

微分方程在生物数学中的应用

马智慧

兰州大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2024年4月27日; 录用日期: 2024年5月24日; 发布日期: 2024年5月31日

摘要

高等数学课程在普通高等学校相关专业的培养计划中具有非常重要的地位。但由于高等数学课程的高度抽象性、严密逻辑性, 使得学生学习该课程的兴趣与主动性欠佳。为了培养学生学习高等数学的兴趣, 便要了解学生了解高等数学的经典历史与前沿应用, 这必然要求教师在教学过程中将科学研究与教育教学有效地融合。本文以案例的方式呈现了微分方程章节与生物数学领域建模研究的有机融合, 并将所建立模型运用到生物学领域, 以图示的方式展示了数学建模重要性和实用性。

关键词

高等数学, 微分方程, 数学建模, 模型应用

The Application of Differential Equation in Biomathematics

Zhihui Ma

School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 27th, 2024; accepted: May 24th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

Advanced mathematics is a fundamental theoretical course which is required for various majors in the ordinary higher education institutions. However, due to the high abstraction and rigorous logic, students lack interest and initiative in learning this course. In order to cultivate students' interest in learning advanced mathematics, and to enable them to understand its classic history and interdisciplinary applications, it is necessary to requires teachers to effectively integrate the scientific research and educational teaching in their teaching processes. Motivated by this, this paper presents the effective integration of the chapter of the differential equation and the ecological research through case studies. Moreover, this paper applies the proposed mathematical mod-

el into the ecological researches and graphically shows the importance and usability.

Keywords

Advanced Mathematics, Differential Equation, Mathematical Modelling, Model Application

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

习近平主席在全国教育大会上的讲话与《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010~2020年)》均强调,高等教育要着力培养信念执著、品德优良、知识丰富、本领过硬的高素质专门人才和拔尖创新人才,支持学生参与科学研究,强化实践教学环节[1][2]。为了落实纲要的要求以及提高人才培养的质量,将科学研究与教学过程有机融合便是可行的路径之一[3][4][5][6][7]。在培养高质量、创新型人才的过程中,不同专业不同课程融合的方式虽然各不相同,但是最终目标必然是一致的,即培养能够勇于创新、改革,富有开拓性,具有批判性意识、较高的职业素养及职业技能、较高的道德水平及人际修养、团队协作精神的人才[1][2]。

高等数学课程在普通高等学校相关专业的培养计划中具有非常重要的地位,是相关专业学生必修或选修的一门基础理论课[8][9]。高等数学课程与其他类型的课程存在本质的区别。也就是说高等数学课程具有以下三个明显不同于其它课程的特点:高度的抽象性、严密的逻辑性,以及广泛的应用性。其中抽象性高等数学课程不同于其它相关课程的最基本和最显著的特点。在高等数学的范畴,任何事物均可以抽象成为某种数学符号,高等数学课程正事针对数学符号开展研究,并得到相应的理论的数学类课程。同时,将理论结果解释到自然背景,进而揭示相关自然现象的本质规律。严密的逻辑性是指在相关数学理论的归纳、演绎,以及整理过程中,无论是定义与定理,还是证明与推理,都要建立在严格的合理逻辑的基础上,只有这样才能达到高等数学理论与实践要求。因此,数学学习与研究的过程是逻辑思维的训练过程、具象到抽象的集成过程。

然而,现阶段传统大多数高等学校针对高等数学课程的教育教学模式存在很大的局限性和相应的弊端,即在教育教学过程中无法完全做到理论联系实际,更为甚者理论与实际相互脱节,这些将严重影响着高等数学课程的教学效果。同时,部分高校教师重科研、轻教学等不注重教学的现象也非常普遍。这在很大程度上使得学生在学习高等数学的过程中只是被动的接受基础知识,并未将基础知识的应用引入课堂教学过程中,这必然导致学生学习高等数学的兴趣不浓厚,学习热情不高,甚至当课程难度较大时,学生对所学课程完全失去了兴趣。本人在多年的教学过程中,常常听到学生问“学习高等数学有什么用?”事实上,当前的数学教育的重中之重是培养学生用数学理论与方法解决实际问题的能力,这也在很大程度上深化了学生对抽象数学知识的进一步理解与掌握。为了顺应当前高等教育关于高等数学教学的要求,教师应在教学过程中全方位地展示高等数学的威力,即高等数学的前沿应用。而为了展示高等数学的前沿应用,必然要求将高等数学与前沿科学研究相融合。

本文以案例的形式呈现高等数学与科学研究的融合。

2. 融合案例

本案例基于高等数学微分方程章节[8] [9], 为了展示微分方程理论的应用, 全面阐述高等数学的实用性, 激发学生学习高等数学的兴趣, 将本章所学到的微分方程理论应用到自然界的种群相互作用模型中, 并按照以下几个步骤展开。

2.1. 背景介绍及其数学表述

首先让学生了解一下几个生物学的概念, 这些概念在中学阶段的学习中略有涉及, 但是从高等数学应用的范畴来看, 仍需重新介绍。

1) **种群**: 种群常常被定义为在特定时间内占据一定空间的同物种或者不同物种的所有个体的集合。对于种群而言, “出生”与“死亡”便是种群最基本的两个过程, 即“生死过程”。对种群的理论研究主要是其数量变化与产时间行为。一般而言, t 时刻种群密度或数量用函数 $x(t)$ 表示。

2) **出生率**: 出生率被定义为在某一特定时间内, 某一种群新生个体数占有种群个体总数的比例。若不考虑自然灾害, 短时间内的种群出生率可假设为常数, 用参数 b 表示。

3) **死亡率**: 死亡率被定义为在某一特定时间内, 某一种群死亡个体数占有种群个体总数的比例。若不考虑自然灾害与人为灾难, 短时间内的种群死亡率可假设为常数, 用参数 d 表示。

自然状态下, 出生率与死亡率之差称之为种群的内禀增长率, 用参数 r 表示, 即 $r = b - d$ 。种群的内禀增长率的大小决定了种群数量或者种群密度。若种群的出生率大于种群的死亡率, 则该种群的密度呈现增长趋势。反之, 该种群的密度呈现降低趋势。经典的种群增长模型有 Malthus 模型($\frac{dx}{dt} = rx$)与

Logistic 模型($\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, 其中 K 表示环境容纳量), 前者假设种群的食物资源非常充足, 并在微分方程理论的第一节已经做了介绍, 而后者考虑了资源对于种群增长的限制作用, 并在微分方程理论的第二节作为例题做了介绍。

2.2. 渐进式问题解决

1) 假设食饵种群“生的过程”是由自然增长所决定的, 可由微分方程中的正项来表示, 而“死的过程”是由捕食者的捕食导致的, 可由微分方程中的负项来表示。基于以上假设, 可以由以下常微分方程来描述食饵种群的“生死的过程”并解释变量与参数的生物学意义:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rf(x) - cg(x)y \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

其中函数 $f(x)$ 为种群的增长方式, 常用的有 Malthus 与 Logistic 增长方式。函数 $cg(x)$ 为种群被捕食的方式, 常用的有 Holling 型方式。

2) 假设捕食者种群的“生的过程”是由于捕食了食饵在种群并将其转化为自身的新个体, 而“死的过程”是由自然死亡导致的。基于以上假设, 可以由以下常微分方程来描述捕食者种群的“生死的过程”并解释变量与参数的生物学意义:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ecg(x)y - dy \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

其中参数 e ($0 < e < 1$) 表示捕食者捕获食饵并将其转化为自身增长的转化率。

3) 将食饵种群与捕食者种群的“生死的过程” 联立, 可得经典的能够解决本案例问题的数学模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rf(x) - cg(x)y \\ \frac{dy}{dt} = ecg(x)y - dy \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.3. 归纳总结

从高等数学的角度来看, 模型(2.3)是二维的非线性齐次微分方程组的初值问题, 关于该初值问题的求解。从生物学的角度来看, 模型(2.3)描述了自然界中两种群捕食与被捕食的现象。捕食与被捕食是自然界中两种群相互作用的方式之一。运用微分方程理论对该模型进行研究便可以预测两种群的密度或数量的长时间变化趋势, 这将为生物生物多样性与保护生物学的研究提供一定的理论依据。

2.4. 模型应用

1) 具有反捕食行为的捕食 - 食饵模型

自然界中捕食者和食饵种群之间的相互作用和相互适应是长期协同进化的结果, 在捕食者与食饵种群的共存系统中, 常常会观察到复杂的种群行为上的适应和反适应现象。例如捕食者固然有一整套适应性特征以便顺利的掠杀食饵, 但食饵也常常产生一系列相应的适应性特征以躲避捕食者的捕食, 也就是说捕食者捕食策略的进化促进了食饵反捕食行为的进化, 这是捕食者与食饵在进化上进行军备竞赛的结果。食饵通过进化警戒色、拟态、假死、躲进避难所、报警鸣叫等适应特征和反捕食行为以躲避捕食者的捕食。食饵种群的反捕行为从行为学上为主要表现为不完全隐蔽行为和完全隐蔽行为。前者在一定程度上降低了食饵被捕食的风险, 但任然存在被捕食的可能性, 或者被捕食的概率大于零。而后者则完全避免了被捕食的可能性, 或者被捕食的概率为零, 但可能面临着生存资源的匮乏。为了描述该类自然现象, 基于模型(2.3)建立具有食饵不完全隐蔽行为和完全隐蔽行为的捕食 - 食饵相互作用的数学模型, 即令模型(2.3)中的 $f(x) = x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $g(x) = \frac{(1-\gamma)x^n}{1+(1-\gamma)x^n}$ 和 $g(x) = \frac{(1-\beta)^n x^n}{1+(1-\beta)^n x^n}$, 从而建立如下具有食饵不完全隐蔽行为和完全隐蔽行为的捕食 - 食饵:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c(1-\gamma)x^n y}{1+(1-\gamma)x^n}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{ec(1-\gamma)x^n y}{1+(1-\gamma)x^n} - dy, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c(1-\beta)^n x^n y}{1+(1-\beta)^n x^n}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{ec(1-\beta)^n x^n y}{1+(1-\beta)^n x^n} - dy, \end{cases}$$

其中参数 γ 和 β 分别表示食饵不完全隐蔽行为和完全隐蔽行为参与者的比例。

以上模型的动力学行为分析主要采用了微分方程章节中的定性与稳定性理论, 读者可参考定性与稳定性理论进行证明。下面主要通过视图的方式展示食饵种群的两类隐蔽行为对种群共存区域的影响, 所

有视图见作者团队已发表的文献[10]，数值模拟所用参数见表 1。

当 $n = 1$ 时，即捕食者捕食食饵种群的过程中采纳 Holling II 功能反应，该功能反应主要描述陆地哺乳动物的捕食方式，例如狼、狮子、老虎等种群的捕食方式。由图 1 可知：两类隐蔽行为影响下的种群共存域均相等。具体来说，攻击率较大时，其共存域面积较大，而攻击率较小时，其共存域面积较小。

当 $n = 2$ 时，即捕食者捕食食饵种群的过程中采纳 Holling III 功能反应，该功能反应主要描述大型海洋哺乳动物的捕食方式，例如须鲸、海豹、海豚等种群的捕食方式。由图 2、图 3 和图 4 横向比较可知，不完全隐蔽行为影响下的种群共存域面积大于完全隐蔽行为影响下的种群共存域面积，这是因为大型海洋哺乳动物的食量相对较大，这将使得这类捕食者的捕食成功率必然要高的多，而只有食饵种群采纳不完全隐蔽的反捕食行为，这类捕食者才能够获得充分的食物资源以保证其种群的长期续存，进而保持种群的生物多样性。但若食饵种群采纳完全隐蔽行为，这必然使得这类捕食者长期无法获得赖以生存的食物资源，最终导致种群生物多样性的丧失。另一方面，由图 2、图 3 和图 4 纵向比较可知，无论食饵种群采纳不完全隐蔽行为还是完全隐蔽行为，种群共存域的面积均随着攻击率的下降而减小。特别地，当

Table 1. Parameter values for numerical simulation of hiding behavior
表 1. 隐蔽行为数值模拟时的参数值

参数	生物学意义	取值范围	取值
x	食饵种群的密度	变量	变量
y	捕食者种群的密度	变量	变量
r	食饵种群的内禀增长率	2.65	2.65
K	种群的环境容纳量	89	89
c	捕食者的攻击率	$0 \leq c \leq 1$	0.56
e	捕食者捕获食饵并将其转为自身增长率的转化率	$0 \leq e \leq 1$	0.21
d	无食饵资源时捕食者的自然死亡率	2.5	2.5
γ	食饵不完全隐蔽行为比例	$0 \leq \gamma \leq 1$	变量
β	食饵完全隐蔽行为比例	$0 \leq \beta \leq 1$	变量

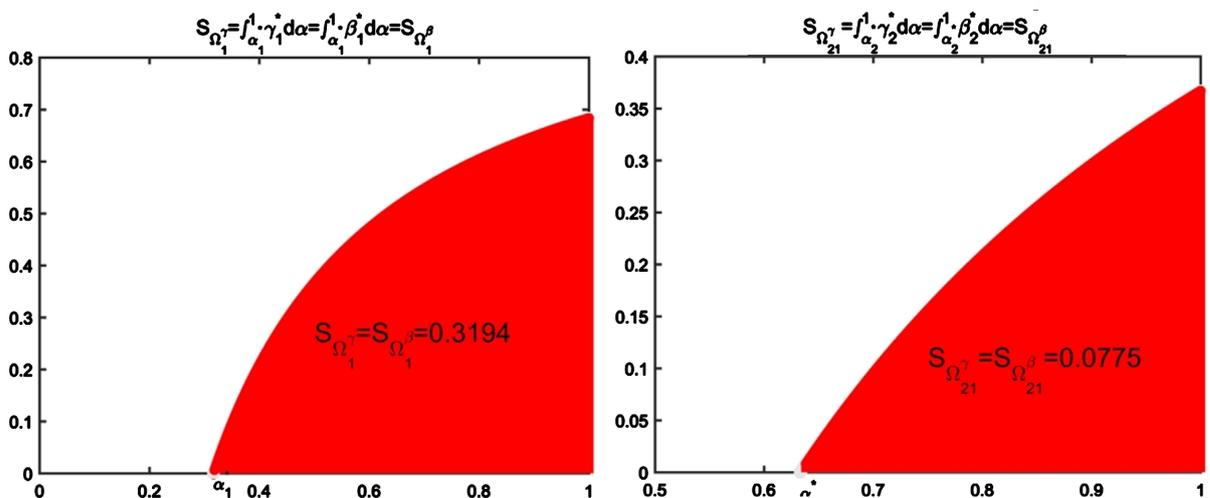


Figure 1. The population coexistent region of the two hiding behavior while $n = 1$

图 1. 当 $n = 1$ 时两类隐蔽行为下的种群共存域

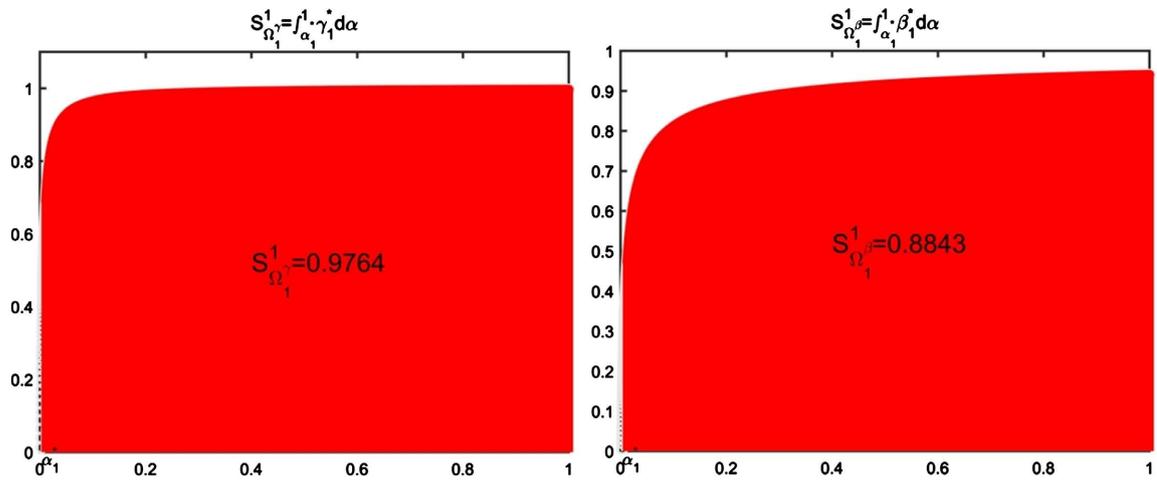


Figure 2. The population coexistent region of the two hiding behavior while $n = 2$ and the larger attack rate
图 2. 当 $n = 2$ 和攻击率较大时两类隐蔽行为下的种群共存域

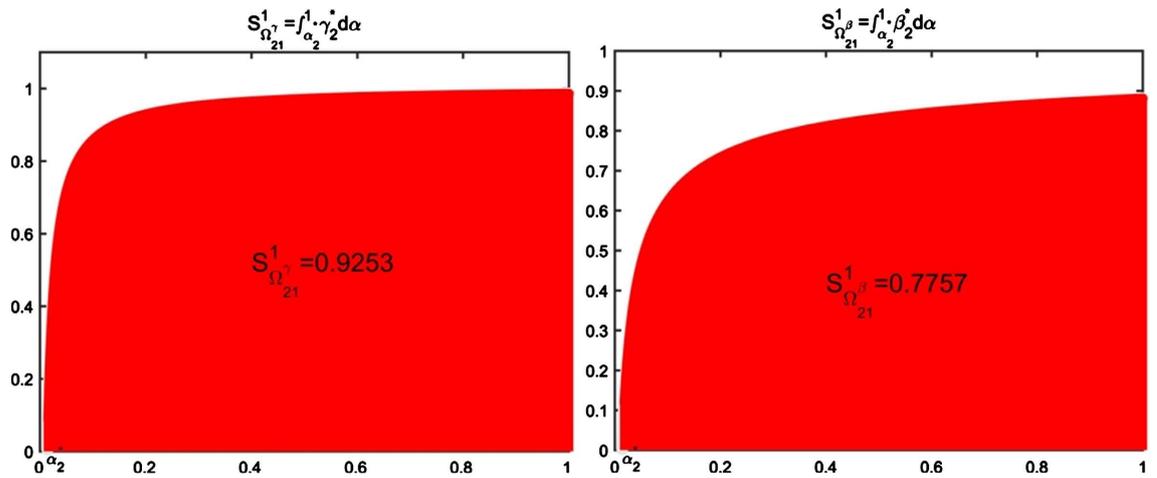


Figure 3. The population coexistent region of the two hiding behavior while $n = 2$ and the moderate attack rate
图 3. 当 $n = 2$ 和攻击率中等时两类隐蔽行为下的种群共存域

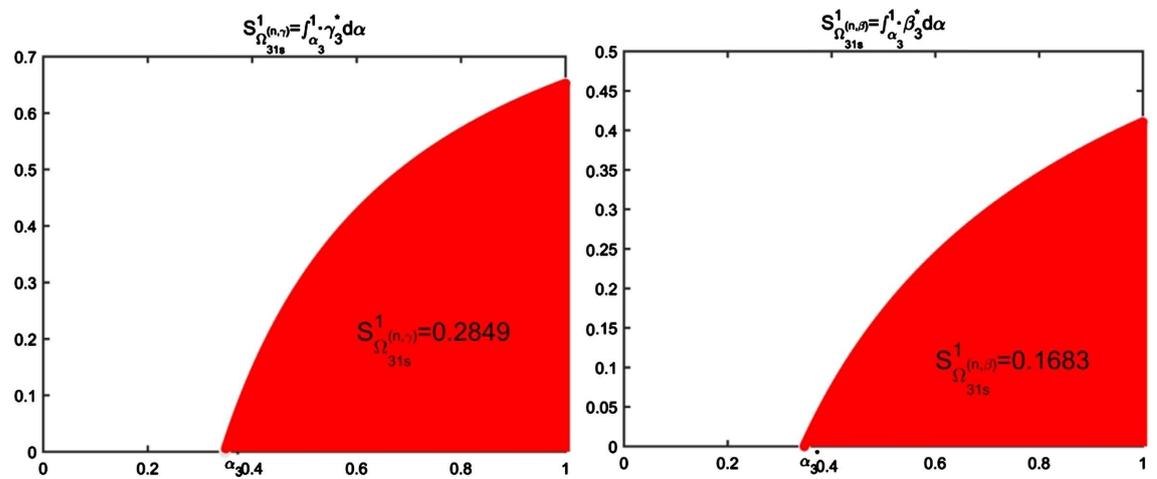


Figure 4. The population coexistent region of the two hiding behavior while $n = 2$ and the smaller attack rate
图 4. 当 $n = 2$ 和攻击率较小时两类隐蔽行为下的种群共存域

捕食者对于食饵种群的攻击率较小时，其共存域将处于种群灭绝的临界值。由此可见，合理的捕食行为将是调节相互作用种群密度和保持生物多样性的有效方式。

2) 具有反捕食行为的捕食 - 食饵模型

由于人类活动、自然灾害、环境污染等的负面影响，使得种群赖以生存的自然环境被严重破坏并且加剧恶化，呈现日趋严重的斑块化，进而导致生境复杂性效应的发生，并伴随者一定程度的随机性。首先，过度的生境斑块化和随机扰动将威胁着自然种群的生存与可持续发展，也是导致物种濒危与灭绝，以及生物多样性丧失的根本原因之一。其次，生境的斑块化和随机性扰动必然使得自然种群时时刻刻面临着生境的优化选择，而同一自然种群对生境的不同选择往往会导致其基因频率的地方性差异，但不同自然种群对生境的不同选择又往往能增加种间的遗传差异，这些差异决定了动物种群的现实分布模式和种群行为的选择与进化动态。为了描述该类自然现象，基于模型(2.3)建立具有生境复杂性效应的捕食 - 食饵相互作用的数学模型，即令模型(2.3)中的 $f(x) = x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ 和 $g(x) = \frac{(1-\alpha)\varphi(x)}{1+(1-\alpha)\varphi(x)}$ ，从而建立如下具有生境复杂性效应的捕食 - 食饵：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c(1-\alpha)\varphi(x)y}{1+(1-\alpha)\varphi(x)}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{ec(1-\alpha)\varphi(x)y}{1+(1-\alpha)\varphi(x)} - dy, \end{cases}$$

其中参数 α 表示生境复杂性效应强度。

以上模型的动力学行为分析主要采用了数学分析课程中的 Taylor 展式章节和微分方程课程中的定性与稳定性理论章节，读者可参考相应的理论与方法进行证明。下面主要通过视图的方式展示生境复杂性效应对相互作用种群动力学行为的影响，所有视图见作者团队已发表的文献[10]，数值模拟所用参数见表 2。

Table 2. Parameter values for numerical simulation of habitat complexity

表 2. 生境复杂性效应数值模拟时的参数值

参数	生物学意义	取值范围	取值
x	食饵种群的密度	变量	变量
y	捕食者种群的密度	变量	变量
r	食饵种群的内禀增长率	3.0	3.0
K	种群的环境容纳量	898	898
c	捕食者的攻击率	$0 \leq c \leq 1$	0.045
e	捕食者捕获食饵并将其转为自身增长率的转化率	$0 \leq e \leq 1$	0.22
d	无食饵资源时捕食者的自然死亡率	1.06	1.06
α	食饵完全隐蔽行为比例	$0 \leq \alpha \leq 1$	变量

由图 5 可知，当生境复杂性效应强度较小时，捕食者和食饵种群的密度呈现脆弱的周期性的震荡现象，即这种震荡容易受到随机性的影响，并进而导致其震荡崩溃。换句话说，当生境复杂性程度较低时，相互作用种群容易受到疾病、气候剧变和人类活动等因素的随机扰动而导致种群灭绝。由图 6 可知，当生境复杂性效应强度较大时，不管相互作用的两种群初始密度如何，捕食者和食饵种群的密度将最终稳定在一个正水平，也就是说相应数学模型的正平衡点全局渐近稳定。此时，相互作用种群的生态系统具

有较强的抗干扰能力，并且能够保持相应的生物多样性。但是，生境的复杂性不宜过高，因为过高的生境破碎和斑块化使得食饵种群面临这食物资源匮乏，而捕食者种群将面临着捕食成功率过低，最终将导致两种群灭绝和生物多样性的丧失。

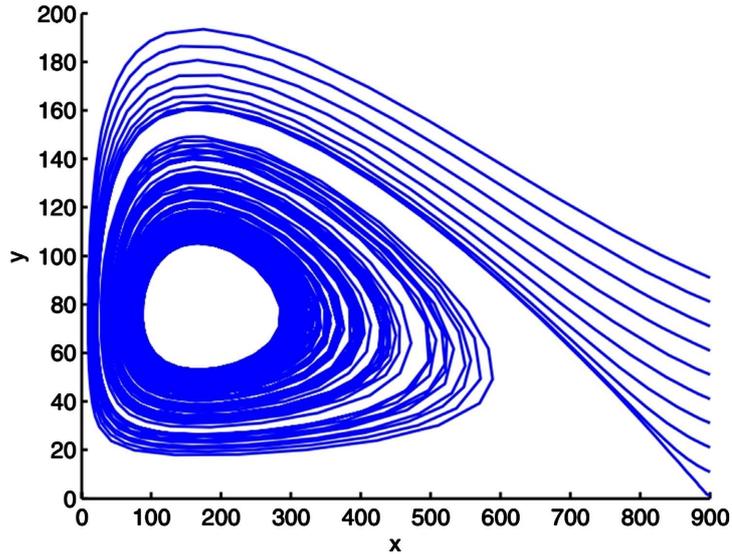


Figure 5. The time series diagram of two population density while the smaller habitat complexity
图 5. 当生境复杂性效应强度较小时的两种群密度的时序图

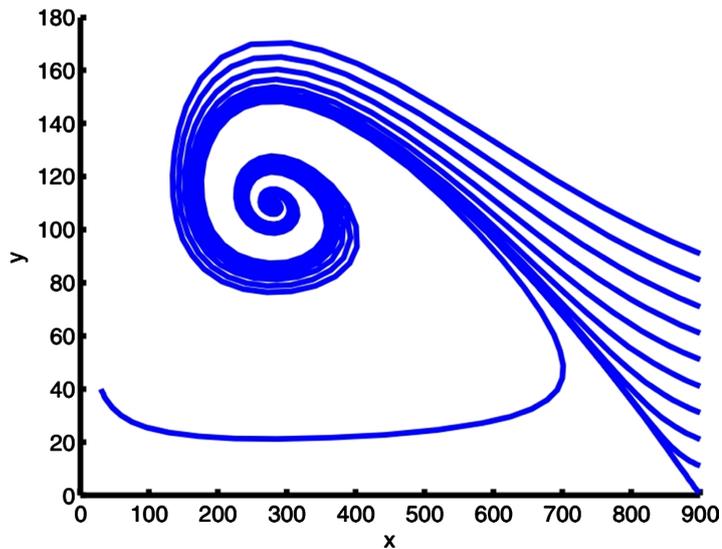


Figure 6. The time series diagram of two population density while the lager habitat complexity
图 6. 当生境复杂性效应强度较大时的两种群密度的时序图

3. 结束语

国家中长期教育改革和发展规划纲要提出要更新人才培养观念与创新人才培养模式，习近平主席在全国教育大会上强调新时代新形势，改革开放和社会主义现代化建设、促进人的全面发展和社会全面进步对教育和学习提出了新的更高的要求。我们要抓住机遇、超前布局，以更高远的历史站位、更宽广的国际视野、更深邃的战略眼光，对加快推进教育现代化、建设教育强国作出总体部署和战略设计，坚持

把优先发展教育事业作为推动党和国家各项事业发展的重要先手棋，不断使教育同党和国家事业发展要求相适应、同人民群众期待相契合、同我国综合国力和国际地位相匹配。为了践行习近平主席的讲话精神，必然要求教师在教学过程倡导将科学研究与教学过程相结合，使得学生能够了解数学的广泛应用，激发学生学习数学的兴趣与主动性。

基金项目

甘肃省自然科学基金重点项目(22JR5RA399)；兰州大学教学改革研究项目(JYXM (一般项目——数学)-2020-2056)；甘肃省科学技术协会项目“数学文化传播与科普”，甘肃省科学技术协会 2024 年度大学生科技志愿服务项目。

参考文献

- [1] 中华人民共和国中央人民政府. 习近平出席全国教育大会并发表重要讲话[EB/OL]. http://www.gov.cn/xinwen/2018-09/10/content_5320835.htm, 2018-09-10.
- [2] 中共中央, 国务院. 国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010-2020) [EB/OL]. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A01/s7048/201007/t20100729_171904.html, 2010-05-05.
- [3] 李上钊, 姜伟. 大学数学课程研究型教学模式的构建[J]. 开封教育学院学报, 2017(37): 81-82.
- [4] 姜启源. 数学模型[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [5] 刘焱南. 高等数学课程中单元教学设计在教学实践中的应用研究[J]. 教育发展研究, 2017(1): 154-155.
- [6] 孙良, 涂玲, 宋曙芹. 研究性课堂教学模式的探索与实践[J]. 电气电子教学学报, 2016, 38(5): 90-92.
- [7] 程铭东. 数学建模融入课程教学的探讨[J]. 黄石理工学院学报, 2009(25): 54-56.
- [8] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [9] 张志强. 高等数学[M]. 第2版. 兰州: 兰州大学出版社, 2008.
- [10] Ma, Z.H., Wang, S.F. and Tang, H.P. (2020) How Do Partially Hiding Behavior and Completely Hiding Behavior Impact Interacting Populations? *Journal of Biological Systems*, **28**, 641-679. <https://doi.org/10.1142/S0218339020500102>