Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 315-323
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145188

基于特殊幂级数的双曲完备极小曲面研究

邵　煜

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年4月3日；录用日期：2024年5月6日；发布日期：2024年5月30日

摘　要

在双曲完备极小曲面及Hadamard缺项幂级数的研究背景下，以Brito构造$\mathbb{R}^3$中位于两个平行平面间完备极小曲面族的方法为基础，利用Holder不等式、Cauchy-Schwarz不等式对拆分成多项的$|C_k|$进行放缩，比较不同不等式的放缩效果，使得$|C_k|$尽可能小，从而使得$h(z)$适用条件扩大，且找到在某个范围条件下的双曲完备极小曲面族，丰富相关实例。

关键词

完备极小曲面，Hadamard缺项幂级数，发散曲线，Holder不等式

Research on Hyperbolic Complete Minimal Surfaces Based on Special Power Series

Yu Shao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 3rd, 2024; accepted: May 6th, 2024; published: May 30th, 2024

Abstract

In the context of the study on hyperbolic complete minimal surfaces and power series with Hadamard gaps, based on the method of Brito's construction of a family of complete minimal surfaces between two parallel planes in $\mathbb{R}^3$, we use Holder inequality and Cauchy-Schwarz inequality to scale the $|C_k|$ which is splited into multiple terms, and compare the scale effects of the different inequalities to make the $|C_k|$ as small as possible, to make the applicable conditions of $h(z)$ wider. And families of hyperbolic complete minimal surfaces are found under a range of conditions, enriching the relevant examples.

文章引用: 邵煜. 基于特殊幂级数的双曲完备极小曲面研究[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 315-323.
DOI: 10.12677/pm.2024.145188

Keywords

Complete Minimal Surface, Power Series with Hadamard Gaps, Divergent Curves, Holder Inequality

1. 引言

简单来说，极小曲面就是平均曲率处处为 0 的曲面，它是微分几何中的重要课题，其丰富的理论知识也推动着复分析等数学分支的发展进步。通过对极小曲面例子的研究，数学家们通过研究发现在 $\mathbb{R}^3$ 中没有紧且无边界的极小曲面，完备的极小曲面就是这类极小曲面中的重要内容。

Hadamard 缺项幂级数是一种具有广泛应用前景的数学工具，可以用于研究完备极小曲面的性质。这种缺项幂级数具有独特的性质，如可以在极限情况下收敛到某一函数并具有缺项性。

在极小曲面的蓬勃发展中，1954 年，Calabi [1]提出了两个猜想，他的两个猜想是完备极小曲面研究过程中的一个深刻问题，其猜想的复杂性和特殊性，将数学与物理学中的许多问题联系到一起，吸引着众多数学家不断进行探究，为极小曲面的理论发展注入了源源不断的动力。

1980 年，F. Xavier [2]和 L.M. Jorge [2]利用 Runge 逼近定理证明了 $\mathbb{R}^3$ 中存在非平坦的完备极小曲面完全包含在两个平行的平面之间，从而否定了其猜想 1。1996 年，Nadirashvili [3]利用 Runge 逼近定理否定了其猜想 2，即存在极小浸入到 $\mathbb{R}^3$ 中单位球的具有负 Gauss 曲率的完备极小曲面。

然而他们的证明只是表明存在相应的完备极小曲面，但是他们的证明过程并没有给出具体的构造此类极小曲面的方法，并且相应的双曲完备极小曲面例子也非常少。

因此 1992 年，Brito [4]首次具体使用了一些具有 Hadamard 间隙的特殊幂级数构造了 $\mathbb{R}^3$ 中位于两个平行平面间的完备极小曲面，从而给出了 Calabi [1]猜想 1 不成立的具体的反例，有如下定理：

定理 1 [4] 若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，$j=1,2,\cdots$，且满足下列条件：

(1) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ 收敛；

(2) $\lim_{j\to\infty}|a_j|\min\{(n_j/n_{j-1}),(n_{j+1}/n_j)\}=\infty$；

(3) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的任意发散曲线 γ，有 $\int_\gamma |h'(z)|^2|\mathrm{d}z|=\infty$。

令 Weierstrass 表示[5] [6]中的 $f=1$ 且 $g=h'$，即可得到 $\mathbb{R}^3$ 中两个平行平面间的完备极小曲面族。

2022 年，张建肖[7]在 Brito 的基础上减弱条件(2)，限定 n_j 后项与前项的比值，并受孙道椿[8]证明方法的启发，扩大了条件(2)的范围，得到定理 2。

定理 2 [7] 若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，$j=1,2,\cdots$，且满足下列条件：

(1) $\left|\dfrac{a_{j+1}}{a_j}\right| \le \eta < 1,\quad |a_j| \ne 0$；

(2) 对于充分大的 $k \in \mathbb{Z}^+$，满足 $\sum_{j=1}^{k-1} |a_j| n_j < \dfrac{1}{4\mathrm{e}} |a_k| n_k$ 且 $\dfrac{q_k}{2} - \ln q_k \ge 1 - \ln \dfrac{1-\eta}{8\eta}$，其中 $q_k = \dfrac{n_{k+1}}{n_k}$ 且 $q_k > 2$；

(3) $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的任意发散曲线 γ，有 $\int_\gamma |h'(z)|^2 |\mathrm{d}z| = \infty$。

本文在此基础上进一步细化探究，利用两个不等式比较放缩优劣，针对具体条件作出适当调整，减弱条件的局限性，构造更多满足条件的完备极小曲面，给出具体例子说明，得到定理 3。

定理 3 若 $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z \in \mathbb{C}$，$j \in \mathbb{Z}^+$，$\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \ge q > 1$，且 $h(z)$ 满足下列条件：

(1) $\left|\dfrac{a_{j+1}}{a_j}\right| \le \eta < 1,\quad |a_j| \ne 0$；

(2)对于充分大的 $k \in \mathbb{Z}^+$，满足

$$\sum_{j=1}^{k-1} |a_j| n_j < \frac{1}{4\mathrm{e}} |a_k| n_k,\quad 1 < q < 6,\quad \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \le \frac{1}{17\mathrm{e}q} \sqrt{\frac{\left(q^2-q\right)\mathrm{e}^{q^3}}{\left(q^6-q^5+q^3+1\right)+\left(q^2-q\right)\left(\mathrm{e}^{q^3-q}+q^2\mathrm{e}^{q^3-q^2}\right)}};$$

(3) $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的任意发散曲线 γ，有 $\int_\gamma |h'(z)|^2 |\mathrm{d}z| = \infty$。

2. 相关定义

设 $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，本文我们讨论 $\mathbb{D}$ 参数化下的完备极小曲面。

定义 1 [4] 设 $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ 是一个收敛半径为 1 的幂级数，其中 $z \in \mathbb{C}$，$j = 1, 2, \cdots$，并且有 $\dfrac{n_{j+1}}{n_j} \ge q > 1$，则称 $h(z)$ 为 Hadamard 缺项幂级数。

定义 2 [5] [9] 称 $k_1 = \max_{|v|=1} k_v$ 和 $k_2 = \min_{|v|=1} k_v$ 为曲面 Σ 的主曲率，$K = k_1 k_2$ 和 $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ 分别为曲面 Σ 的 Gauss 曲率和平均曲率。

定义 3 [5] $\mathbb{R}^3$ 中平均曲率 $H \equiv 0$ 的曲面称为极小曲面。

定义 4 [5] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开子集，如果对 Ω 的任意紧子集 E，存在 $t_0 < a$，使得 $\gamma(t) \notin E, \forall t \in (t_0, a)$ (即 $\gamma(t) \to \partial\Omega$)。

定义 5 [5] 设 $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是一个浸入，且 Ω 具有诱导度量，即 $\|v\|_\Omega = \|I_* v\|_{\mathbb{R}^3}$，这里 $I_* : T_z(\Omega) \to T_{I(z)}(\mathbb{R}^3)$ 是浸入 I 的切映射。如果任意光滑的发散曲线 $\gamma : [0, a] \to \Omega$ 有无限长度(相对于诱导度量)，那么称浸入 $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是完备的。

定义 6 [5] 设 $\Sigma : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 是单连通的极小曲面，由黎曼映射定理[10]，可以设 Ω 共形于 $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ 或 $\Omega = \mathbb{C}$，如果 Ω 共形于 $\mathbb{D}$，称 Σ 为双曲的，如果 $\Omega = \mathbb{C}$，称 Σ 为抛物的。

3. 定理 3 证明

对任意的 $k \in N$，令

$$R_k = \left\{ z \in \mathbb{D} : 1 - \frac{1}{n_k} \le |z| \le 1 - \frac{1}{2n_k} \right\}, \tag{1}$$

每一个 R_k 是半径为 $\frac{1}{2n_k}$ 的圆环，当 k 充分大时，R_k 互不相交。

由

$$|h'(z)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j z^{n_j - 1} \right| \ge \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j z^{n_j} \right|, \ z \in \mathbb{D},$$

对任意固定的 $k \in N$，令 $A_k = a_k n_k z^{n_k}$，$B_k = \sum_{j=1}^{k-1} a_j n_j z^{n_j}$，$C_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j n_j z^{n_j}$，

则有

$$|h'(z)| \ge \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j z^{n_j} \right| = |A_k| - |B_k| - |C_k|, \quad z \in \mathbb{D}, \quad k \in N \tag{2}$$

现假设 k 充分大，

当 $z \in R_k$ 时，由(1)，有 $|A_k| \ge |a_k| n_k \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$。

因为 $\lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = \frac{1}{\mathrm{e}}$，所以存在 $k_1 \in N$，$k \ge k_1$，有

$$|A_k| \ge \frac{1}{2\mathrm{e}} |a_k| n_k, \quad k \ge k_1, \quad z \in R_k. \tag{3}$$

另一方面，由定理 3 中的条件(2)，存在 $k_2 \in N$，$k_2 \ge k_1$，有

$$|B_k| \le \sum_{j=1}^{k-1} |a_j| n_j < \frac{1}{4\mathrm{e}} |a_k| n_k, \quad k \ge k_2, \quad z \in R_k \tag{4}$$

当 $0 < x < 1$ 时，$\ln(1-x) < -x$，所以当 $z \in R_k$ 时，

$$\begin{aligned} |C_k| &= \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| n_j z^{n_j} \\ &\le \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| n_j \left(1 - \frac{1}{2n_k}\right)^{n_j} = \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| n_j \mathrm{e}^{n_j \ln\left(1 - \frac{1}{2n_k}\right)} \\ &\le \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}} \end{aligned}$$

由定理 3 中条件(1)中的 $\left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| \le \eta < 1$，得到

$$|C_k| \le \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}} \le |a_k| \sum_{j=k+1}^{\infty} \eta^{j-k} n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}}$$

再由 Holer 不等式[11]，有

$$\left|C_k\right| \le \left|a_k\right| \sqrt[\alpha]{\sum_{j=k+1}^{\infty}\left(\eta^{j-k}\right)^{\alpha}} \sqrt[\beta]{\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^{\beta} e^{-\frac{\beta n_j}{2n_k}}}$$

$$=\left|a_k\right| \frac{\eta}{\sqrt[\alpha]{1-\eta^{\alpha}}} \sqrt[\beta]{\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^{\beta} e^{-\frac{\beta n_j}{2n_k}}} \quad \left(\text{其中}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\right)$$

对 $\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^{\beta} e^{-\frac{\beta n_j}{2n_k}}$ 进行放缩，有

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^{\beta} e^{-\frac{\beta n_j}{2n_k}} = n_{k+1}^{\beta} e^{-\frac{\beta n_{k+1}}{2n_k}} + n_{k+2}^{\beta} e^{-\frac{\beta n_{k+2}}{2n_k}} + \sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^{\beta} e^{-\frac{\beta n_j}{2n_k}}$$

可以发现当 $0<\beta\le 2$ 时，$x^{\beta-1}e^{-\frac{\beta x}{2n_k}}$ 在 $x>n_k$ 时单调递减；当 $\beta>2$，$q>\frac{2\beta-3}{\beta}$ 时，$x^{\beta-1}e^{-\frac{\beta x}{2n_k}}$ 在 $x\ge n_k$ 时单调递减。此处假设 $\beta=3$，$\alpha=\frac{3}{2}$，则有

$$\left|C_k\right| \le \left|a_k\right| \frac{\eta}{\sqrt[\frac{3}{2}]{1-\eta^{\frac{3}{2}}}} \sqrt[3]{\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^{3} e^{-\frac{3n_j}{2n_k}}}$$

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^{3} e^{-\frac{3n_j}{2n_k}} = n_{k+1}^{3} e^{-\frac{3n_{k+1}}{2n_k}} + n_{k+2}^{3} e^{-\frac{3n_{k+2}}{2n_k}} + \sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^{3} e^{-\frac{3n_j}{2n_k}}$$

对 $j=k+1,k+2,\cdots$，可以得到

$$\int_{n_{j-1}}^{n_j} x^2 e^{-\frac{3x}{2n_k}} dx \ge n_j^2 e^{-\frac{3n_j}{2n_k}}\left(n_j-n_{j-1}\right)$$

$$=n_j^3 e^{-\frac{3n_j}{2n_k}}\left(1-\frac{n_{j-1}}{n_j}\right) \ge n_j^3 e^{-\frac{3n_j}{2n_k}}\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

所以

$$\sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^{3} e^{-\frac{3n_j}{2n_k}} \le \frac{q}{q-1}\int_{n_{k+2}}^{\infty} x^2 e^{-\frac{3x}{2n_k}} dx$$

$$\int_{n_{k+2}}^{\infty} x^2 e^{-\frac{3x}{2n_k}} dx = \left(-\frac{2n_k}{3}\right)\left(x^2 e^{-\frac{3x}{2n_k}}\Bigg|_{n_{k+2}}^{+\infty} - 2\int_{n_{k+2}}^{\infty} x e^{-\frac{3x}{2n_k}} dx\right)$$

$$=\left(-\frac{2n_k}{3}\right)\left[-n_{k+2}^2 e^{-\frac{3n_{k+2}}{2n_k}} + \frac{4n_k}{3}\left(x e^{-\frac{3x}{2n_k}}\Bigg|_{n_{k+2}}^{+\infty} - \int_{n_{k+2}}^{\infty} e^{-\frac{3x}{2n_k}} dx\right)\right]$$

$$=n_{k+2}^3\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{n_k}{n_{k+2}}+\frac{8}{9}\cdot\frac{n_k^2}{n_{k+2}^2}+\frac{16}{27}\cdot\frac{n_k^3}{n_{k+2}^3}\right)e^{-\frac{3n_{k+2}}{2n_k}}$$

$$\le n_{k+2}^3\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{q^2}+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{q^4}+\frac{16}{27}\cdot\frac{1}{q^6}\right)e^{-\frac{3}{2}q^2}$$

因此

$$\sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^3 \mathrm{e}^{-\frac{3n_j}{2n_k}} \le \frac{1}{q-1}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{q}+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{q^3}+\frac{16}{27}\cdot\frac{1}{q^5}\right) n_{k+2}^3 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}q^2}$$

此时

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^3 \mathrm{e}^{-\frac{3n_j}{2n_k}} \le \frac{1}{q^3} n_{k+2}^3 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}q} + \frac{27q^6-27q^5+18q^4+24q^2+16}{27q^5(q-1)} n_{k+2}^3 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}q^2}$$

故有

$$|C_k| \le |a_k| n_{k+2} \frac{\eta}{\sqrt[\frac{3}{2}]{1-\eta^{\frac{3}{2}}}} \frac{1}{q} \sqrt[3]{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}q} + \frac{27q^6-27q^5+18q^4+24q^2+16}{27q^2(q-1)} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}q^2}}$$

当 $\frac{\eta}{\sqrt[\frac{3}{2}]{1-\eta^{\frac{3}{2}}}} \le \frac{1}{16q} \mathrm{e}^{\frac{q^2}{2}-1} \sqrt[3]{\frac{27q^2(q-1)}{\left(27q^6-27q^5+18q^4+24q^2+16\right)+27q^2(q-1)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(q^2-q)}}}$ 时，

$$|C_k| \le \frac{1}{16\mathrm{e}} |a_k| n_k \tag{5}$$

由(2)、(3)、(4)、(5)可得

存在 $k_2 \in N$， $k_2 \ge k_1$， 使得

$$|h'(z)| \ge \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)\frac{1}{\mathrm{e}} |a_k| n_k = \frac{3}{16} |a_k| n_k$$

取单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的发散曲线 γ， 对任意的 $k \ge l$， $l \in N$， γ 必定穿过 R_k， 则

$$\int_\gamma |h'(z)|^2 |\mathrm{d}z| \ge \sum_{k=l}^{\infty} \int_{\gamma\cap R_k} |h'(z)|^2 |\mathrm{d}z| \ge \sum_{k=l}^{\infty} \left(\frac{3}{16}|a_k| n_k\right)^2 \frac{1}{2n_k}$$
$$> \sum_{k=l}^{\infty} \frac{9}{512} |a_k|^2 n_k = \infty.$$

从上述证明过程中发现， $\beta = 2$ 是一个特殊值，故取 Holder 不等式中的 $\alpha = 2$， $\beta = 2$， 即利用 Cauchy-Schwarz [11]不等式进行放缩得到

$$|C_k| \le |a_k| \sqrt{\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\eta^{j-k}\right)^2\right) \cdot \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}\right)} = |a_k| \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sqrt{\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}}$$

下面对 $\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}$ 进行放缩，

当提出 $k+1$ 项和 $k+2$ 项时，有

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} = n_{k+1}^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}} + n_{k+2}^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+2}}{n_k}} + \sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}$$

因为当 $x > n_k$ 时， 函数 $x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}$ 是单调递减函数，故当 $j = k+1, k+2, \cdots$ 时，

$$\int_{n_{j-1}}^{n_j} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}} \mathrm{d}x \ge n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \left(n_j - n_{j-1}\right) = n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \left(1-\frac{n_{j-1}}{n_j}\right) \ge n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \left(1-\frac{1}{q}\right)$$

则有

$$n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q}{q-1}\int_{n_{j-1}}^{n_j} x e^{-\frac{x}{n_k}} dx$$

故

$$\sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q}{q-1}\int_{n_{k+2}}^{\infty} x e^{-\frac{x}{n_k}} dx$$

$$\int_{n_{k+2}}^{\infty} x e^{-\frac{x}{n_k}} dx = \left(n_k n_{k+2} + n_k^2\right) e^{-\frac{n_{k+2}}{n_k}} = n_{k+2}^2 \left(\frac{n_{k+1}}{n_{k+2}} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}} + \left(\frac{n_{k+1}}{n_{k+2}} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}}\right)^2\right) e^{-\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \frac{n_{k+2}}{n_{k+1}}} \le n_{k+2}^2 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4}\right) e^{-q^2}$$

因此

$$\sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q^2+1}{q^3(q-1)} n_{k+2}^2 e^{-q^2}$$

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}} \le n_{k+2}^2 \left(\frac{1}{q^2} e^{-q} + \frac{q^4-q^3+q^2+1}{q^3(q-1)} \cdot e^{-q^2}\right)$$

$$|C_k| \le |a_k| n_{k+2} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{q} \sqrt{e^{-q} + \frac{q^4-q^3+q^2+1}{q^2-q} e^{-q^2}} \tag{6}$$

再由条件 $\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \le \frac{1}{16q} e^{\frac{q^2}{2}-1} \sqrt{\frac{q^2-q}{\left(q^4-q^3+q^2+1\right)+\left(q^2-q\right)e^{q^2-q}}}$

可以得到

$$|C_k| \le \frac{1}{16e} |a_k| n_k$$

当提出前三项时，有

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}} = n_{k+1}^2 e^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}} + n_{k+2}^2 e^{-\frac{n_{k+2}}{n_k}} + n_{k+3}^2 e^{-\frac{n_{k+3}}{n_k}} + \sum_{j=k+4}^{\infty} n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}}$$

同样可以得到

$$\sum_{j=k+4}^{\infty} n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q}{q-1}\int_{n_{k+3}}^{\infty} x e^{-\frac{x}{n_k}} dx$$

$$\begin{aligned}\int_{n_{k+3}}^{\infty} x e^{-\frac{x}{n_k}} dx &= \left(n_k n_{k+3} + n_k^2\right) e^{-\frac{n_{k+3}}{n_k}} \\ &= n_{k+3}^2 \left(\frac{n_{k+2}}{n_{k+3}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_{k+2}} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}} + \left(\frac{n_{k+2}}{n_{k+3}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_{k+2}} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}}\right)^2\right) e^{-\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \frac{n_{k+2}}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+3}}{n_{k+2}}} \\ &\le n_{k+3}^2 \left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^6}\right) e^{-q^3}\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{j=k+4}^{\infty} n_j^2 e^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q^3+1}{q^5(q-1)} n_{k+3}^2 e^{-q^3}$$

DOI: 10.12677/pm.2024.145188

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le n_{k+3}^2 \frac{1}{q^4}\left(\mathrm{e}^{-q}+q^2\mathrm{e}^{-q^2}+\frac{q^6-q^5+q^3+1}{q^2-q}\cdot\mathrm{e}^{-q^3}\right)$$

$$|C_k| \le |a_k| n_{k+3} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{q^2}\sqrt{\mathrm{e}^{-q}+q^2\mathrm{e}^{-q^2}+\frac{q^6-q^5+q^3+1}{q^2-q}\cdot\mathrm{e}^{-q^3}} \tag{7}$$

因为当$1<q<6$时，有

$$\sqrt{\mathrm{e}^{-q}+q^2\mathrm{e}^{-q^2}+\frac{q^6-q^5+q^3+1}{q^2-q}\cdot\mathrm{e}^{-q^3}} \text{ 小于 } \sqrt{\mathrm{e}^{-q}+\frac{q^4-q^3+q^2+1}{q^2-q}\mathrm{e}^{-q^2}},$$

所以对比(6)和(7)式可知(7)式的结果放缩程度更优，再由定理 3 中条件(2)中的 $\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \le \frac{1}{17\mathrm{e}q}\sqrt{\frac{\left(q^2-q\right)\mathrm{e}^{q^3}}{\left(q^6-q^5+q^3+1\right)+\left(q^2-q\right)\left(\mathrm{e}^{q^3-q}+q^2\mathrm{e}^{q^3-q^2}\right)}}$ 得到

$$|C_k| \le \frac{1}{17\mathrm{e}}|a_k| n_k \tag{8}$$

由(2)、(3)、(4)、(8)可得

存在$k_2 \in N$，$k_2 \ge k_1$，使得

$$|h'(z)| \ge \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{17}\right)\frac{1}{\mathrm{e}}|a_k| n_k = \frac{13}{68}|a_k| n_k$$

取单位圆盘$\mathbb{D}$内的发散曲线γ，对任意的$k \ge l$，$l \in N$，γ必定穿过R_k，则

$$\int_\gamma |h'(z)|^2 |\mathrm{d}z| \ge \sum_{k=l}^{\infty}\int_{\gamma\cap R_k}|h'(z)|^2|\mathrm{d}z| \ge \sum_{k=l}^{\infty}\left(\frac{13}{68}|a_k| n_k\right)^2 \frac{1}{2n_k}$$
$$> \sum_{k=l}^{\infty}\frac{169}{9248}|a_k|^2 n_k = \infty.$$

在上述定理的证明过程中，本文给出不断精确的条件，且发现在同等程度的放缩下，取$\alpha=2$，$\beta=2$的 Holder 不等式(即 Cauchy-Schwarz 不等式)放缩效果明显优于取$\alpha=\frac{3}{2}$，$\beta=3$的 Holder 不等式。同时在证明过程中，由定理给出的条件(2)可以使得$|C_k|$进一步缩小到小于$\frac{1}{17\mathrm{e}}|a_k| n_k$。

4. 举例说明

设$h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$，$z\in\mathbb{C}$。

例子 1 说明：当$a_j=0.9^j$，$n_j=16^j$时，此时$q=16$，$\eta=0.9$。显然此时该例子不满足定理 2 中的条件(2)，但是满足文中条件$\frac{\eta}{\sqrt[\frac{3}{2}]{1-\eta^{\frac{3}{2}}}} \le \frac{1}{16q}\mathrm{e}^{\frac{q^2}{2}-1}\sqrt[3]{\frac{27q^2(q-1)}{\left(27q^6-27q^5+18q^4+24q^2+16\right)+27q^2(q-1)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\left(q^2-q\right)}}}$，且此时$\sum_{j=1}^{k-1}|a_j| n_j = \sum_{j=1}^{k-1}\left|0.9^j\right|16^j \le \frac{1}{0.9\times16-1}|a_k| n_k < \frac{1}{2\mathrm{e}}|a_k| n_k$。

例子 2 说明：当$a_j=0.6^j$，$n_j=12^j$时，此时$q=12$，$\eta=0.6$。易得此例子满足证明过程中

$\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \le \frac{1}{16q} e^{\frac{q^2}{2}-1} \sqrt{\frac{q^2-q}{(q^4-q^3+q^2+1)+(q^2-q)e^{q^2-q}}}$，但是不满足例子 1 所满足的条件。所以在证明过程中同等程度的放缩下得到了更加精细的结果。

例子 3 说明：在此基础上，本文发现，当$1.5<q<2.15$时，我们都能找到相应的$0<\eta<1$使得a_j，n_j满足定理 3，例如$a_j=0.023^j$，$n_j=2^j$时，$q=2$，$\eta=0.023$。此时该例子显然满足$1<q<6$，且$\sum_{j=1}^{k-1}|a_j|n_j=\sum_{j=1}^{k-1}|0.023^j|2^j<\frac{1}{4e}|a_k|n_k$，同时$q$，$\eta$满足

$\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \le \frac{1}{17eq} \sqrt{\frac{(q^2-q)e^{q^3}}{(q^6-q^5+q^3+1)+(q^2-q)\left(e^{q^3-q}+q^2e^{q^3-q^2}\right)}}$，又$\sum_{j=1}^{\infty}|0.023^j|^2 2^j$发散，此例子完全满足定理 3 的三个条件，但是此例子并不满足文中$\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \le \frac{1}{16q} e^{\frac{q^2}{2}-1} \sqrt{\frac{q^2-q}{(q^4-q^3+q^2+1)+(q^2-q)e^{q^2-q}}}$条件。

参考文献

[1] Calabi, E. (1966) Problems in Differential Geometry. *Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry*, Nippon Hyoron-Sha, Tokyo, 170.

[2] Jorge, L. and Xavier, F. (1980) A Complete Minimal Surface in $\mathbb{R}^3$ between Two Parallel Planes. *Annals of Mathematics*, **112**, 203-206. https://doi.org/10.2307/1971325

[3] Nadirashvili, N. (2001) An Application of Potential Analysis to Minimal Surfaces. *Moscow Mathematical Journal*, **1**, 601-604. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2001-1-4-601-604

[4] De Brito, F. (1992) Power Series with Hadamard Gaps and Hyperbolic Complete Minimal Surfaces. *Duke Mathematical Journal*, **68**, 297-300. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06812-8

[5] Xavier, F., 潮小李. 现代极小曲面讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[6] Kokubu, M. (1997) Weierstrass Representation for Minimal Surfaces in Hyperbolic Space. *Tohoku Mathematical Journal*, *Second Series*, **49**, 367-377. https://doi.org/10.2748/tmj/1178225110

[7] 张建肖, 刘晓俊. Hadamard 缺项幂级数及双曲完备极小曲面[J]. 上海理工大学学报, 2022, 44(4): 364-367.

[8] 孙道椿. 缺项及随机级数的边界性质[J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1991(1): 7-10.

[9] Barbosa, J. and Colares, A.G. (1986) Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1195. https://doi.org/10.1007/BFb0077105

[10] Osserman, R. (1969) A Survey of Minimal Surfaces. Van Nostrand-Reinhold, New York.

[11] Pinelis, I. (2015) On the Holder and Cauchy-Schwarz Inequalities. *The American Mathematical Monthly*, **122**, 593-595. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.6.593