐观、知识丰富、品德优良，且拥有强烈的社会责任感的中国特色社会主义新青年。

(3) 结合高等数学课程中的具体知识点，本文发掘出一些具有教育意义的思政教育元素，并在讲解知识点的过程中浸润式地传达给学生，一方面活跃了课堂氛围、带动了学生的学习兴趣、加深了学生对知识点的理解；另一方面也让学生们在学习文化知识的同时思想上受到启发，从而达到智育和德育同频共振的目的。

智育与德育同行是现阶段育人的基本方式，也是培养优秀的建设中国特色社会主义接班人的必经之路。每一位专业课教师都需要深耕课程与价值理念教育两个方面，传授专业知识的同时，更深一步地发掘课程的知识精髓、思维特点以及人文价值。高等数学作为大学阶段的基础课程之一，更应讲好学术与人生课堂。通过高等数学课堂教学，不仅要让学生充分感受到此学科的魅力，且在日常的教学过程中潜移默化的接受积极思想的熏陶，从而为每位学生的世界观、人生观、价值观的塑造提供一种良性引导，充分启发学生进行内源性的自我发展，从而达到“授人以渔”的目的。高等数学学科的发展需要一代代理实交融的大学生人日积月累的耕耘。

#### 参考文献

- [1] 教育部. 关于印发《高等数学课程思政建设指导纲要》的通知[EB/OL]. [http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/202006/t20200603\\_462437.html](http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/202006/t20200603_462437.html), 2024-04-25.
- [2] 把思想政治工作贯穿教育教学全过程[EB/OL]. [http://www.xinhuanet.com/politics/2016-12/08/c\\_1120082577.htm](http://www.xinhuanet.com/politics/2016-12/08/c_1120082577.htm), 2024-04-25.
- [3] 李璇, 张淑娟. “三全育人”视域下高等数学课程思政建设路径研究[J]. 黑龙江工业学院学报, 2022, 22(1): 37-42.
- [4] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [5] 舒红, 张穗. 高等数学中课程思政元素挖掘初探[J]. Curriculum Teaching, 2022, 9(3): 121-124.
- [6] 刘丹, 曹广福. 从不定积分概念的教学看数学课堂的思想性[J]. 高等数学研究, 2021, 24(1): 50-55.
- [7] 李媛媛. “课程思政”理念融入高等数学课程教学的策略探究[J]. 产业与科技论坛, 2022, 21(4): 145-146.
- [8] 李应岐, 王静, 方晓峰. “高等数学”课程思政教学探析[J]. 教育教学论坛, 2022(1): 26-29.