

火星高斯投影应用分析

亢怡心¹, 李厚朴^{1*}, 陈永冰¹, 柯泽贤², 刘福江³

¹海军工程大学电气工程学院, 湖北 武汉

²海军陆战队训练基地, 广东 广州

³中国地质大学地理与信息工程学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2024年3月11日; 录用日期: 2024年4月5日; 发布日期: 2024年4月15日

摘要

以我国的火星探测计划为出发点, 在以椭球面作为火星数学表面的前提下, 研究了复变函数表示的高斯投影理论和方法在火星投影分带及平面坐标计算中的应用。比较了两种椭球间高斯投影幂级数展开式的数值形式差异, 并对火星高斯投影长度变形进行了理论分析和计算, 在此基础上初步提出了火星地图的分带方案。以7种经差为例, 讨论了在赤道边缘处的火星高斯投影平面坐标误差及变形规律, 将其与地球传统椭球进行对比分析。结果表明, 从原理上讲地球投影理论完全适用于火星, 这对高斯投影在火星上的工程应用是具有重要意义的。

关键词

火星, 复变高斯投影, 第一偏心率, 最大长度变形, 投影分带

Application Analysis of Mars Gauss Projection

Yixin Kang¹, Houpu Li^{1*}, Yongbin Chen¹, Zexian Ke², Fujiang Liu³

¹College of Electrical Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei

²Marine Corps Training Base, Guangzhou Guangdong

³School of Geography and Information Engineering, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: Mar. 11th, 2024; accepted: Apr. 5th, 2024; published: Apr. 15th, 2024

Abstract

Taking China's Mars exploration program as the starting point, on the premise of taking the ellipsoid surface as the mathematical surface of Mars, the application of the Gaussian projection theory

*通讯作者。

and method expressed by the complex function in the Mars projection banding and the calculation of plane coordinates is studied. The numerical form differences of the power series expansion of Gauss projection between two kinds of ellipsoids are compared, and after the theoretical analysis and calculation of the length deformation of the Mars Gauss projection, the banding scheme of the map of Mars is preliminarily proposed on this basis. Taking seven kinds of longitudinal differences as examples, we discuss the plane coordinate errors and deformation laws of Mars Gauss projection at the equatorial edge, and compare and analyze them with the traditional ellipsoid of the Earth. The results show that in principle the Earth projection theory is completely applicable to Mars, which is of great significance for the engineering application of Gauss projection on Mars.

Keywords

Mars, Complex Gauss Projection, The First Eccentricity, Maximum Distortion of Length, Projection Subsection

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

火星是地球的邻居，也是太阳系中最类似地球的行星，对火星的探测不仅能大大深化人类对行星起源和演化的科学认识，更是人类寻找宇宙生命的第一步。自 1960 年 10 月 10 日前苏联实施第一次火星探测任务开始，人类近距离探索火星的序幕正式拉开。到目前为止，世界各国实施了近 50 次火星探测任务 [1]。其中，以美国、苏联和欧盟为主，对火星进行多种探测，任务总体成功率不到一半。火星探测作为一项庞大的系统工程，是一个国家科技实力和创新能力的体现。我国成功实施了首个火星探测任务“天问一号”，在一次任务中开展“绕”、“落”、“巡”系列探测任务，在任务实施、可靠性、安全性和自主性等方面面临重要的技术挑战。

火星遥感制图是火星科学研究和探测工程任务不可或缺的基础性工作，是获取火星形貌和构造信息的基本手段，对于研究火星的形貌特征、地质构造及其演化历史具有重要的科学意义 [2]。同时，探测工程任务和科学目标的制定、着陆区选择、着陆后探测目标的选择及高效安全探测等都有赖于遥感制图。然而地图投影的理论研究还未深入到火星遥感制图中，火星遥感制图与对地观测制图相比，具有更大的挑战和难度。

在火星探测任务实施过程中，其中一项最主要的工作是测绘火星地表地形图。由于火星的形状和大小都不同于地球，因此有必要为火星地图的测绘建立相应的理论和方法，这是绘制火星地图的基础。地球常用 CGCS 2000 椭球的基本常数的长半轴为 6378.140 km，短半轴为 6356.755 km，扁率约为 0.003，所以地球通常以椭球面作为它的数学曲面，地图投影也是基于椭球面进行的。火星的 2 轴半径分别为 3396 km 和 3372 km，它的扁率为 0.005，和地球扁率类似，其平均半径 R 为 3376 km，所以火星地图投影也可基于椭球面进行，火星与地球重要参数对比情况可纵览如表 1。

本文以椭球大地测量和地图投影理论为基础，在以椭球面作为火星测量数学曲面的前提下，研究了高斯投影理论在绘制火星地图中的应用。首先介绍了传统高斯投影的定义以及复变函数表示的高斯投影在投影分带以及平面坐标计算中的优势。通过对地球投影方法的分析比较，结合火星的特点，经过理论研究和计算，提出了火星地图的分带分案，初步构建了火星地图投影的基本框架。

Table 1. List of important parameters of Mars and Earth
表 1. 火星与地球重要参数一览表

参数	火星	地球	比率
质量/ 10^{24} kg	0.64171	5.9724	0.107
体积/ 10^{10} km ³	16.318	108.321	0.151
赤道半径/km	3396.2	6378.1	0.532
两极半径/km	3376.2	6356.8	0.531
体积平均半径/km	3376.2	6356.8	0.531
核半径/km	3389.5	6371	0.532
扁率	0.00589	0.00335	1.758
椭球偏心率	0.108376	0.081819	1.325
平均密度/kg/m ³	3933	5514	0.713
表面重力/m/s ²	3.71	9.8	0.379
表面加速度/m/s ²	3.69	9.78	0.377
逃逸速度/km/s	5.03	11.19	0.45

2. 高斯投影基本理论

2.1. 传统高斯投影的理论

高斯-克吕格投影作为我国常用的一种等角投影方式，常用于大比例尺地图制图和工程测量，如我国现行的 1:50 万及其更大比例尺的各种地形图，都采用高斯投影作为数学基础[3]。如图 1 所示，高斯投影是一种横轴等角切圆柱投影，该投影将圆柱面切与制图区域的中央经线上，中央经线和赤道投影后为互相垂直的直线，且为投影的对称轴。为了控制地图变形，通常情况下在采用圆柱投影时要进行分带，我国通常以 3°或 6°为带宽进行分带[4] [5]。

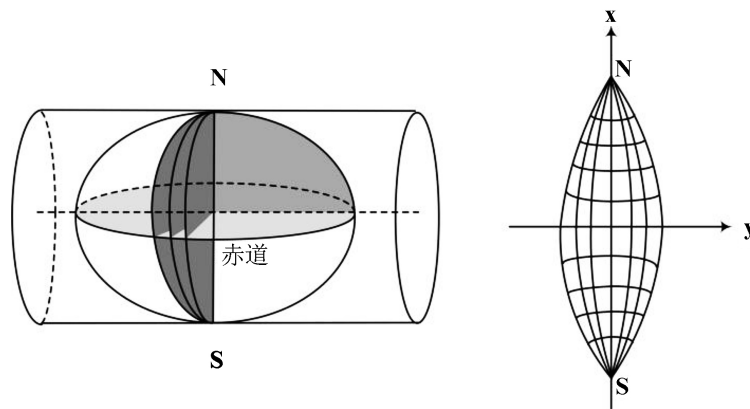


Figure 1. Gauss projection
图 1. 高斯投影示意图

由地图投影理论可知，分带后经差 1 的弧度值很小，所以可以将投影公式展开为 1 的幂级数[6] [7]，即

$$\begin{cases} x = k_0 + k_2l^2 + k_4l^4 + k_6l^6 + \dots \\ y = k_1l + k_3l^3 + k_5l^5 + k_7l^7 + \dots \end{cases} \quad (1)$$

前几项系数为:

$$\begin{cases} k_0 = X \\ k_1 = N \cos B \\ k_2 = \frac{1}{2} N t \cos^2 B \\ k_3 = \frac{1}{6} N (1 - t^2 + \eta^2) \cos^3 B \\ k_4 = \frac{1}{24} N t (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \cos^4 B \\ k_5 = \frac{1}{120} N (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \cos^5 B \end{cases}$$

式中, x 和 y 分别为高斯投影平面坐标; B 为投影点的纬度, l 为投影点到中央子午线的经差; $\eta^2 = e^2 \cos^2 B$; $t = \tan B$; $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$; $X(B) = a(1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB$ 。

传统的高斯投影数学公式主要表示为经差的幂级数形式, 虽然有容易理解和直观的优点, 但是表达式相当冗长复杂, 计算起来十分繁琐, 且在实用中需要分带处理, 精度存在局限性。随着经差的增大, 公式有可能不收敛, 不便于火星投影公式理论推导和数值计算, 为保障我国后续火星探测计划的成功实施, 必须有高精度的火星地图投影数学模型作为基础的技术支撑。

2.2. 高斯投影复变函数表示

以实数表示的高斯投影公式推导过程复杂, 表示形式也比较复杂, 边少锋、李厚朴等[8] [9] [10] [11] [12]推导出了子午线弧长与等量纬度之间的关系式, 并将其拓展至复数域, 以此为基础导出了高斯投影复变函数正解的非迭代公式:

$$\begin{cases} w = q + il = \arctan h(\sin B) - e \cdot \arctan h(e \sin B) + il \\ \varphi = \arcsin[\tanh(w)] \\ z = x + iy = a(j_0\varphi + j_2 \sin 2\varphi + j_4 \sin 4\varphi + j_6 \sin 6\varphi + j_8 \sin 8\varphi + j_{10} \sin 10\varphi) \end{cases} \quad (2)$$

式中系数为:

$$\begin{cases} j_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \frac{441}{65536}e^{10} \\ j_2 = \frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{96}e^4 - \frac{9}{1024}e^6 - \frac{901}{184320}e^8 - \frac{16381}{5898240}e^{10} \\ j_4 = \frac{13}{768}e^4 + \frac{17}{5120}e^6 - \frac{311}{737282}e^8 - \frac{18}{20643840}e^{10} \\ j_6 = \frac{61}{15360}e^6 + \frac{899}{430080}e^8 + \frac{18757}{27525120}e^{10} \\ j_8 = \frac{49561}{41287680}e^8 + \frac{175087}{165150720}e^{10} \\ j_{10} = -\frac{179101}{41287680}e^{10} \end{cases}$$

式中, e 是椭球第一偏心率, q 是等量纬度, φ 为复变等角纬度, $w = q + il$ 为复等量纬度, $z = x + iy$ 为复数平面坐标。相比于传统的实数公式, 复变函数表示的高斯投影形式上更为严密, 且可以根据需要展开至任意阶次, 精度更高, 并且使得投影不受限于狭窄的条带内, 具有“不分带”的优势。

2.3. 高斯投影平面直角坐标系理论

高斯投影是以中央经线投影为 X 轴，正方向指向地理北极，以赤道投影为 Y 轴，向东为正方向，以交点为原点建立得平面直角坐标系。由地图投影理论可知，某点投影到赤道大圆的弧长通常称为“实际值”，相应的计算公式为：

$$L = \pi r * \frac{\alpha}{180^\circ} \tag{3}$$

式中 α 为圆心角弧度数， r 为球面半径。

为了更直观地了解弧长与平面直角坐标的关系，绘制了高斯投影直角坐标系的示意图，如图 2、图 3 所示。

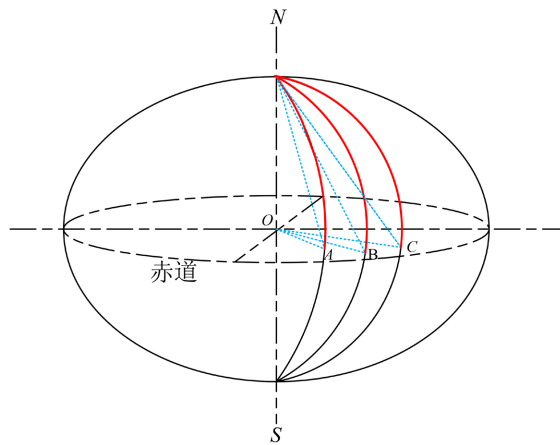


Figure 2. Gauss projection in three-dimensional coordinate system
图 2. 高斯投影三维坐标系示意图

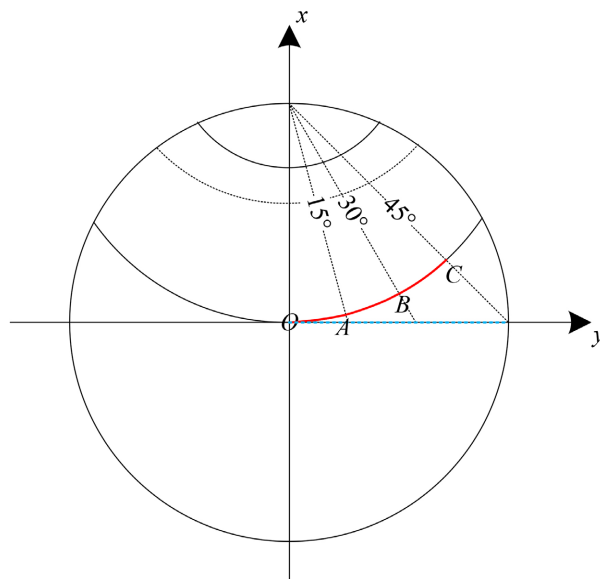


Figure 3. Gauss projection in plane coordinate system
图 3. 高斯投影平面直角坐标系示意图

由高斯投影的变形规律可知，在一定带宽范围内，高斯投影在远离中央子午线且在赤道处变形达到

最大，因此当在赤道边缘时，将处于相对变形最大处，如果此处的变形满足精度要求，那么其他点的变形一定满足要求。根据地图投影原理可知，Y 轴投影平面直角坐标值与弧长的差值称为最大形变值，即绝对误差。

3. 误差分析

为了验证椭球高斯投影相关理论与公式在火星的适用性，地球选用 CGCS2000 坐标系参考椭球常数 $a = 6,378,137 \text{ m}$, $f = 0.00335$, $e = 0.081819$ ；火星选用椭球基本常数 $a = 3,396,200 \text{ m}$, $f = 0.00589$, $e = 0.108376$ 作为参考椭球。在椭球模型下计算地球与火星在赤道边缘的弧长和坐标值，并以绝对误差和相对误差的绝对值作为衡量精度的标准，其中绝对误差和相对误差的绝对值的定义如下。

$$\begin{cases} \text{绝对误差} = |\text{坐标值} - \text{弧长}| \\ \text{相对误差} = \frac{|\text{坐标值} - \text{弧长}|}{\text{弧长}} \end{cases} \quad (4)$$

3.1. 不同椭球间高斯投影系数数值差异

将地球与火星主要的参考椭球元素值依次带入式(2)中，可以得到各项系数的数值形式，如表 2 所示。

Table 2. Eq. (2) Numerical form of the coefficients under two reference ellipsoids

表 2. 式(2)系数在两种参考椭球下的数值形式

系数	CGCS2000 椭球	火星椭球	系数差值
j_0	0.998324	0.997057	0.001267
j_2	0.000836328	0.00146672	0.000630
j_4	7.59578×10^{-7}	2.34052×10^{-6}	1.580941×10^{-6}
j_6	1.19564×10^{-9}	6.47474×10^{-9}	5.2791×10^{-9}
j_8	2.42505×10^{-12}	2.30816×10^{-11}	2.06566×10^{-11}
j_{10}	5.65449×10^{-15}	9.40098×10^{-14}	8.83553×10^{-14}

分析表 2 可知，由于 CGCS2000 椭球与火星椭球的离心率相差不大，在表达式展至 e^4 时，两者系数的精度就十分接近，因此复变函数表示的高斯投影系数展开为椭球第一偏心率 e 表示的幂级数形式在火星椭球参数下通用，可以解决火星椭球投影后高斯投影平面坐标差异问题。

3.2. 坐标数值误差分析

鉴于目前火星探测处于起步阶段，为方便未来计算出不同比例尺地形图，可以在地球常用的 3°带、6°带基础上扩展，选取经差 l 为 3°、6°、10°、15°、18°、20°、24°，利用式(2)~式(4)，计算在不同椭球参数下的高斯投影平面坐标最大差值，所得结果见表 3、表 4 所示。

Table 3. Earth ellipsoid projection error (unit: m)

表 3. 地球椭球投影误差(单位: m)

l	3°	6°	10°	15°	18°	20°	24°
弧长	333,958	667,917	1,113,195	1,669,792	2,003,750	2,226,389	2,671,667
坐标值	334,112	669,149	1,117,011	1,686,364	2,034,127	2,269,215	2,748,787
绝对误差	158	1232	3816	16,572	30,377	42,826	77,120

Table 4. Mars ellipsoid projection error (unit: m)
表 4. 火星椭球投影误差(单位: m)

<i>l</i>	3°	6°	10°	15°	18°	20°	24°
弧长	177,825	355,649	592,749	889,123	1,066,947	1,185,497	1,422,596
坐标值	177,907	356,309	595,818	899,584	1,085,168	1,210,645	1,466,684
绝对误差	82	660	3069	10,461	18,221	25,148	44,088
相对误差	4.6×10^{-4}	1.8×10^{-3}	5.1×10^{-3}	1.1×10^{-2}	1.7×10^{-2}	2.1×10^{-2}	3.1×10^{-2}

由表 3、表 4 可知, 基于椭球体的高斯投影在地球与火星上的形变变化规律基本相当, 其中火星在 3°带计算的绝对误差为 82 m, 相对误差为 0.046%; 6°带计算的绝对误差为 660 m, 相对误差为 0.185%。地球在的 3°和 6°带形变绝对误差为 158 m 和 1232 m。由于地球 CGCS2000 椭球与火星椭球的两轴半径不同, 但扁率近似。根据实际应用情况, 地球椭球投影的方法在火星椭球上是通用的。因此, 在理论上讲地球投影相关表达式基本可满足火星地图投影变形分析和数值计算的精度要求。

3.3. 火星投影带划分

由于投影区域越大投影变形也越大, 实际应用中通常采用分带投影。那么如何分带才算合适呢? 分得太宽, 投影变形太大难以满足精度要求; 分得太窄, 又增加了带与带间接图的困难, 不便于火星系列比例尺地形图的应用。因此, 分带时要从精度和使用方便两方面考虑, 即在保证精度的前提下尽量放宽分带。高斯投影无角度变形, 故从一点出发, 任一方向的长度比是相等的, 所以, 对其变形情况的分析主要可以针对长度变形展开。根据参考文献[13]可知, 投影平面上点处的弧素 ds' 与球面上相应的弧素 ds 之比为该点处的长度比, 故针对火星高斯投影的长度比 m 为:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 B \sin^2 l}} \tag{5}$$

在赤道边缘时, 纬度 B 约为零, 高斯投影长度变形达到最大, 为了便于计算, 假设投影前长度为 1000 m, 由公式(5)计算固定带宽的长度变形比值。从而得到投影变形后的长度及变形值, 计算结果如表 5 所示。

Table 5. System resulting data of standard experiment
表 5. 火星高斯投影分带表及长度变形值

带宽	3°	6°	10°	15°	18°	20°	24°
分带数	120	60	36	24	20	18	15
m	1.00137	1.00551	1.01543	1.03528	1.05146	1.06418	1.09464
投影前长度	1000 m	1000 m	1000 m	1000 m	1000 m	1000 m	1000 m
投影后长度	1001 m	1005 m	1015 m	1035 m	1051 m	1064 m	1095 m
变形值	1 m	5 m	15 m	35 m	51 m	64 m	95 m
相对变形	0.1%	0.5%	1.5%	3.5%	5.1%	6.4%	9.5%

通过分析表 5 可知, 火星高斯投影的长度变形恒为正; 在同一纬线上, 火星高斯投影长度变形随经差的增大而增大, 并且增大的越来越快, 所以为了保证精度, 经差不能太大, 这也就是要进行分带的原因。考虑到将来实际火星球面测量精度的不确定性, 可以适当将火星投影范围放宽, 因此结合测量的精度要求, 并考虑到整个火星球面能够分成整数个投影带, 即带宽应能被 360°整除, 结合表 3 火

星椭球投影误差, 提出以下分带方案: 用于高精度测量带宽可定为 6° , 即全火星分为 60 个带; 对于中等精度测量带宽可定为 15° , 即全火星分为 24 个带; 对于低等精度测量带宽可定为 24° , 即全火星分为 15 个带。

4. 结论

结合我国的首次探火工程, 本文研究了基于椭球模型的高斯投影在火星上的应用, 分析了复变函数高斯投影在火星上投影分带的应用, 讨论了火星投影分带划分问题, 以地球和火星不同经差为例, 将两者的形变变化规律进行对比分析, 验证了地球投影理论在火星上的可行性和适用性。研究表明:

1) 通过比较地球椭球与火星椭球基本参数的差异以及分析高斯投影平面坐标的形变规律, 发现地球与火星的偏心率相差不大, 而且形变趋势基本相当, 因此地球的投影理论从原理上讲完全适用于火星, 在后续在火星地图投影的设计与数学基础建立上可以仿照地球地图投影系统建立, 为构建火星投影系统奠定了基础。

2) 对于推导的基于椭球模型高斯投影平面坐标, 火星椭球在 3° 带边缘计算的绝对误差为 82 m, 相对误差为 0.046%; 6° 带边缘计算的绝对误差为 660 m, 相对误差为 0.185%, 与地球传统椭球相比, 基本可满足火星地图投影变形分析和数值计算的精度要求。

3) 对于不同经差的火星高斯投影, 经差越小, 基于椭球模型计算的长度相对误差越小; 而且火星高斯投影的长度变形恒为正。

4) 结合将来实际火星测量精度的要求, 初步提出了火星地图分带方案, 取带宽为 6° 、 15° 、 24° 作为精度标准带宽。但由于火星投影的选择与分带设计是十分复杂的工程, 需要后续广泛论证和在实践中进一步完善。

基金项目

国家自然科学基金项目(42374051; 42074010)。

参考文献

- [1] 朱庆华, 王卫华, 刘付成, 等. “天问一号”火星探测环绕器导航制导与控制技术[J]. 深空探测学报(中英文), 2023, 10(1): 11-18.
- [2] 邸凯昌, 刘斌, 刘召芹. 火星遥感制图技术回顾与展望[J]. 航天器工程, 2018, 27(1): 10-24.
- [3] 孙达, 蒲英霞. 地图投影[M]. 南京: 南京大学出版社, 2005.
- [4] 杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京: 解放军出版社, 1989.
- [5] Grafarend, E.W. and Krumm, F.W. (2006) Map Projections: Cartographic Information Systems. Springer-Verlag, Berlin.
- [6] 边少锋, 李厚朴. 大地测量计算机代数分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [7] 边少锋, 李厚朴. 高斯投影的复变函数表示[M]. 北京: 科学出版社, 2021.
- [8] 李厚朴, 王瑞, 边少锋. 复变函数表示的高斯投影非迭代公式[J]. 海洋测绘, 2009, 29(6): 17-20.
- [9] 边少锋, 张传定. Gauss 投影的复变函数表示[J]. 测绘学院学报, 2001(3): 157-159.
- [10] 李厚朴, 边少锋. 高斯投影的复变函数表示[J]. 测绘学报, 2008(1): 5-9.
- [11] 李厚朴, 边少锋. 高斯投影与墨卡托投影解析变换的复变函数表达式[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2009, 34(3): 277-279.
- [12] 刘孟函, 金立新, 刘士威, 等. 复数高斯投影若干数学性质分析[J]. 海洋测绘, 2023, 43(6): 77-82.
- [13] 李忠美, 于金星, 李厚朴, 等. 高斯投影与横墨卡托投影等价性证明[J]. 海洋测绘, 2013, 33(3): 17-20.