Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 145-152
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145171

Farkas引理在张量结构下的讨论

宋　端

青岛大学数学与统计学院，山东　青岛

收稿日期：2024年3月21日；录用日期：2024年4月28日；发布日期：2024年5月24日

摘　要

Farkas引理在优化理论体系中具有十分重要的应用，张量是一种多维数组，在高维图像分析、超图聚类等方面具有重要的应用。本文研究张量结构下的Farkas引理，在张量的理论体系下对Farkas引理进行推广，通过引入非空闭凸集的概念及相关知识，利用点与闭凸集的分离定理，得到了张量结构下的Farkas引理。

关键词

Farkas引理，张量，非空闭凸集

Discussion of Farkas' Lemma in Tensor Structure

Duan Song

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Mar. 21st, 2024; accepted: Apr. 28th, 2024; published: May 24th, 2024

Abstract

Farkas' lemma holds significant importance in the system of optimization theory. Tensors, as multidimensional arrays, find crucial applications in fields such as high-dimensional image analysis and hypergraph clustering. This paper explores the Farkas lemma within the context of tensor structures, extending its application within tensor theoretical frameworks. By introducing the concept of non-empty closed convex sets and relevant knowledge, and utilizing the separation theorem of points and closed convex sets, resulting in the derivation of the Farkas lemma within tensor.

文章引用: 宋端. Farkas 引理在张量结构下的讨论[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 145-152.
DOI: 10.12677/pm.2024.145171

Keywords

Farkas' Lemma, Tensor, Nonempty Closed Convex Sets

1. 引言

Farkas 引理是优化理论中的一个基本引理，最早由匈牙利数学家 Julius Farkas 于 1902 年提出并发表了相关文献[1]，它是最优化方法中重要的基础工具之一，有助于分析问题的可行性、最优性，也可用于构建优化问题的对偶性，以推导原始问题的最优解。另外，Farkas 引理还可以证明 Karush-Kuhn-Tucker 定理[2]，为解决各类优化问题提供了有力的理论基础。近年来，也有一些学者研究了 Farkas 引理的推广及应用，王周宏[3]研究了 Farkas 引理对锥不等式的推广并给出了理论证明，钱金娥[4]研究了 Farkas 引理的各类等价形式并给出了相关证明。

张量是一种多维数组，是矩阵的一种高阶推广，同时也被称为超矩阵，张量具有方向和大小，可以进行加法、减法、乘法等运算[5]。张量在量子力学、流体力学、电磁学等物理学领域有着广泛的应用，它为各种抽象的物理学定义提供了简单的数学框架，在机器学习、深度学习、高维图像分析等计算机领域中，张量是存储和处理数据的基本数据结构，用于表示数据的输入、输出。随着对张量的深入研究，广大学者定义了各种结构的张量包括半正定张量[6]、R_0 张量、随机 R_0 张量[7]等，并研究了他们的性质以及应用。

在矩阵的理论体系下，Farkas 引理为解决各类优化问题建立了重要的理论基础，而在涉及张量理论的优化问题中，Farkas 引理没有得到广泛的应用，相关的研究也较为有限。为了丰富 Farkas 引理在张量理论中的应用，推动张量理论在优化问题中的发展，本文以 Farkas 引理为中心，结合张量理论的相关知识，将一般结构下的 Farkas 引理推广到了张量结构下的 Farkas 引理，利用张量与向量的乘积构建方程组并引入了嵌入集合及相关定义，证明了 $D=\left\{z \mid z=\mathcal{A}x^{m-1}, x\geq 0\right\}$ 为非空闭凸集，进而利用点与闭凸集的分离定理，完成了证明。

2. 预备知识

本节给出一般结构下的 Farkas 引理以及张量的相关定义。

定理 2.1 [8]设 $A\in R^{m\times n}$ 为 $m\times n$ 阶实矩阵，$b\in R^n$ 为非零向量，则下面两组方程：

(a) 存在 $x\in R^n$，使得 $Ax=b$，且 $x\geq 0$，

(b) 存在 $y\in R^m$，使得 $A^{T}y\leq 0$，$b^{T}y>0$，

有且仅有一组有解。

定义 2.1 若张量 $\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)_{n\times n\times\cdots\times n}\in R^{[m,n]}=R^{\overbrace{n\times n\times\cdots\times n}^{m}},$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 m 阶 n 维张量，$R^{[m,n]}$ 为 m 阶 n 维张量的集合。

定义 2.2 若张量 $\mathcal{A}$ 的项在相同索引的不同排列下是相同的，即

$$a_{i_1i_2i_3\cdots i_m}=a_{i_2i_1i_3\cdots i_m}=a_{i_3i_2i_1\cdots i_m}=\cdots=a_{i_mi_{m-1}i_{m-2}\cdots i_1},$$

则 $\mathcal{A}$ 为对称张量，记 $\mathrm{S}^{[m,n]}$ 为 m 阶 n 维对称张量的集合，则 $\mathcal{A}\in\mathrm{S}^{[m,n]}=\mathrm{S}^{n\times n\times\cdots\times n}$ 。

推论 2.1 对称张量 $\mathcal{A}$ 的基于任意维度下的转置仍然是对称张量 $\mathcal{A}$ 本身。

证明：根据定义 2.2 中对称张量 $\mathcal{A}$ 的性质，交换任意两个维度得到的项与原来的项仍相同。

定义 2.3 设张量 $\mathcal{A}\in\mathrm{R}^{[m,n]}$，向量 $x\in\mathrm{R}^n$，则

$\mathcal{A}x^{m-1}$ 表示 R^n 中的向量，即

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=\sum_{i_2,i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m},$$

其中 $i\in I_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i$ 表示 $\mathcal{A}x^{m-1}$ 这个向量的第 i 个分量。

$\mathcal{A}x^{m-2}$ 表示 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 中的矩阵，即

$$\left(\mathcal{A}x^{m-2}\right)_{ij}=\sum_{i_3,i_4\cdots i_m=1}^{n}a_{iji_3,\cdots,i_m}x_{i_3}x_{i_4}\cdots x_{i_m},$$

其中 $i,j\in I_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$\left(\mathcal{A}x^{m-2}\right)_{ij}$ 表示 $\mathcal{A}x^{m-2}$ 这个矩阵的第 i 行第 j 列的项。

$\mathcal{A}x$ 表示 $\mathrm{R}^{[m-1,n]}$ 中的 $m-1$ 阶 n 维张量，即

$$(\mathcal{A}x)_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}=\sum_{j=1}^{n}a_{i_1i_2\cdots i_{m-1}j}x_j,$$

其中 $i_1i_2\cdots i_{m-1}\in I_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 。

定义 2.4 设 $\mathcal{A}\in\mathrm{R}^{[m,n]}$，若任意的 $a_{i_1i_2\cdots i_m}\le 0$，则称 $\mathcal{A}\le 0$ 。

推论 2.2 若 $\mathcal{A}\in\mathrm{S}^{[m,n]}$，则 $\mathcal{A}x\in\mathrm{S}^{[m-1,n]}$ 。

证明：由定义 2.2 知，设 $j\in[n]$，则

$$a_{i_1i_2\cdots i_{m-1}j}=a_{i_2i_1\cdots i_{m-1}j}=\cdots=a_{i_{m-1}i_2\cdots i_{m-1}j}=a_{i_{m-1}i_{m-2}\cdots i_1j},$$

那么

$$\sum_{j=1}^{n}a_{i_1i_2\cdots i_{m-1}j}x_j=\sum_{j=1}^{n}a_{i_2i_1\cdots i_{m-1}j}x_j=\cdots=\sum_{j=1}^{n}a_{i_{m-2}i_2\cdots i_{m-1}j}x_j=\sum_{j=1}^{n}a_{i_{m-1}i_{m-2}\cdots i_1j}x_j,$$

即

$$(\mathcal{A}x)_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}=(\mathcal{A}x)_{i_2i_1\cdots i_{m-1}}=\cdots=(\mathcal{A}x)_{i_{m-2}i_2\cdots i_{m-1}}=(\mathcal{A}x)_{i_{m-1}i_{m-2}\cdots i_1},$$

由对称张量的性质知，$\mathcal{A}x$ 也是对称张量。

3. 张量结构下的 Farkas 引理

本节首先给出一些相关的定义，引理及推论。

定义 3.1 设 $D^*\subset\mathrm{R}^m$，$D\subset\mathrm{R}^n$，$m\le n$，若满足

$$\forall z\in D^*,\quad D=\left\{(z,0)\mid 0\in\mathrm{R}^{n-m}\right\},$$

则称 D 为 D^* 在 R^n 下的嵌入集合。

引理 3.1 设 $A\in\mathrm{R}^{m\times n}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $A\ne 0$，则 $D=\{z\mid z=Ax,x\ge 0\}$ 为无限集。

引理 3.2 设凸集 D 非空且非单点，则 D 为无限集。

推论 3.1 设 $\mathcal{A}\in S^{[m,n]}$ 为 m 阶 n 维对称张量且 $\mathcal{A}\ne 0$，则凸集 $D=\left\{z\mid z=\mathcal{A}x^{m-1},x\ge 0\right\}$ 为无限集。

证明：由 $\mathcal{A}\neq 0$ 易知恒有 $a_{k_1k_2\cdots k_s}\neq 0$，$k_s\in[n]$，取 s 个 n 维向量组成的单位正交向量组

$$x_1=\varepsilon_{k_1},x_2=\varepsilon_{k_2},\cdots,x_s=\varepsilon_{k_s},$$

存在 t_1,t_2，使得 $\mathcal{A}\varepsilon_{k_{t_1}}^{m-1}\neq\mathcal{A}\varepsilon_{k_{t_2}}^{m-1}\neq 0$，故 D 为非空且非单点凸集，由引理 3.2 知，D 为无限集。

引理 3.3 [9]设 $\{z_p\}$ 为集合 D 中的任意点列，若满足

$$z_p\to z_0\left(p\to+\infty\right),$$

则 z_0 为 D 的边界点或内点。

引理 3.4 设 $D^*\subset\mathrm{R}^m$，$D\subset\mathrm{R}^n$，$m\leq n$，D 为 D^* 在 R^n 下的嵌入集合，则 D 为凸集是 D^* 为凸集的充分必要条件，且集合 D 中的点都是边界点。

证明：先证必要性，设 $z_1,z_2\in D$，$\lambda\in(0,1)$，因为 D 为凸集，则 $\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\in D$，根据定义 3.1，$(z_1,0),(z_2,0)\in D^*$，则 $\lambda(z_1,0)+(1-\lambda)(z_2,0)=(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2,0)\in D^*$ 显然，故 D^* 为凸集。

再证充分性，设 $(z_1,0),(z_2,0)\in D^*$，$\lambda\in(0,1)$，因为 D^* 为凸集，$\lambda(z_1,0)+(1-\lambda)(z_2,0)\in D^*$，根据定义 3.1，$z_1,z_2\in D^*$，$\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\in D$ 显然，故 D 为凸集。

由引理 3.3 知，集合 D 中的点都是边界点。

引理 3.5 [8]设 $D\subset\mathrm{R}^n$ 为非空闭凸集，$y\in\mathrm{R}^n$，$y\notin D$，则存在非零向量 $\alpha\in\mathrm{R}^n$ 和实数 β 使得

$$\alpha^{\mathrm{T}}x\leq\beta<\alpha^{\mathrm{T}}y,\quad\forall x\in D,$$

成立，即存在超平面 $H=\{x\in\mathrm{R}^n\mid\alpha^{\mathrm{T}}x=\beta\}$ 严格分离点 y 和凸集 D。

根据定理 2.1，将 $m\times n$ 阶矩阵 A 推广为 m 阶 n 维对称张量，以下给出了张量结构下的 Farkas 引理。

定理 3.1 设 $\mathcal{A}\in\mathrm{S}^{[m,n]}$ 为 m 阶 n 维对称张量，$b\in\mathrm{R}^n$ 为非零向量，则下面两组方程：

(a) 存在 $x\in\mathrm{R}^n$，使得 $\mathcal{A}x^{m-1}=b$，且 $x\geq 0$，

(b) 存在 $y\in\mathrm{R}^n$，使得 $\mathcal{A}y\leq 0$，$b^{\mathrm{T}}y>0$，

有且仅有一组有解。

证明：要证明方程组(a)、(b)有且仅有一组有解，只需证明当方程组(a)有解时方程组(b)无解，当方程组(a)无解时方程组(b)有解即可。

设方程组(a)有解，则存在非负的 $x\in\mathrm{R}^n$，使得 $\mathcal{A}x^{m-1}=b$，由于 $\mathcal{A}$ 为对称张量，则

$$b^{\mathrm{T}}y=\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}y=\left(x^{\mathrm{T}}\right)^{m-1}\mathcal{A}y,$$

根据推论 2.2，记张量

$$\mathcal{A}=\left(t_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}\right)_{n\times n\times\cdots\times n}=\mathcal{A}y\in\mathrm{S}^{[m-1,n]},$$

设 $\mathcal{T}=\mathcal{A}y\leq 0$，故 $t_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}\leq 0$，因为 $x\geq 0$，则

$$b^{\mathrm{T}}y=\left(x^{\mathrm{T}}\right)^{m-1}\mathcal{T}=\mathcal{T}x^{m-1}=\sum_{i_1i_2\cdots i_{m-1}=1}^{n}t_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\leq 0$$

对任意的向量 $y\in\mathrm{R}^n$ 成立，所以方程组(b)无解。

设方程组(a)无解，记 $\mathcal{A}x^{m-1}=z$，设 $D=\{z\mid z=\mathcal{A}x^{m-1},x\geq 0\}$，其中 $b\notin D$，为了利用点与闭凸集的分离定理(引理 3.5)，接下来需要先证明集合 D 为非空闭凸集。

先证明 D 为非空集，已知 $\mathcal{A}\in S^{[m,n]}$ 为 m 阶 n 维对称张量，$x\geq 0$ 且 $x\in\mathrm{R}^n$，则

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=\sum_{i_2,i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m},$$

由于 $D=\left\{z \mid z=\mathcal{A}x^{m-1}, x\geq 0\right\}$，则存在常数 k，使得

$$z_k=\begin{pmatrix}\left(\mathcal{A}x_k^{m-1}\right)_1\\ \left(\mathcal{A}x_k^{m-1}\right)_2\\ \vdots\\ \left(\mathcal{A}x_k^{m-1}\right)_n\end{pmatrix}\in D,$$

因此 D 为非空集。

再证明 D 为凸集，由上述证明知 D 为非空集，设 $z_1,z_2\in D$，则

$$z_1=\mathcal{A}x_1^{m-1},\quad z_2=\mathcal{A}x_2^{m-1},$$

对任意的 $\lambda\in(0,1)$，有

$$\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=\lambda\mathcal{A}x_1^{m-1}+(1-\lambda)\mathcal{A}x_2^{m-1},$$

对于分量，有以下关系

$$\left(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\right)_i=\left(\lambda\mathcal{A}x_1^{m-1}+(1-\lambda)\mathcal{A}x_2^{m-1}\right)_i,$$

即

$$\begin{aligned}\left(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\right)_i&=\left(\lambda\mathcal{A}x_1^{m-1}\right)_i+\left((1-\lambda)\mathcal{A}x_2^{m-1}\right)_i\\&=\lambda\sum_{i_2i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}x_{i_2}^{(1)}x_{i_3}^{(1)}\cdots x_{i_m}^{(1)}+(1-\lambda)\sum_{i_2i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}x_{i_2}^{(2)}x_{i_3}^{(2)}\cdots x_{i_m}^{(2)}\\&=\sum_{i_2i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}\lambda x_{i_2}^{(1)}x_{i_3}^{(1)}\cdots x_{i_m}^{(1)}+\sum_{i_2i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}(1-\lambda)x_{i_2}^{(2)}x_{i_3}^{(2)}\cdots x_{i_m}^{(2)}\\&=\sum_{i_2i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}\left(\lambda x_{i_2}^{(1)}x_{i_3}^{(1)}\cdots x_{i_m}^{(1)}+(1-\lambda)x_{i_2}^{(2)}x_{i_3}^{(2)}\cdots x_{i_m}^{(2)}\right),\end{aligned}$$

存在向量 $t\in\mathrm{R}^n$ 使得

$$t_{i_2}t_{i_3}\cdots t_{i_m}=\lambda x_{i_2}^{(1)}x_{i_3}^{(1)}\cdots x_{i_m}^{(1)}+(1-\lambda)x_{i_2}^{(1)}x_{i_3}^{(1)}\cdots x_{i_m}^{(1)},$$

其中 $i_2i_3\cdots i_m\in\{1,2,\cdots,n\}$，则

$$\left(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\right)_i=\sum_{i_2,i_3\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2i_3\cdots i_m}t_{i_2}t_{i_3}\cdots t_{i_m}=\left(\mathcal{A}t^{m-1}\right)_i,$$

由于 $\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=\mathcal{A}t^{m-1}\in D$，故 D 为凸集。

最后证明 D 为闭集，当 $\mathcal{A}$ 中的项全为 0 时，$D=\{0\}$，显然 D 为闭集。

当 $\mathcal{A}$ 中的项不全为 0 时，则由推论 3.1 知 D 为无限凸集，因此可以在 D 中可选取两两不同的点列 $\left\{z_p\right\}$，令 $z_p\to z_0\ (p\to\infty)$，由引理 3.3 知 z_0 在 D 的闭包中，若 z_0 在 D 的内部，则有 $z_0\in D$，故要证 D 为闭集，只需证明当 z_0 为 D 的边界点时，恒有 $z_0\in D$。

设 z_0 为 D 的边界点，记为 $z_0\in\partial D$，在 D 中选取任意两两不同的点列 $\left\{z_p\right\}$，令 $z_p\to z_0\ (p\to\infty)$，因 $z_p\in D$，所以存在 x_p 使得

$$z_p=\mathcal{A}x_p^{m-1},\ x_p\geq 0,\ p=1,2,3,\cdots$$

故 $\mathcal{A}x_p^{m-1}\to z_0\ (p\to+\infty)$，取 $x_p=\left(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\cdots,x_n^{(p)}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^n$ 展开得

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i_2,i_3\cdots i_m=1}^{n} a_{1i_2i_3\cdots i_m} x_{i_2}^{(p)} x_{i_3}^{(p)} \cdots x_{i_m}^{(p)} \\ \sum\limits_{i_2,i_3\cdots i_m=1}^{n} a_{2i_2i_3\cdots i_m} x_{i_2}^{(p)} x_{i_3}^{(p)} \cdots x_{i_m}^{(p)} \\ \vdots \\ \sum\limits_{i_2,i_3\cdots i_m}^{n} a_{ni_2i_3\cdots i_m} x_{i_2}^{(p)} x_{i_3}^{(p)} \cdots x_{i_m}^{(p)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \\ \vdots \\ z_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (p \to +\infty), \tag{1}$$

将(1)展开可以构建方程组，即

$$\left.\begin{array}{c} a_{111\cdots1} x_1^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + a_{121\cdots1} x_2^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + \cdots + a_{1nn\cdots n} x_n^{(p)} x_n^{(p)} \cdots x_n^{(p)} \to z_1^{(0)} \\ a_{211\cdots1} x_1^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + a_{221\cdots1} x_2^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + \cdots + a_{2nn\cdots n} x_n^{(p)} x_n^{(p)} \cdots x_n^{(p)} \to z_2^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n11\cdots1} x_1^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + a_{n21\cdots1} x_2^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + \cdots + a_{nnn\cdots n} x_n^{(p)} x_n^{(p)} \cdots x_n^{(p)} \to z_n^{(0)} \end{array}\right. \quad (p \to \infty)。 \tag{2}$$

考虑到 $\left(a_{1i_2i_3\cdots i_m}, a_{2i_2i_3\cdots i_m}, \cdots, a_{ni_2i_3\cdots i_m}\right)^{\mathrm{T}} = 0$ 或 $\left(a_{i11\cdots1}, a_{i21\cdots1}, \cdots, a_{inn\cdots n}\right) = 0$ 的情况，去掉(1)中这两种情况的零式，将(2)改写为

$$\left.\begin{array}{c} a_{111\cdots1} x_1^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + a_{121\cdots1} x_2^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + \cdots + a_{1r_2r_3\cdots r_m} x_{r_2}^{(p)} x_{r_3}^{(p)} \cdots x_{r_m}^{(p)} \to z_1^{(0)} \\ a_{211\cdots1} x_1^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + a_{221\cdots1} x_2^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + \cdots + a_{2r_2r_3\cdots r_m} x_{r_2}^{(p)} x_{r_3}^{(p)} \cdots x_{r_m}^{(p)} \to z_2^{(0)} \\ \vdots \\ a_{k11\cdots1} x_1^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + a_{k21\cdots1} x_2^{(p)} x_1^{(p)} \cdots x_1^{(p)} + \cdots + a_{kr_2r_3\cdots r_m} x_{r_2}^{(p)} x_{r_3}^{(p)} \cdots x_{r_m}^{(p)} \to z_k^{(0)} \end{array}\right. \quad (p \to \infty), \tag{3}$$

其中 $0 \le k, r_2, r_3, \cdots, r_m \le n$ 且均为实数。

令 $r = r_2 + r_3 + \cdots + r_m$，设 $B = \left(b_{ij}\right)_{k \times r}$ 为上式的系数矩阵，取向量 $t \in \mathrm{R}^r$ 且

$$t_i^{(p)} = x_{i_2}^{(p)} x_{i_3}^{(p)} \cdots x_{i_m}^{(p)}, \quad i = i_2 + i_3 + \cdots + i_m - m + 2, \quad i_j \le r_j, \quad 2 \le j \le m。$$

则(3)等价于

$$\left.\begin{array}{c} b_{11} t_1^{(p)} + b_{12} t_2^{(p)} + \cdots + b_{1r} t_r^{(p)} \to z_1^{(0)} \\ b_{21} t_1^{(p)} + b_{22} t_2^{(p)} + \cdots + b_{2r} t_r^{(p)} \to z_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_{k1} t_1^{(p)} + b_{k2} t_{k2}^{(p)} + \cdots + b_{kr} t_r^{(p)} \to z_k^{(0)} \end{array}\right. \quad (p \to \infty)。$$

显然 B 的每行和每列中都至少存在一个非零元素，令

$$D^* = \left\{ z^* \mid z^* = Bt, t \ge 0 \right\} \in \mathrm{R}^k, \quad k \le n。$$

根据定义 3.1，R^n 中的 D 为 R^k 中的 D^* 在 R^n 中的嵌入集合，已证得 D 为凸集，由引理 3.1 和引理 3.4 知 D^* 为无限凸集，且 D 中的点都是边界点，故

$$\forall z \in D, \quad \exists z^* \in D^* \Rightarrow z = \left(z^*, 0\right).$$

同理

$$\forall z^* \in D^*, \quad \exists z \in D \Rightarrow z = \left(z^*, 0\right).$$

由于 z，z^* 分别是 D，D^* 中的任意向量，故以下结论成立

$$\forall z_0^* \in \partial D^*, \ z_0^* \in D^* \Leftrightarrow \forall z_0 \in \partial D, \ z_0 \in D.$$

只需证明 $D^* = \left\{ z^* \mid z^* = Bt, t \ge 0 \right\}$ 为闭集即可得到 $D = \left\{ z \mid z = \mathcal{A}x^{m-1}, x \ge 0 \right\}$ 为闭集的结论，而 $D^* = \left\{ z^* \mid z^* = Bt, t \ge 0 \right\}$ 为闭集在[4]中已得到证明，故 $D = \left\{ z \mid z = \mathcal{A}x^{m-1}, x \ge 0 \right\}$ 为闭集。

综上所述，D 为非空闭凸集，根据引理 3.5，存在非零向量 $\alpha \in \mathrm{R}^n$ 和实数 β 使得

$$\forall z \in D \text{，} \quad \alpha^{\mathrm{T}} z \le \beta < \alpha^{\mathrm{T}} b \text{，}$$

因为 $0 \in D$，所以 $0 \le \beta < \alpha^{\mathrm{T}} b$，则

$$\beta \ge \alpha^{\mathrm{T}} z = \alpha^{\mathrm{T}} \mathcal{A} x^{m-1} = \left(x^{\mathrm{T}} \right)^{m-1} \mathcal{A} \alpha \text{，}$$

记张量

$$\mathcal{Q} = \left(q_{i_1 i_2 \cdots i_{m-1}} \right)_{n \times n \times \cdots \times n} = \mathcal{A} \alpha \in \mathrm{S}^{[m-1,n]} \text{，}$$

则

$$\beta \ge \alpha^{\mathrm{T}} z = \left(x^{\mathrm{T}} \right)^{m-1} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} x^{m-1} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{m-1}}^{n} q_{i_1 i_2 \cdots i_{m-1}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{m-1}} \text{，}$$

由于实数 β 是有限实数，$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{m-1}}$ 均为任意的非负实数，要保持上述不等式成立，一定有 $\mathcal{A}\alpha \le 0$，又因为 $b^{\mathrm{T}} \alpha = \alpha^{\mathrm{T}} b > 0$ 成立，所以存在向量 α 使得方程组(b)成立，即方程组(b)有解，定理得证。

当 $m = 2$ 时，定理 3.1 退化为了定理 2.1。在应用方面，张量结构下的 Farkas 引理在张量结构的优化问题中可以用来证明解的存在性，考虑如下优化问题，

$$\begin{array}{ll} \min & \mathcal{A}x^3 + q = b \\ \text{s.t.} & x \ge 0 \end{array} \tag{4}$$

其中 $\mathcal{A} \in \mathrm{S}^{[4,3]}$ 为四阶三维对称张量，$q \in \mathrm{R}^3$，$b \in \mathrm{R}^3$。直接确定问题(4)解的存在性是困难的，那么可以利用定理 3.1，若不等式组

$$\begin{cases} \mathcal{A}x > 0 \\ (b - q)^{\mathrm{T}} x > 0 \end{cases}$$

有解，则问题(4)一定有解。

相较于一般结构下的 Farkas 引理，张量结构下的 Farkas 引理适用于更加复杂的张量系统，这种推广对于解决带有张量结构的优化问题具有重要意义，为张量理论在优化问题中的发展打开了新的思路。

4. 结论

本文将一般结构下的 Farkas 引理推广为张量结构下的 Farkas 引理，即给定 m 阶 n 维对称张量 $\mathcal{A}$ 与非零向量 $b \in \mathrm{R}^n$，存在向量 $x \in \mathrm{R}^n$，使得 $\mathcal{A}x^{m-1} = b$ 且 $x \ge 0$ 或者存在向量 $y \in \mathrm{R}^n$，使得 $\mathcal{A}y \le 0$ 且 $b^{\mathrm{T}} y > 0$，通过引入嵌入集合的概念并利用张量与向量的乘积构建方程组，证明了集合 $D = \left\{ z \mid z = \mathcal{A}x^{m-1}, x \ge 0 \right\}$ 为非空闭凸集，利用点与闭凸集的分离定理证明了该推广，最后给出了推广结果在相关优化问题中的应用。但是本文主要考虑的是对称张量，对于一般的张量或者更为特殊的张量，该推广是否成立仍然需要进一步研究，对于张量结构下的 Farkas 引理，能否推导出张量结构下约束优化问题的 KKT 条件同样需要更深入的研究。

参考文献

[1] Farkas, J. (1902) Theorie der einfachen Ungleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelles Journal*), **124**, 1-27. https://doi.org/10.1515/crll.1902.124.1

[2] Takayama, A. (1985) Mathematical Economics. Cambridge University Press, New York.

[3] 王周宏. Farkas 引理的几个等价形式及其推广[J]. 应用数学学报, 2008(5): 929-939.

[4] 钱金娥. Farkas 引理及其应用[D]: [硕士学位论文]. 荆州: 长江大学, 2017.

[5] Qi, L. (2005) Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor. *Journal of Symbolic Computation*, **40**, 1302-1324. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2005.05.007

[6] 罗自炎, 祁力群. 半正定张量[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(5): 639-654.

[7] Che, M., Qi, L. and Wei, Y. (2019) Stochastic R_0 Tensors to Stochastic Tensor Complementarity Problems. *Optimization Letters*, **13**, 261-279. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1362-7

[8] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[9] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴. 线性泛函分析入门[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.