

# 一类带有环境病毒量和疫苗影响的传染病模型平衡点的分析

王思凡, 王娇艳

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2024年4月15日; 录用日期: 2024年5月16日; 发布日期: 2024年5月31日

## 摘要

本文研究了一类带有环境病毒量和疫苗影响的SLEIRVW传染病动力学模型, 对模型进行了深入的动力学分析和计算, 通过下一代矩阵法计算了模型的基本再生数 $R_0$ , 利用Hurwitz判据和矩阵理论分析了平衡点的局部稳定性, 这项研究聚焦于一种传染病动态模型, 特点是综合考虑了环境病毒量和疫苗对传播的影响, 得出了以下关键结论: 1) 当基本再生数 $R_0$ 小于1时, 传染病无法持续传播, 这是传染病控制的理想状态。2) 当 $R_0$ 大于1时, 为了有效地控制传染病传播, 需要采取措施降低人们的接触率, 并提高疫苗接种的覆盖率。这两个因素对传染病的传播有着重要而积极的影响。所以降低接触率以及提高疫苗接种效果能使得基本再生数 $R_0$ 减小, 即能够有效防治该类传染病。

## 关键词

传染病模型, 基本再生数, 疫苗, 平衡点稳定性

# Analysis of Equilibrium Points of a Class of Infectious Disease Models with Environmental Viral Load and Vaccine Effects

Sifan Wang, Jiaoyan Wang

College of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Apr. 15<sup>th</sup>, 2024; accepted: May 16<sup>th</sup>, 2024; published: May 31<sup>st</sup>, 2024

## Abstract

This paper investigates a class of SLEIRVW infectious disease dynamics models with the effects of

environmental viral load and vaccines, provides in-depth dynamics analysis and calculations of the models, calculates the basic regeneration number  $R_0$  of the models by the next-generation matrix method, and analyzes the local stability of the equilibrium points using Hurwitz's criterion and matrix theory. This study focuses on an infectious disease dynamics model featuring the integrated consideration of the study focuses on the dynamics of an infectious disease, characterized by a combination of environmental viral load and vaccine effects on transmission, and draws the following key conclusions: 1) When the fundamental regeneration number,  $R_0$ , is less than 1, the infectious disease cannot be spread sustainably, which is the ideal state for infectious disease control. 2) When  $R_0$  is greater than 1, effective control of the spread of the infectious disease requires measures to reduce the rate of exposure to the population and to increase the coverage of vaccinations. These two factors have an important and positive impact on the spread of infectious diseases. Therefore, reducing the contact rate and improving the effectiveness of vaccination can make the basic regeneration number  $R_0$  decrease, that is, it can effectively control this type of infectious disease.

## Keywords

Infectious Disease Modeling, Basic Regeneration Number, Vaccines, Equilibrium Stability

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

### 1.1. 研究背景

传染病在人群以及其它种群中的传播是一个很复杂的过程, 利用动力学的方法建立传染病的数学模型, 并通过数学模型对传染病进行定量与定性的分析和研究以判断某种传染病在某一地区是否会蔓延持续下去。1926年 Kermack 和 Mckendrick [1]研究了 1665~1666 年伦敦的黑死病以及 1906 年孟买的瘟疫, 构建了具有重要意义的仓室模型。基于 SIR 的简单模型对各类流行病的特点建立了各种升级版的 SIR 模型, 模型预言的结果在流行病预防和控制决策过程中也会给出重要的参考价值。1932 年他们又在文献[2]提出了 SIS 模型, 并提出了阈值理论, Hethcote [3] [4]对这些工作进行了系统的总结。文献[5] [6]建立相应的传染病动力学模型, 从模型对应的方程角度分类, 建立的模型分别为常微分方程模型[7] [8]、随机微分方程模型[9]、偏微分方程模型[10]等。建立更符合实际的传染病模型能更好地预测传染病的发病趋势, 通过对一个更符合现实情况的模型进行研究, 文献[11]对不同传染病进行预测同时找到更合适的防控措施来控制疾病的蔓延, 这将大大地减少人们的患病率或致死率等, 对人类健康的发展具有重要的作用。

### 1.2. 研究现状及问题

Gumel 等[12]认为传染病绝大多数传播是由无症状感染者造成的, 因此传染病模型至少应包含无症状传播这一重要特征。Mohsen 等[13]提出了一个考虑移民和隔离影响的传染病模型, 研究表明正确实施隔离措施有助于控制疾病传播。Kamara 等[14]建立了潜伏期人群传播的 SEIR 数学模型, 证明了无病平衡点和地方病平衡点的局部稳定性和全局稳定性。Zamir 等[15]考虑了传染病的感染和消除, 并对所建立的模型的再生数进行了灵敏度分析, 找到影响传播的最敏感的参数。到目前为止, 对疫苗接种的研究也在陆续展开, 占主导地位的研究方法也是两种: 调查和建立数学模型。例如 kate 等人利用 ODE 模型[16]

对比了 5 种年龄结构的优先次序策略, 发现优先给 20 至 49 岁的成年人接种疫苗可最大限度地降低发病率, 但在大多数情况下优先给 60 岁以上的老人接种疫苗可最大限度地降低死亡率。类似地, Brody 等人 [17] 也通过仓室模型得出了优先给大于 60 岁的老年人接种疫苗能最大程度降低死亡率的结果。Shen 等人 [18] 研究了接种疫苗在缓解疫情方面的有效性, 还有一些研究则侧重于得到使传播得到控制的最佳疫苗覆盖率以及接种疫苗对再生数的影响。现如今, 在流行病爆发时, 主要的医疗控制手段有注射疫苗、隔离防治、药物治疗等。疾病爆发后, 群众也会自发地采取少去人群密集的公共区域、购买增强对疾病抵抗力的药物等措施。但对于一些新的传染病或是以及存在的但又发生新的变异的传染病, 传统的治疗方案可能作用有限, 需要医疗专家找到新的方案, 这期间耗费的时间我们也需要考虑。当今, 注射疫苗是控制传染病最直接最有效的方法, 但一般而言, 一种新的传染病出现需要几个月的时间研发、量产新的疫苗。这些在我们研究疾病内在机理、采取控制措施、构建数学模型时都应该考虑进去(有些因素影响较小, 在构建模型时可以省去)。建立合适的模型, 结合相关理论知识, 传染病专家可以发现疾病的传播规律和发展趋势并依此找到更好的预防和控制方案, 从而最大程度地减少人们的生命财产损失。

### 1.3. 研究意义

有部分传染病是属于单链 RNA 病毒, 可以感染动物或人类。RNA 病毒具有遗传不稳定性特点, 由单链 RNA 病毒引起的传染病的传播可以通过接触和飞沫、空气以及污染物等方式传播, 其在人与人之间的主要传播方式为呼吸道飞沫和接触。此外, 物体因接触病毒而被污染, 然后间接传播给易感者。虽然被污染的物体表面有助于病毒的传播, 但这并不被认为是病毒传播的主要方式。这种单链 RNA 病毒不仅给全球公共卫生治理带来威胁, 而且对社会的正常生活产生重大影响。目前单链 RNA 病毒的变体对现有疫苗也构成了严重威胁。特别地, 隔离在防止传染病的进一步传播方面发挥着特殊作用。采取包括隔离在内的一系列措施, 能控制传播、降低该病的病死率。单链 RNA 病毒及其变种不仅给全球卫生体系带来了前所未有的压力, 也从根本上挑战了对病毒和疾病的认识。需要通过建模相关科学研究和各方面进行控制来抑制传播, 所以对此类传染病的研究仍需继续。

## 2. 相关基础知识

为方便阅读理解本章节对文中所涉及的专业名词及引文定理等做简要阐释。

### 2.1. 基本再生数的计算方法——下一代矩阵法

基本再生数 [19] (Basic Reproduction Number, 通常缩写为  $R_0$ ) 是流行病学中用来衡量传染病传播能力的重要指标之一。它表示在人群中, 一个患者平均会传染多少个新的个体。具体来说, 基本再生数描述了在一个完全易感人群中, 单个感染个体在其传染期间(通常是感染后可传染的时间段)会传播给多少个新的易感个体。如果一个疾病的基本再生数大于 1, 那么这种疾病就有可能形成疫情并在人群中传播。相反, 如果基本再生数小于 1, 那么疾病传播会逐渐减弱并最终消失。基本再生数的计算通常涉及疾病的传播速率、感染概率、潜伏期等因素。它对于评估疾病的传播情况、制定预防控制策略以及预测疫情发展趋势都具有重要意义。下一代矩阵法可以用来计算基本再生数。

下一代矩阵法 [20] (Next Generation Matrix Method) 是一种流行病学中用于估计基本再生数 ( $R_0$ ) 的方法。它是基于传统的传染病传播模型的改进, 主要由 David Champredon 和 James Watmough 在 2015 年提出。下一代矩阵法的基本思想是将传染病的传播过程分解成若干个组成部分, 然后通过矩阵的运算来描述这些组成部分之间的转化关系, 从而计算出基本再生数。这种方法相对于传统的微分方程模型更为直观和灵活, 尤其适用于复杂的传染病模型。

具体来说, 下一代矩阵法的步骤如下:

设系统为

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, 2, \dots, n$$

$\mathcal{F}_i$  代表第  $i$  个染病仓室的新感染率,  $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$ ,  $\mathcal{V}_i^+(x)$  代表个体通过所有方式转移到  $i$  仓室的速率,  $\mathcal{V}_i^-(x)$  代表个体离开  $i$  仓室的速率。

设  $x_0$  是系统的无病平衡点, 则有

$$\dot{x} = -Df(x_0)(x - x_0)$$

$Df(x_0)$  为无病平衡点  $x_0$  处的导数  $[\partial f_i / \partial x_j]$

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

其中  $F$  和  $V$  是  $m \times m$  矩阵, 且

$$F = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], V = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], 1 \leq i, j \leq m$$

则  $FV^{-1}$  的谱半径是系统的基本再生数, 即  $R_0 = \rho(FV^{-1})$ 。

通过这种方法, 可以更清晰地理解传染病在人群中的传播过程, 并且可以用于评估不同干预措施对基本再生数的影响, 从而指导公共卫生策略的制定和调整。

## 2.2. 平衡点局部渐近稳定的判别方法——Hurwitz 判据

Hurwitz 判据(Hurwitz Criterion)是一种用于判断实系数多项式的根的位置的方法。该判据是基于多项式的系数来确定多项式根的位置, 从而判断多项式是否具有稳定的实根。

对于一个实系数多项式  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , Hurwitz 判据可以用以下步骤进行:

- 1) 构造 Hurwitz 矩阵: 构造一个  $n \times n$  的矩阵, 其中第一行为  $a_1, a_3, a_5, \dots$ , 第二行为  $a_0, a_2, a_4, \dots$ , 依此类推, 直到第  $n$  行为  $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots$ ;
- 2) 计算主子式: 计算 Hurwitz 矩阵的所有  $k \times k$  主子式(subdeterminants), 其中  $k = 1, 2, \dots, n$ ;
- 3) 判断稳定性: 如果所有主子式的值都大于零, 则多项式的所有实根都是负的; 如果有任何一个主子式的值小于等于零, 则多项式至少有一个正实根。

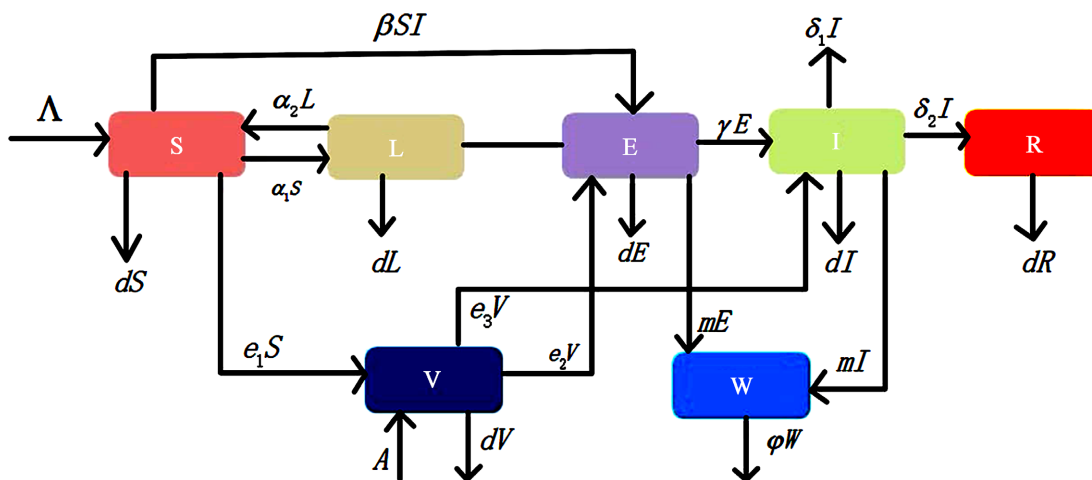
Hurwitz 判据的主要思想是利用多项式的系数来间接地判断多项式根的位置, 而不需要直接求解根。这种方法在控制论、信号处理以及工程数学等领域中有着广泛的应用, 特别是在判断系统稳定性方面。

## 3. 模型的建立

本文考虑 RNA 单链病毒引起的传染病, 它们在爆发时, 速度之快、传播范围之广并且有较长的潜伏期, 而有关部门采取的可控措施为隔离控制和注射疫苗。患者被发现症状后立刻接受治疗, 对部分病情较为严重的病例采取隔离治疗的方案。对于新出现的传染病和一些新变异的传染病, 疫苗从研发到上市一般需要 6 个月的时间。但对于一般传染病, 其疫苗之前就已经上市, 疾病爆发初期就可以投入使用。对于日常生活中一般的传染病, 患者初期染病后不会立刻进入隔离控制阶段, 以普通流感为例, 患病初期症状较轻, 服用一般抗病毒药物即可。若是病情加重引起发烧、肺炎等, 可能会住院隔离。对这类传染病模型就有其局限性。而本文参考了 Sanjoy Basu 等人[21]的 SLETIR 模型, 建立 SLEIRVW 模型。

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda + \alpha_2 L - \alpha_1 S - \beta SI - dS - e_1 S \\ \frac{dL}{dt} = \alpha_1 S - \alpha_2 L - dL \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - \gamma E - dE + e_2 V \\ \frac{dI}{dt} = \gamma E - \delta_1 I - \delta_2 I - dI + e_3 V \\ \frac{dR}{dt} = \delta_2 I - dR \\ \frac{dV}{dt} = e_1 S - e_2 V - e_3 V + A - dV \\ \frac{dW}{dt} = mE + mI - \phi W \end{cases}$$

其中  $S$  是易感人群,  $L$  是隔离人群( $S$  中的一部分),  $E$  是病毒在潜伏期是的人群,  $I$  是感染人群,  $R$  是康复者,  $V$  是接种疫苗的人群,  $W$  是环境中所含病毒量,  $\Lambda$  是输入者,  $\alpha_1$  是易感人群转移到隔离人群的比率,  $\alpha_2$  是隔离人群转移到易感人群的比率,  $d$  是自然死亡率,  $\beta$  是有效接触率,  $e_1$  是易感人群接种比例,  $e_2$  是接种后感染但在潜伏期的比率,  $e_3$  是接种后感染的概率,  $\gamma$  是潜伏期到感染的变化率,  $\delta_1$  是感染但不传播的概率,  $\delta_2$  是感染治疗后康复的比率,  $A$  是天生免疫者,  $m$  是每个仓室病毒释放量,  $\phi$  是消灭率。该系统中不考虑因病死亡人口且有一定的初始人口, 模型的传播流程图如下图 1。



**Figure 1.** A warehouse diagram of an infectious disease model with environmental virus load and vaccine impact  
**图 1.** 一类带有环境病毒量和疫苗影响的传染病模型仓室图

因为

$$N(t) = S(t) + L(t) + E(t) + I(t) + R(t) + V(t)$$

所以有

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda + A - dN - \delta_2 I \leq \Lambda + A - dN$$

当  $N > \frac{\Lambda + A}{d}$  时,  $\frac{dN}{dt} < 0$  为了不使一般性, 可行域为

$$\Omega = \left\{ (S, L, E, I, R, V) \mid S, L, E, I, R, V \geq 0, S + L + E + I + R + V = N, 0 < N < \frac{\Lambda + A}{d} \right\}$$

#### 4. 平衡点和再生数的计算

通过计算得到, 无病平衡点  $X_0 = (S_0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , 其中  $S_0 = \frac{\Lambda}{\alpha_1 + d + e_1}$ 。

下面用下一代矩阵算法得出基本再生数, 首先有

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta SI + e_2 V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} rE + dE - e_2 V \\ -rE + \delta_1 I + \delta_2 I + dI - e_3 V \\ -\alpha_1 S + \alpha_2 L + dL \\ -e_1 S + e_2 V + e_3 V + dV - A \\ \varphi W - mE - mI \end{pmatrix}$$

将  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{V}$  分别关于  $E, I, L, V, W$  分别求导, 并将无病平衡点  $X_0$  代入上式可以得到

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta\Lambda}{\alpha_1 + d + e_1} & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} r+d & 0 & 0 & -e_2 & 0 \\ -r & \delta_1 + \delta_2 + d & 0 & -e_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 + d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 + e_3 + d & 0 \\ -m & -m & 0 & 0 & \varphi \end{pmatrix}$$

继续计算可以得到

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta\Lambda}{(\alpha_1 + d + e_1)(r+d)} & 0 & \frac{e_2}{d+r} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{(\alpha_1 + d + e_1)(r+d)(\delta_1 + \delta_2 + d)} & 0 & \frac{e_2 r}{(r+d)(\delta_1 + \delta_2 + d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\beta\Lambda(\delta_1 + \delta_2 + d + r)}{\varphi(\alpha_1 + d + e_1)(\delta_1 + \delta_2 + d)} & 0 & \frac{me_2(\delta_1 + \delta_2 + d + r)}{\varphi(r+d)(\delta_1 + \delta_2 + d)} & 0 \end{pmatrix}$$

其特征值矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta\Lambda r}{(\alpha_1 + d + e_1)(r+d)(\delta_1 + \delta_2 + d)} \end{pmatrix}$$

所以得到基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda r}{(\alpha_1 + d + e_1)(r+d)(\delta_1 + \delta_2 + d)}$$

令系统右端为 0 得到



$$\begin{cases} \Lambda + \alpha_2 L - \alpha_1 S - \beta SI - dS - e_1 S = 0 \\ \alpha_1 S - \alpha_2 L - dL = 0 \\ \beta SI - \gamma E - dE + e_2 V = 0 \\ \gamma E - \delta_1 I - \delta_2 I - dI + e_3 V = 0 \\ \delta_2 I - dR = 0 \\ e_1 S - e_2 V - e_3 V + A - dV = 0 \\ mE + mI - \varphi W = 0 \end{cases}$$

通过计算可以得到地方病平衡点, 当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点  $X_1 = (S_1, L_1, E_1, I_1, R_1, V_1, W_1)$ , 其中

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\Lambda(r+d)[(\delta_1 + \delta_2 + d) - \beta(e_2 + e_3 + d - \alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 + d + e_1)(\alpha_2 + d))]}{(e_1 e_3 (r+d) + re_2) - (r+d)(\delta_1 + \delta_2 + d)[\alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + d + e_1)(\alpha_2 + d)]} \\ I_1 &= \frac{[(e_3(r+d) - re_2)V](R_0 - 1)}{(r+d)[\Lambda((\delta_1 + \delta_2 + d) - \beta(e_2 + e_3 + d - \alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 + d + e_1)(\alpha_2 + d))) - (\delta_1 + \delta_2 + d)(\alpha_1 + d + e_1)]} \\ E_1 &= \frac{(e_2 + e_3 + d)[(\alpha_2 + d)(\Lambda - \alpha_1 - d - e_1) + \alpha_1 \alpha_2 S_1] + e_2(\alpha_2 + d)(e_1 S_1 + A)}{(r+d)(\alpha_2 + d)(e_2 + e_3 + d)}, \quad R_1 = \frac{\delta_2 I}{d} \\ L_1 &= \frac{\alpha_1 S_1}{\alpha_2 + d}, \quad V_1 = \frac{e_1 S_1 + A}{e_2 + e_3 + d} \\ W_1 &= \frac{m[(e_2 + e_3 + d)((\alpha_2 + d)(\Lambda - \alpha_1 - d - e_1) + \alpha_1 \alpha_2 S_1 + m(r+d)(\alpha_2 + d)) + e_2(\alpha_2 + d)(e_1 S_1 + A)]}{\varphi(r+d)(\alpha_2 + d)(e_2 + e_3 + d)} \end{aligned}$$

设参数值

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.03, \quad \alpha_2 = 0.001, \quad d = 0.069, \quad \beta = 0.002, \quad e_1 = 0.929, \\ e_2 &= 0.0889, \quad e_3 = 0.899, \quad r = 0.03, \quad \delta_1 = 0.002, \quad \delta_2 = 0.94 \end{aligned}$$

#### 4.1. 无病平衡点的稳定性

定理 1: 当  $R_0 < 1$  时, 系统的无病平衡点  $X_0$  在  $\Omega$  内是局部渐近稳定的, 当  $R_0 > 1$  时不稳定。

证: 在无病平衡点处, 系统的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{x_0} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - d - e_1 & \alpha_2 & 0 & -\frac{\beta\Lambda}{\alpha_1 + d + e_1} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r - d & \frac{\beta\Lambda}{\alpha_1 + d + e_1} & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -\delta_1 - \delta_2 - d & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & -d & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_2 - e_3 - d & 0 \\ 0 & 0 & m & m & 0 & 0 & \varphi \end{pmatrix}$$

矩阵  $J|_{x_0}$  的特征方程为

$$(\lambda + \varphi)(\lambda + d)(\lambda^5 + k_1 \lambda^4 + k_2 \lambda^3 + k_3 \lambda^2 + k_4 \lambda + k_5) = 0$$

显然得到  $\lambda_1 = -\varphi$ ,  $\lambda_2 = -d$ . 其中计算得到

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 + \delta_1 + d + e_1 + \delta_2 + e_3 + \alpha_2 > 0 \\ k_2 &= 10d^2 + d^3 + e_1^2 + \delta_2 + e_2 + e_3 + r > 0 \\ k_3 &= 6\alpha_1 d^2 + 6\delta_1 d^2 + 6d^2 + 6d^3 - 3e_1^2 + 6d^4 + 6d^2 \delta_2 + 6d^2 \alpha_2 - e_1^2 \alpha_2 - e_1^2 r + 6d^2 e_3 + 6d^2 r - e_1^2 \delta_2 \\ &> d^2 (\alpha_1 + \delta_1 + e_3) > 0 \\ k_4 &= 6\alpha_1 d^3 + 6\delta_1 d^3 + 6d^3 + 6d^4 - 3de_1^2 + 6d^3 \delta_2 + 6d^3 e_2 + 6d^3 \alpha_2 + 6d^3 e_3 + 6d^3 r \\ &> d^3 (\delta_2 + e_2 + \alpha_2 + e_3 + r) > 0 \\ k_5 &= 5d^4 + d^5 + 10d^2 + 10d^3 - e_1^3 + 10\alpha_1 d^2 + 6\delta_1 d^2 - 3e_1^2 - 3de_1^2 - 3d^2 e_1^2 \\ &\quad + 6d^2 e_1 + 6d^2 \delta_2 + 6d^2 e_2 + 6d^2 \alpha_2 - e_1^2 \alpha_2 + 6d^2 e_3 + 6d^2 r - e_1^2 \delta_2 - e_1^2 r > 0 \end{aligned}$$

由上式可知  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 > 0$ 。当  $R_0 > 1$  时, 满足以下条件

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & k_1 k_2 > k_3; \quad \text{(ii)} \quad k_1 k_4 > k_5; \quad \text{(iii)} \quad k_3 \left( k_2 - \frac{k_3}{k_1} \right) > k_1 \left( k_4 - \frac{k_5}{k_1} \right); \\ \text{(iv)} \quad & \left( k_3 - \frac{k_4 - \frac{k_5}{k_1}}{k_2 - \frac{k_3}{k_1}} k_1 \right) \left( k_4 - \frac{k_5}{k_1} \right) > k_5 \left( k_2 - \frac{k_3}{k_1} \right). \end{aligned}$$

则无病平衡点处的 Jacobian 矩阵的七个特征值均有负实部。通过 Hurwitz 判据得到系统的无病平衡点  $X_0$  在可行域  $\Omega$  内是局部渐近稳定的。

#### 4.2. 地方病平衡点稳定性

定理 2: 当  $R_0 > 1$  时, 系统的地方病平衡点  $X_1$  在  $\Omega$  内是局部渐近稳定的, 当  $R_0 < 1$  时不稳定。

证: 在无病平衡点处, 系统的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{X_1} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - d - e_1 & \alpha_2 & 0 & -\beta S_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r - d & \beta S_1 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -\delta_1 - \delta_2 - d & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & -d & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_2 - e_3 - d & 0 \\ 0 & 0 & m & m & 0 & 0 & \varphi \end{pmatrix}$$

矩阵  $J|_{X_1}$  的特征方程为

$$(\lambda + \varphi)(\lambda + d)(\lambda^5 + n_1 \lambda^4 + n_2 \lambda^3 + n_3 \lambda^2 + n_4 \lambda + n_5) = 0$$

显然得到  $\lambda_1 = -\varphi$ ,  $\lambda_2 = -d$ 。其中计算得到

$$\begin{aligned} n_1 &= A + B + C + 2d + \alpha_2 + r > 0 \\ n_2 &= d^2 + B(A + C) + AC + (A + B + C)(2d + \alpha_2 + r) + \alpha_2(d + r - \alpha_1) + r(d - \beta S_1) > 0 \\ n_3 &= (A + B + C)(d^2 + dr + \alpha_2 r) + (B(A + C) + AC)(2d + \alpha_2 + r) + \alpha_2(d - \alpha_1)(B + C) \\ &\quad - \beta S_1 r(A + C + r + d) - \alpha_1 \alpha_2(r + d) - \beta S_1 e_1 e_3 + AC(\alpha_2 d + BC) > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
n_4 &= (B(A+C) + AC)(d^2 + dr + \alpha_2 r + \alpha_2 d) + \alpha_1 \alpha_2 (r-d) + \beta S_1 r(A+C)(d - \alpha_2) \\
&\quad + ABC(2d + \alpha_2 + r) + \beta S_1 r(\alpha_1 \alpha_2 - e_1 e_3 - e_1 e_2 - AC) + \beta S_1 e_1 e_3 (\alpha_2 - 2d) - \alpha_1 \alpha_2 BC > 0 \\
n_5 &= ABC(d^2 + dr + \alpha_2 r + \alpha_2 d) - BC \alpha_1 \alpha_2 (r+d) - \beta S_1 (\alpha_2 + d)(ACr + e_1 e_3 d) \\
&\quad + \beta S_1 r(\alpha_1 \alpha_2 C - e_1 (\alpha_2 + d)(e_2 + e_3)) > 0 \\
A &= \alpha_1 + d + e_1, \quad B = \delta_1 + \delta_2 + d, \quad C = e_2 + e_3 + d
\end{aligned}$$

由上式可知  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 > 0$ 。当  $R_0 > 1$  时, 满足以下条件

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } n_1 n_2 > n_3; \quad \text{(ii) } n_1 n_4 > n_5; \quad \text{(iii) } n_3 \left( n_2 - \frac{n_3}{n_1} \right) > n_1 \left( n_4 - \frac{n_5}{n_1} \right); \\
&\text{(iv) } \left( n_3 - \frac{n_4 - \frac{n_5}{n_1}}{n_1} n_1 \right) \left( n_4 - \frac{n_5}{n_1} \right) > n_5 \left( n_2 - \frac{n_3}{n_1} \right).
\end{aligned}$$

则地方病平衡点处的 Jacobian 矩阵的七个特征值均有负实部。通过 Hurwitz 判据得到系统的地方病平衡点  $X_1$  在可行域  $\Omega$  内是局部渐近稳定的。

## 5. 总结

研究传染病模型具有多方面的现实意义, 尤其是在流行病学、公共卫生和医学领域:

1) 预测疾病传播趋势: 传染病模型可以帮助预测疾病在人群中的传播趋势, 包括感染人数、疫情爆发时间和地点等, 为政府和卫生部门制定相应的防控策略提供科学依据。2) 评估干预措施效果: 通过模拟不同的干预措施(如隔离、口罩佩戴、疫苗接种等), 可以评估这些措施对疫情传播的影响, 从而指导决策者采取最有效的防控措施。3) 优化资源分配: 传染病模型可以帮助优化医疗资源的分配, 包括病床、医护人员和医疗设备等, 以应对疫情期间可能出现的患者激增情况。4) 研究疾病传播机制: 通过建立传染病模型, 可以深入研究疾病的传播机制、潜伏期、传播途径等重要参数, 有助于更好地理解疾病的发生和传播规律。5) 制定应对策略: 传染病模型的研究结果可以为制定更有效的疫情应对策略提供科学依据, 包括早期诊断、密切接触者追踪、社交隔离等措施。6) 预警和监测: 建立传染病模型可以帮助建立疾病预警系统, 及时监测疫情变化, 提高对突发传染病的应对能力。本文分析了一类带有环境病毒量和疫苗影响的 SLEIRVW 传染病动力学模型, 不仅考虑了疫苗对系统的影响, 还将考虑了隔离仓室以及潜伏期人群, 计算得到了模型的基本再生数  $R_0$ , 并证明了当  $R_0 < 1$  时, 系统的无病平衡点  $X_0$  在  $\Omega$  内是局部渐近稳定的, 当  $R_0 > 1$  时, 系统的地方病平衡点  $X_1$  在  $\Omega$  内是局部渐近稳定的。从基本再生数的式子中可以看出降低接触率以及提高疫苗接种效果能使得基本再生数  $R_0$  减小, 即能够有效防治该类传染病, 这也为合理防控提供了建议。当然后续还要继续研究, 通过最优控制策略和数值模拟, 通过现实数据进行拟合与验证, 以保证模型的真实性以及能更好的运用。总体来说, 研究传染病模型对于预测和控制疾病传播、保障公众健康、优化医疗资源分配等方面具有重要的现实意义, 可以有效应对传染病疫情带来的挑战。

## 参考文献

- [1] Kerendrick, W.O. and McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **115**, 700-721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- [2] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1932) Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics. II.—The

- Problem of Endemicity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **138**, 55-83. <https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0171>
- [3] Hethcote, H.W. (1994) A Thousand and One Epidemic Models. In: Levin, S.A., Ed., *Frontiers in Mathematical Biology. Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 100, Springer, Berlin, 504-515. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-50124-1\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-642-50124-1_29)
- [4] Hethcote, H.W. (2000) The Mathematics of Infectious Disease. *SIAM Review*, **42**, 599-653. <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>
- [5] Li, M.-T., Sun, G.-Q., Zhang, J., et al. (2020) Analysis of COVID-19 Transmission in Shanxi Province with Discrete Time Imported Cases. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **17**, 3710-3720. <https://doi.org/10.3934/mbe.2020208>
- [6] Chang, X.H., Liu, M.X., Jin, Z., et al. (2020) Studying on the Impact of Media Coverage on the Spread of COVID-19 in Hubei Province, China. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **17**, 3147-3159. <https://doi.org/10.3934/mbe.2020178>
- [7] 张菊平, 李云, 姚美萍, 等. 武汉市 COVID-19 疫情与易感人群软隔离强度关系分析[J]. 应用数学学报, 2020, 43(2): 162-173.
- [8] 董闪闪. EV71 手足口病模型的研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2018.
- [9] 黄森忠, 彭志行, 靳祯. 新型冠状病毒肺炎疫情防控策略研究: 效率评估及建议[J]. 中国科学: 数学, 2020, 50(6): 885-898.
- [10] 郭尊光, 李明涛, 常利利, 等. 基于反应扩散方程研究新型冠状病毒肺炎在武汉早期传播特征[J]. 工程数学学报, 2020, 37(4): 391-402.
- [11] 魏凤英, 王金杰, 徐铄明, 等. 全球新型冠状病毒肺炎疫情发展趋势预测[J]. 疾病监测, 2020, 35(6): 467-472.
- [12] Gumel, A.B., Iboi, E.A., Ngonghala, C.N., et al. (2020) A Primer on Using Mathematics to Understand COVID-19 Dynamics: Modeling, Analysis and Simulations. *Infectious Disease Modelling*, **6**, 148-168. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2020.11.005>
- [13] Mohsen, A.A., Al-Husseiny, H.F., Hattaf, K., et al. (2021) A Mathematical Model for the Dynamics of COVID-19 Pandemic Involving the Infective Immigrants. *Iraqi Journal of Science*, **62**, 295-307. <https://doi.org/10.24996/ijis.2021.62.1.28>
- [14] Kamara, A.A., Mouanguissa, L.N. and Barasa, G.O. (2021) Mathematical Modelling of the COVID-19 Pandemic with Demographic Effects. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **29**, Article No. 8. <https://doi.org/10.1186/s42787-021-00118-7>
- [15] Zamir, M., Shah, K., Nadeem, F., et al. (2021) Threshold Conditions for Global Stability of Disease Free State of COVID-19. *Results in Physics*, **21**, Article 103784. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103784>
- [16] Van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- [17] Foy, B.H., Wahl, B., Mehta, K., et al. (2021) Comparing COVID-19 Vaccine Allocation Strategies in India: A Mathematical Modelling Study. *International Journal of Infectious Diseases*, **103**, 431-438. <https://doi.org/10.1016/j.ijid.2020.12.075>
- [18] Shen, M., Zu, J., Fairley, C.K., et al. (2021) Projected COVID-19 Epidemic in the United States in the Context of the Effectiveness of a Potential Vaccine and Implications for Social Distancing and Face Mask Use. *Vaccine*, **39**, 2295-2302. <https://doi.org/10.1016/j.vaccine.2021.02.056>
- [19] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [20] 崔玉美, 陈姗姗, 傅新楚. 几类传染病模型中基本再生数的计算[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2017, 14(4): 14-31.
- [21] Sanjoy, B., Kumar, R.P., et al. (2022) Preventive Control Strategy on Second Wave of Covid-19 Pandemic Model Incorporating Lock-Down Effect. *Alexandria Engineering Journal*, **61**, 7265-7276. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.12.066>