

# 启发式样例学习研究中存在的基本问题与解决方法

张庆翔, 张 奇

辽宁师范大学心理学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年4月25日; 录用日期: 2024年5月27日; 发布日期: 2024年6月6日

## 摘 要

启发式样例学习具有启发学生的逻辑论证思维、生成新思想、促进探究式学习和提高论证能力等积极作用。深入和广泛开展启发式样例学习研究有助于探索培养学生逻辑思维和创新能力的途径和方法。但在研究中却缺乏启发式结构、内容、呈现方式和表述策略分别影响其学习效果的单因素实验研究的问题。为此, 作者提出系统划分启发式结构、内容、呈现方式和表述策略类型的研究建议和分别对其开展单因素实验研究的方法, 研究结果表明启发式的上述四个维度均分别对启发式样例学习效果产生了明显不同的影响。

## 关键词

启发式, 样例学习, 自我解释提示, 指导性解释

## Basic Issues and Solutions in Heuristic Example Learning Research

Qingxiang Zhang, Qi Zhang

School of Psychology, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 25<sup>th</sup>, 2024; accepted: May 27<sup>th</sup>, 2024; published: Jun. 6<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Heuristic worked example learning has positive effects on inspiring students' logical reasoning, generating new ideas, promoting inquiry learning, and improving argumentation ability. Conducting in-depth and extensive research on heuristic worked example learning can help explore ways and methods to cultivate students' logical thinking and innovative abilities. However, there was a lack

of single factor experimental research on the effects of heuristic structure, heuristic content, presentation, and expression on learning outcomes in the research. To this end, the author proposed research suggestions for systematically partitioning heuristic structures, content, presentation, and expression types, as well as methods for conducting single factor experimental studies on them respectively. The results showed that the above four dimensions of heuristic had significantly different effects on the performance of heuristic worked example learning.

## Keywords

Heuristic, Worked Example Learning, Self-Explanation Prompts, Instructional Explanations

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在样例学习研究中, 虽然启发式样例学习的研究时间不长, 但却显示出它在多方面的重要作用和研究价值。

## 2. 启发式样例学习的现状和研究价值

样例学习研究兴起于上世纪 80 年代, 旨在探究提高学生问题解决能力的有效途径和学习规则的方法(张奇, 2023)。虽然启发式(Heuristic)的概念和启发式策略早在上世纪就出现在问题解决的研究中(Schoenfeld, 1983, 1985), 但直到本世纪初才出现在专门用于启发学生解决数学证明题的启发式样例设计和启发式样例学习研究中(Reiss & Renkl, 2002)。启发式样(heuristic worked example)最初用来帮助学生解决数学证明题。一般的解题样例只呈现了问题解决的步骤和结果, 但没有呈现证明问题的具体思路或程序。为了启发学生解决证明题的思路和步骤, Reiss 和 Renkl 将 Boero (1999)归纳出来的数学家构建数学证明过程的六个步骤, 即数学家解决数学证明题的思路与证明题解题样例结合起来, 设计成启发式样例, 帮助学生解决数学证明题(几何证明题和公式推导)并提高其数学论证能力。最初的启发式样例设计主要是在数学证明题或几何证明题的解题样例中增加启发学生如何思索证明的起点、证明步骤以及如何运用有关数学定义、定理或法则等内容。这些内容称为“启发式”或启发式策略的内容, 含有这些内容的证明题解题样例称为“启发式样例”(Hilbert et al., 2008a, 2008b; Reiss et al., 2008); 而没有这些内容的样例就可称为非启发式样例。

几何证明题或数学证明题的启发式样例学习实验研究结果表明, 与学习非启发式样例学习的效果相比, 学习启发式样例更能启发学生的论证能思维, 并促进数学证明题和几何证明题的解决(诸如 Reiss, Heinze & Kessler et al., 2007; Reiss, Heinze, Renkl, & Grob, 2008; Hilbert, Renkl, Kessler, & Reiss, 2008a; Renkl, Hilbert, & Schworm, 2009; Kollar, Ufer, Reichersdorfer, Vogel, Fischer, & Reiss, 2014; Lee & Chen, 2015 等)。启发式样例学习还能有效促进学生进行探究式学习, 并提高学习效果(Mulder, Lazonder & Jong, 2014)。一些研究将启发式样例学习与小组合作学习结合起来, 考察了小组合作启发式样例学习的效果(Kollar et al., 2014; Vogel et al., 2016; Schwaighofer et al., 2017; Vogel et al., 2022; Wirth & Greefrath, 2024)。这些研究考察的数学论证能力不仅包括数学能力, 还包含社会讨论和辩论能力。合作学习能促进数学论证能力中的社会话语能力。因此, 与小组合作的启发式样例学习能够更好地促进学生

数学论证能力的发展。

近年来, 启发式样例学习研究涉及的学科领域和学习功能不断扩大, 有些研究将启发式样例运用于启发学生产生新的创意(Gray et al., 2019)、提高学生的建模能力(Stender, 2018; Hänze & Leiss, 2022; Wirth, 2022; Wirth & Greefrath, 2024)、促进学生的探究性学习(Mulder, Lazonder, & Jong, 2014)和提高学生的科学观察能力(Lechner et al., 2024)。启发式样例的设计也更加多样和复杂, 例如有些研究者将启发式样例设计成一系列启发程序(Bos & Bogaart, 2022), 有些研究者将启发式样例设计成视频(Wirth, 2022; Wirth & Greefrath, 2024; Lechner et al., 2024)等。这些研究表明, 启发式样例学习具有多种作用或功能, 不仅有助于学生解决数学论证问题和几何证明题, 还有助于启发学生生成新的思想、设计方法和创新思维等。因此启发式样例学习研究具有更大空间和价值。

### 3. 启发式样例学习研究存在的基本问题

我们从已有的启发式样例学习研究中发现, 启发式样例中的启发式包括多种结构、内容、呈现和表达方式, 因此出现了大量“多维”的启发式样例学习研究, 例如 Gray 等人(2019)在考察不同类型的启发式样例对在工业设计任务中生成新创意影响的实验中给被试设计并提供 77 个启发式, 请被试随机选取其中的 10 个启发式并考察其学习效果。在这些研究中明显缺乏对各种不同结构、内容、呈现和表达类型的启发式样例学习效果进行对比实验研究, 即在已有研究中没有厘清启发式各个维度的不同类型及其各自对学习效果的直接影响, 从而很难对多维启发式样例的学习效果做出更准确的分析和判断。具体问题表现如下。

#### 3.1. 启发式的论证结构有多种类型, 但却缺乏不同结构类型之间启发式样例学习效果的对比实验研究

启发式的结构源于 Boero 于 1999 年归纳出来的数学论证“六阶段”模型: 1) 探索问题空间, 2) 形成猜想, 3) 检验猜想的有效性和局限性并收集想法, 4) 将经过检验的可行的猜想用数学语言准确地表达, 5) 粗略地证明假设, 6) 形成正式证明。简言之, 启发式应包括上述 6 个有序步骤。但在不同的启发式样例学习研究中, 学者们设计或运用的启发式结构却各不相同, 例如在 Vogel 等人(2022)的研究中, 所用的启发式保留了 Boero (1999)的数学论证六阶段模型, 即启发式的结构是六阶段。但在 Hilbert 等人(2008a)的研究中却将 Boero (1999)的六阶段模型简化为“四阶段”, 即该启发式的结构为四个阶段: 1) 做出猜想。该阶段包含对问题空间的探索, 明确已知条件和所求问题, 并对问题做初步的分析。2) 形成对猜想的规范性表达。该阶段将问题分析的结果准确表达为假设, 并作为后续论证的基础。3) 探索假设。在该阶段学生需要尝试验证各种假设, 与前一阶段形成的假设一样, 该阶段形成的假设也需要经过验证才能决定其取舍。4) 选择并组合相关的论据, 形成逻辑连贯的论证。

出现上述两种不同阶段的启发式样例后, 按理应该对其学习效果做出对比实验研究, 以便确定启发式结构的不同类型及其各自对学习效果的直接影响。然而还没有对此进行实验研究就在其它研究中出现了新的结构类型, 例如在 Hänze 和 Leiss (2022)的研究中所设计的启发式是依据 Polya 的观点结合数学建模的相关研究所确定的四个步骤数学建模启发式: 1) 理解问题; 2) 将实际问题数学化; 3) 进行数学运算; 4) 解释结果。该启发式的结构虽然也是四个阶段, 但与 Hilbert 等人(2008a)的四个阶段有明显的不同, 因此也应该进行对比分析并厘清其区别。但是随着启发式样例学习研究的广泛开展, 不同研究中开发出来的结构类型逐渐增多, 难分伯仲。

启发式的结构是启发式内容的骨架, 不仅决定启发式内容的广度和细化程度, 而且直接影响论证问题的思路和认知操作, 并导致不同的论证结果。因此有必要对其开展单因素对比实验研究。

### 3.2. 启发式内容的繁简和丰富程度各有不同, 缺乏不同内容对启发式样例学习效果影响的单因素实验研究

在启发式样例学习研究中, 有些启发式内容的繁简程度不同, 例如在 Vogel 等人(2022)的研究中设计了三种内容详细程度不同的启发式样例, 分别是简化的启发式样例, 详细的启发式样例和适应性启发式样例。简化的启发式样例将 Boero 的数学证明六阶段模型(1999)的内容简要地呈现在样例中, 即只提示问题论证的 6 个阶段顺序和基本步骤。详细的启发式样例不仅按 6 个阶段提供了问题论证的基本步骤, 还提示了选择该步骤的理由或想法。适应性启发式样例允许被试在问题论证的每个阶段开始之前自己选择该阶段的两种启发式样例, 即一种是详细的启发式样例, 另一种是简化的启发式样例。

有些研究的启发式内容中还包含了如何具体运用规则论证问题的策略性内容, 例如在 Hilbert 等人(2008)的研究中, 将两位虚拟学生讨论其论证思路过程中应用的具体策略也在启发式样例中呈现出来。又如在 Reiss 等人(2008)的研究中, 同样借用虚拟学员之口从论证目的和策略的角度对启发式样例的论证步骤做了详细的解释。在自我解释提示的启发式样例中, 提示被试思考或注意的问题不同, 需要被试做出自我解释的内容也不同, 例如 Conati 和 VanLehn (2000)将自我解释提示的内容分为两种类型, 一种自我解释是将解题步骤与规则相联系, 通过思考解题步骤所依据的规则来体会解题步骤的意义, Renkl (2014)将其称为“规则型自我解释”。另一种是将解题步骤与到达的子目标相联系, 通过思考解题步骤在整个解题程序中所处的环节或与总目标的关系来体会解题步骤的意义, Renkl 将其称为“目标-算子型自我解释”。自我解释提示的类型不同, 引发的自我解释的类型自然也不同。Rittle-Johnson 和 Loehr (2017)提出了两种类型的自我解释提示, 一种为“规则型自我解释提示”(why-explanation prompts), 它提示学生推断解题步骤或结果背后的原理或规则, 拓展其对领域知识概念的理解, 旨在通过自我解释促进学生知识的内化; 另一种为“策略型自我解释提示”(How-explanation prompts), 它提示学生生成、选择或迁移解题规则和解题步骤, 目的在于促进学生对知识的外化。

总之, 启发式的内容不仅有简要与详细之别, 而且还有不同内容之分。这些启发式内容的不同必然导致启发式样例学习效果的不同, 因此准确划分启发式内容的层次和类型, 从而通过单因素实验分别考察其对学习的具体影响是十分必要的。

### 3.3. 缺乏启发式不同内容的不同呈现方式影响启发式样例学习效果的对比实验研究

启发式的内容除了在样例中按照其结构分步骤呈现之外, 还往往以“自我解释提示”和“指导性解释”两种方式呈现。

较多的启发式样例学习研究采用自我解释提示的方式呈现启发式的内容, 但具体的呈现方式又各有不同, 例如在 Hilbert 等人(2008a)研究中采用了两种自我解释提示的呈现方式, 一种以引导被试思考启发式内容的选择题呈现, 另一种以引导学生思考定义和定理的填空题呈现。Reiss 等人(2008)采用提示被试完成“小练习题”或填空题的方式呈现自我解释提示。不仅自我解释提示呈现的形式不同, 自我解释提示的具体内容也不同, 例如在 Kollar 等人(2014)的研究中, 自我解释提示集中用于提示被试的论证策略, 即在论证的每个阶段提示被试独立反思该阶段所使用的启发式策略, 也提示被试与同伴讨论并比较各自样例中虚拟学员所使用的方法和应用策略。虽然提示都指向策略内容, 但启发式策略与应用策略有不同。启发式策略属于启发式内容, 而应用策略是在问题解决过程中所使用的策略, 在启发式样例中属于附加内容。Wirth 和 Greefrath (2024)也在视频样例中呈现规则的自我解释提示, 用以促进被试对样例中解题步骤的理解。由此可见, 不仅自我解释提示的呈现方式不同, 而且提示自我解释的内容也不相同。因此, 哪种解释性提示适用于哪种具体呈现类型, 同一种自我解释提示的哪种具体呈现方式其学习效果更好等问题就需要进行对比实验研究。然而在已有的研究中却缺乏这种对比实验研究。

在启发式样例学习研究中,经常与自我解释提示相比较的呈现方式是采用指导性解释的方式呈现启发式的内容。例如 Reiss 等人(2008)在启发式样例中向学生提供论证过程中可能用到的重要的几何知识。而在大多数的启发式样例研究中,研究者通常通过两个或多个虚拟学员之间相互交流的方式向学生展现虚拟学员共同解决问题的过程,以及过程中的想法、思路以解释启发式样例中大量的、多层次的内容。与自我解释提示类似,指导性解释的类型可根据其解释内容的不同而划分。Van Gog 等人(2004)指出,用于促进学生对问题解决过程的理解和对问题所暗含原理或规则理解的过程导向信息可分为解释或说明(例如为什么要执行某些解题步骤(即问题背后的原理或规则)和如何选择合适的算子(即解题策略和启发式)两种类型。这些指导信息直接影响学习的效果,因为不同类型的解释可以促进学生对问题解决过程中不同内容的理解。因此,不同类型的指导性解释可能对启发式样例学习的效果产生不同影响。但在以往有关启发式样例学习的研究中指导性解释和自我解释提示常常结合在一起,不同内容的指导性解释与不同内容的自我解释提示也不加区分,所以需要进一步厘清这些因素对启发式样例学习效果的影响。

### 3.4. 缺乏启发式不同内容的不同表述策略影响启发式样例学习效果的对比实验研究

启发式样例中指导性解释的内容可以分别借用同伴交流或老师之口表达出来,例如在 Hilbert、Renkl、Kessler 和 Reiss (2008a)的研究中启发式内容通过两个虚拟学生在论证过程中相互交流的对话表达出来。他们还为学生之间的口头交流设计了两种表述策略:学生型表述策略和专家型表述策略。学生型表述策略可以表达论证过程中具体、基础的内容,就像实际中学生作的解释一样。而专家型表述策略可以表达论证过程中抽象、概括、更具指导性的内容,就像实际中专家或教师所做的解释。Hinds、Patterson 和 Pfeffer (2001)认为,学生型表述中多具体、详细的表达而少抽象、概括的表达,因此比专家型表述更利于知识的近迁移。较多的启发式样例研究大都选择通过呈现虚拟学生讨论数学问题解决过程的对话来呈现启发式的内容(Reiss et al., 2008; Kollar et al., 2014; Schwaighofer et al., 2017; Hänze & Leiss, 2022; Vogel et al., 2016),用以促进学习者对启发式样例内容的理解以及提供合作学习中组员之间相互讨论的契机。

Wirth (2022)在探讨启发式视频样例设计的过程中总结了启发式内容的不同表达方式对其学习效果的影响。其中有人认为对话式语言比书面语言更有效(Brame, 2016);也有的研究者认为主动语态比被动语态更有效(Kulgemeyer, 2018)。Wirth (2022)认为不同表达方式的效果差异可以用个体化原理(Mayer, 2020)来解释,即当学生感觉到是教师正在和他们谈话时,会更加努力地理解谈话的内容。因此视频样例中启发式内容的表述方式或表述策略被认为是影响样例学习效果的一个重要的因素(Kay, 2014)。在 Stender (2018)的研究中则直接是通过教师干预的方式向解决数学建模问题过程中面临困难的学生提供启发式策略的帮助,以提高学生的数学建模能力。但在上述研究中都没有直接比较这两种表述策略对启发式样例学习效果的影响。因此有必要进行其对比实验研究。

除了上述有待解决的问题之外,哪些启发式内容适合采用学生表述策略或教师表述策略,哪些学生适用于学生表述策略或教师表述策略也有待进行对比实验研究。

## 4. 解决问题的建议和方法

为了解决上述问题,必须首先将启发式划分为结构、内容、呈现方式和表述策略四个基本维度,然后分别划分各个维度的类型,最后在保持其它维度不变的条件下,做出单因素实验设计,比较单一变量不同类型启发式样例的学习效果,从而分别确定启发式各维度的不同类型对学习效果的影響。具体做法如下。

1) 启发式的结构虽然都是依据 Boero (1999)关于数学证明的六阶段模型所归纳得到的,但不同实验研究所设计的论证阶段的认知操作任务、阶段顺序和阶段数量不尽相同。因此有必要从论证中各个阶段

的认知操作、顺序和数量划分启发式结构的类型。根据以往研究中出现的数学论证启发式结构, 可将其划分为“逐步式”结构和“跨步式”结构两种基本类型。“中继式”保持了 Boero 于 1999 年提出的步骤顺序, 并省略最后两步, 形成构思 - 操作 - 构思 - 操作的结构。“跨步式”保持了 6 个步骤, 但与 Boero 的六阶段模型相比又改变了步骤的顺序, 可简化为构思 - 构思 - 操作 - 操作的启发式结构。在明确划分启发式结构的基础上才可以设计内容、呈现方式和表达策略均相同的启发式样例, 并通过单因素实验比较启发式的不同结构类型对其学习效果的影响, 从而验证启发式结构基本类型划分的有效性, 明确其学习效果。当前需要对尚未比较过学习效果的启发式结构类型进行单因素实验研究, 并根据实验结果确定启发式结构的基本类型及其与学习效果之间的对应关系。后续研究则需要在已有结构类型的基础上设计、验证或开发出新的结构类型。

2) Renkl 等人(2009)将启发式样例的内容划分的三种: 一是数学证明中论证逻辑的要求和书写规范; 二是待论证问题所涉及到的定义、公理或定理; 三是构建数学证明的启发式策略。这种划分没有划清样例内容与启发式内容的界限或区别。Vogel 等人(2022)将启发式样例设计成详细的和简化的两种, 也没有分清启发式样例的内容层次。目前尚无对启发式样例的内容和启发式的内容做出明确的划分。首先, 我们将启发式样例的内容划分为“样例内容”和“启发式内容”两个层次。样例内容是指非启发式样例所具有的问题表述、解题步骤和答案的内容, 即数学和物理教材中论证(即公式推导)和证明(即定理证明)的例题内容。启发式内容是样例内容之外的并与样例内容相结合的、用于启发学生论证或证明问题的有关思路、知识和方法的内容。其次, 我们将启发式内容划分为“要素内容”与“附加内容”。要素内容呈现各阶段启发式以及该阶段启发式指导下的解题步骤, 缺少它们就构不成启发式样例。最后, 我们将“附加内容”定义为详细表达、提示、提问、解释或说明要素内容的其他内容。当前需要解决的遗留问题是在准确划分启发式内容的类型的前提下, 开展以启发式内容为变量对比实验研究, 考察不同启发式内容类型的启发式样例学习效果。后续研究便可以在划明确切的启发式内容类型的基础上进一步考察单一类型内容的不同详略程度、呈现方式或表述策略对启发式样例学习效果的影响, 或对比不同内容类型相同详略程度、呈现方式或表述策略的启发式样例学习效果的差异。未来可在此基础上对启发式内容以新的标准划分或开发出新的内容类型。

3) 可以将启发式内容的呈现方式划分为自我解释提示式和指导性解释两种。根据提示性呈现的具体内容可将自我解释提示分为提示规则内容的“规则提示”、提示应用策略或方法内容的“策略提示”和既提示规则内容又提示策略内容的“综合提示”。根据指导性呈现的内容, 将指导性解释分为“规则指导”、“策略指导”和“综合指导”的三种类型。启发式内容还常以指导和提示两者组合的方式呈现, 根据组合的自我解释提示和指导性解释的不同类型可将其划分为“规则提示 - 规则指导”、“规则提示 - 策略指导”、“策略提示 - 规则指导”和“策略提示 - 策略指导”四种类型。在明确划分启发式内容的呈现方式类型后, 分别开展其影响启发式样例学习效果的对比实验研究, 排除学习效果不显著的呈现类型, 合并效果相同或呈现形式相似的呈现类型, 确定基本的呈现类型, 并在后续研究中开发出新的呈现类。

4) 根据解释说明内容的表述主体将指导性解释的表述策略分为“教师指导”策略和“同学指导”策略两种类型。教师指导是以教师的表达特点呈现待解释说明的内容; 同学指导则是以同学的表达特点呈现指导性解释的内容。根据以往的研究(Wirth, 2022; Hinds et al., 2001), 我们选取同学指导和教师指导两点主要不同: 1、对表达内容的概括程度不同, 教师指导的内容有一定概括性, 而同学指导的形式详细而具体。2、语气不同, 教师指导的语气具有指示性和决定性, 同学指导的语气具有协商性和建议性。经过上述类型划分后, 分别开展不同表述策略类型影响启发式样例学习效果的单因素实验研究, 考察不同表述策略对启发式样例学习效果的直接影响, 从而为后续研究开发新的表述策略类型奠定实验和理论基础。

## 5. 解决方法的实践效果

为实践上述解决方法,我们在平面几何证明题解题样例的基础上,分别根据上述4个维度和各维度的基本类型划分,设计出不同类型的启发式样例学习材料和统一的前测材料、后测材料,以通过前测筛选的八年级学生为被试,分别进行了一系列的实验研究,并得出以下结论:

1) 启发式结构影响启发式样例的学习效果,中继式启发式样例的学习效果明显优于跨步式启发式样例的学习效果。

2) 启发式内容对数学论证的样例学习有显著的促进作用;启发式要素内容的详略影响其学习效果,即展开表述要素内容比简要陈述要素内容对启发式样例学习的促进效果更好;在已经展开陈述要素内容的基础上仅添加附加内容对启发式样例的学习效果无显著影响。总之,启发式内容的不同层次、同一内容层次的不同详略程度都会对其学习效果产生影响。

3) 启发式内容的呈现方式影响启发式样例的学习效果,同一呈现方式的不同内容类型其学习效果不同。指导性解释对启发式样例学习效果无显著影响,而策略提示的启发式样例学习效果明显优于规则提示和综合提示的启发式样例学习效果。

4) 自我解释提示式与指导性解释的组合对启发式样例学习效果的影响不同于只呈现自我解释提示或只呈现指导性解释,证明自我解释提示与指导性解释组合呈现是不同于自我解释提示和指导性解释的另一种启发式样例内容的呈现方式。在四种组合呈现方式中策略提示-策略指导和策略提示-规则指导两种启发式样例的学习效果最好。

5) 启发式内容的表述策略影响启发式样例学习效果,当指导内容为规则时,同学指导的启发式样例学习效果明显优于教师指导的启发式样例学习效果。

## 参考文献

张奇(2023). *规则样例学习理论*. 科学出版社.

Boero, P. (1999). *Argumentation and Mathematical Proof: A Complex, Productive, Unavoidable Relationship in Mathematics and Mathematics Education*. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.

Bos, R., & van den Bogaart, T. (2022). Heuristic Trees as a Digital Tool to Foster Compression and Decompression in Problem-Solving. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 8, 157-182. <https://doi.org/10.1007/s40751-022-00101-6>

Brame, C. J. (2016). Effective Educational Videos: Principles and Guidelines for Maximizing Student Learning from Video Content. *CBE—Life Sciences Education*, 15, 1-6. <https://doi.org/10.1187/cbe.16-03-0125>

Conati, C., & Vanlehn, K. (2000). Toward Computer-Based Support of Meta-Cognitive Skills: A Computational Framework to Coach Self-Explanation. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 11, 389-415.

Gray, C. M., McKilligan, S., Daly, S. R., Seifert, C. M., & Gonzalez, R. (2019). Using Creative Exhaustion to Foster idEA Generation. *International Journal of Technology and Design Education*, 29, 177-195. <https://doi.org/10.1007/s10798-017-9435-y>

Hänze, M., & Leiss, D. (2022). Using Heuristic Worked Examples to Promote Solving of Reality-Based Tasks in Mathematics in Lower Secondary School. *Instructional Science*, 50, 529-549. <https://doi.org/10.1007/s11251-022-09583-8>

Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008a). Learning to Prove in Geometry: Learning from Heuristic Examples and How It Can Be Supported. *Learning & Instruction*, 18, 54-65. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.10.008>

Hilbert, T. S., Renkl, A., Schworm, S., Kessler, S., & Reiss, K. (2008b). Learning to Teach with Worked-Out Examples: A Computer-Based Learning Environment for Teachers: Original Article. *Journal of Computer Assisted Learning*, 24, 316-332. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2007.00266.x>

Hinds, P. J., Patterson, M., & Pfeffer, J. (2001). Bothered by Abstraction: The Effect of Expertise on Knowledge Transfer and Subsequent Novice Performance. *Journal of Applied Psychology*, 86, 1232-1243. <https://doi.org/10.1037/0021-9010.86.6.1232>

Kay, R. H. (2014). Developing a Framework for Creating Effective Instructional Video Podcasts. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 9, 22-30. <https://doi.org/10.3991/ijet.v9i1.3335>

- Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., & Reiss, K. (2014). Effects of Collaboration Scripts and Heuristic Worked Examples on the Acquisition of Mathematical Argumentation Skills of Teacher Students with Different Levels of Prior Achievement. *Learning and Instruction*, 32, 22-36. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.01.003>
- Kulgemeyer, C. (2018). A Framework of Effective Science Explanation Videos Informed by Criteria for Instructional Explanations. *Research in Science Education*, 50, 2441-2462. <https://doi.org/10.1007/s11165-018-9787-7>
- Lechner, M., Moser, S., Pander, J., Geist, J., & Lewalter, D. (2024). Learning Scientific Observation with Worked Examples in a Digital Learning Environment. *Frontiers in Education*, 9, Article 1293516. <https://doi.org/10.3389/educ.2024.1293516>
- Lee, C. Y., & Chen, M. J. (2015). Effects of Worked Examples Using Manipulatives on Fifth Graders' Learning Performance and Attitude toward Mathematics. *Journal of Educational Technology & Society*, 18, 264-275.
- Mayer, R. E. (2020). *Multimedia Learning* (3rd ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108894333.003>
- Mulder, Y. G., Lazonder, A. W., & Jong, T. D. (2014). Using Heuristic Worked Examples to Promote Inquiry-Based Learning. *Learning & Instruction*, 29, 56-64. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.08.001>
- Reiss K., Heinze A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and Proof in Geometry: Effects of a Learning Environment Based on Heuristic Worked-Out Examples. *ZDM*, 40, 455-467. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0105-0>
- Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to Prove: The Idea of Heuristic Examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, 29-35. <https://doi.org/10.1007/BF02655690>
- Reiss, K., Heinze, A., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2007). Fostering Argumentation and Proof Competencies in the Mathematics Classroom. In M. Prenzel (Ed.), *Studies on the Educational Quality of Schools* (pp. 251-264). Waxmann. <https://www.mendeley.com/catalogue/bd3d1b30-2492-30ee-9faa-b335c1a3ebb1/>
- Renkl, A. (2014). Toward an Instructionally Oriented Theory of Example-Based Learning. *Cognitive science*, 38, 1-37. <https://doi.org/10.1111/cogs.12086>
- Renkl, A., & Schworm, H. S. (2009). Example-Based Learning in Heuristic Domains: A Cognitive Load Theory Account. *Educational Psychology Review*, 21, 67-78. <https://doi.org/10.1007/s10648-008-9093-4>
- Rittle-Johnson, B., & Loehr, A. M. (2017). Eliciting Explanations: Constraints on When Self-Explanation Aids Learning. *Psychonomic Bulletin & Review*, 24, 1501-1510. <https://doi.org/10.3758/s13423-016-1079-5>
- Schoenfeld, A. (1983). Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem-Solving. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 345-395). Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem-Solving*. Academic Press.
- Schwaighofer, M., Vogel, F., Kollar, I., Ufer, S., Strohmaier, A., Terwedow, I. et al. (2017). How to Combine Collaboration Scripts and Heuristic Worked Examples to Foster Mathematical Argumentation—When Working Memory Matters. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 12, 281-305. <https://doi.org/10.1007/s11412-017-9260-z>
- Stender, P. (2018). The Use of Heuristic Strategies in Modelling Activities. *ZDM*, 50, 315-326. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0901-5>
- Van Gog, T., Paas, F., & Van Merriënboer, J. J. G. (2004). Process-Oriented Worked Examples: Improving Transfer Performance through Enhanced Understanding. *Instructional Science*, 32, 83-98. <https://doi.org/10.1023/B:TRUC.0000021810.70784.b0>
- Vogel, F., Kollar, I., Fischer, F., Reiss, K., & Ufer, S. (2022). Adaptable Scaffolding of Mathematical Argumentation Skills: The Role of Self-Regulation When Scaffolded with CSCL Scripts and Heuristic Worked Examples. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 17, 39-64. <https://doi.org/10.1007/s11412-022-09363-z>
- Vogel, F., Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Reiss, K., & Fischer, F. (2016). Developing Argumentation Skills in Mathematics through Computer-Supported Collaborative Learning: The Role of Transactivity. *Instructional Science*, 44, 477-500. <https://doi.org/10.1007/s11251-016-9380-2>
- Wirth, L. (2022). Developing a Framework for Creating Heuristic Worked Example Videos to Enhance Students' Modeling Competencies. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. [https://www.researchgate.net/publication/362864042\\_Developing\\_a\\_framework\\_for\\_creating\\_heuristic\\_worked\\_example\\_videos\\_to\\_enhance\\_students%27\\_modeling\\_competencies](https://www.researchgate.net/publication/362864042_Developing_a_framework_for_creating_heuristic_worked_example_videos_to_enhance_students%27_modeling_competencies)
- Wirth, L., & Greefrath, G. (2024). Working with an Instructional Video on Mathematical Modeling: Upper-Secondary Students' Perceived Advantages and Challenges. *ZDM—Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01546-2>