Advances in Philosophy 哲学进展, 2024, 13(5), 1068-1076
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/acpp
https://doi.org/10.12677/acpp.2024.135160

论数学的不确定性：数学的三次危机及其未来

朱文基

吉林外国语大学西方语学院，吉林 长春

收稿日期：2024年5月4日；录用日期：2024年5月24日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

从诠释学的观点看，不确定性乃是知识与生俱来的本质特性，这一点即便在数学中也不例外。在人们的习惯性认知中，数学和逻辑是最具确定性的学科，然而实际上并不是这样。数学并不是一个亘古不变的、适用于一切时间空间的学科，数学本身就体现了不确定性。在数学史上，数学不断地在经历着危机并解决危机，就说明了数学本身不过是人类对世界的认知方式而已。迄今为止，数学一共经历了三次危机。第一次数学危机是自然数的危机，危机的结果是严格的实数理论的建立。第二次数学危机是连续性的危机，危机的结果是微积分的严密基础的建立。第三次数学危机是集合论的危机，涉及了数学的基础。迄今为止，这一危机并没有得到完美的解决。从数学危机的产生和解决过程来看，数学正是由于危机的存在才得以不断前行，而数学知识也正是在一次次的危机中而得以构造。

关键词

不确定性，数学危机，未来

On Mathematical Uncertainty: The Three Crises of Mathematics and Their Future

Wenji Zhu

College of Western Languages, Jilin International Studies University, Changchun Jilin

Received: May 4th, 2024; accepted: May 24th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

From the point of view of Hermeneutics, uncertainty is the inherent nature of knowledge, even in mathematics. In people’s habitual perception, mathematics and logic are the most determi-

文章引用: 朱文基. 论数学的不确定性: 数学的三次危机及其未来[J]. 哲学进展, 2024, 13(5): 1068-1076.
DOI: 10.12677/acpp.2024.135160

nistic subjects, but in reality, they are not. Mathematics is not an immutable subject, applicable to all time and space, and mathematics itself reflects uncertainty. In the history of mathematics, mathematics continues to experience and solve crises, which shows that mathematics itself is only a way of human cognition of the world. So far, mathematics has experienced a total of three crises. The first mathematical crisis was the crisis of natural numbers, and the result of which was the establishment of a rigorous theory of real numbers. The second mathematical crisis is the crisis of continuity, and the result of which is the establishment of a rigorous foundation for calculus. The third mathematical crisis was the crisis of set theory, which dealt with the foundations of mathematics. So far, the crisis has not been solved perfectly. From the perspective of the generation and resolution of mathematical crisis, it is precisely because of the existence of crisis that mathematics can continue to move forward, and mathematical knowledge is also constructed in crisis after crisis.

Keywords

Uncertainty, The Crises of Mathematics, Future

1. 引言

一般而言，人们总是赋予数学和逻辑学不因具体时间空间而改变的性质，将其作为确定性最后的堡垒，认为其是最具确定性的学科，并以此为真理寻求依据，特别是在“欧几里得几何学确立了以数学为典型形态的科学知识的确定性性质”([1]: p. 78)以后，“为‘确定性’性质的科学知识提供了范本式形态，以数学为典范形式的纯粹科学知识是以‘确定性’为目标的，诉求于一种纯粹理性形式的绝对普遍性认识，即使面对经验性的不确定性知识，也总是力图通过诉诸人的理性或万事万物的普遍性存在‘理念’来说明，所有真正的知识都是确定的、不变的和必然的”([1]: p. 78)。“但随着现代模糊数学和物理学中测不准原理的新发展，科学之确定性受到挑战，趋于终结，形成了‘不确定性的’新科学知识观。近代诠释学的兴起，使诠释学作为一门学科获得了建构，也从特定方法论上为‘不确定性的’精神科学作为一门科学给予了奠基和捍卫”([1]: p.78)。以至于到今天，当我们面对诠释学文本的时候会悲伤地发现，对真理的信仰就如同对上帝的信仰一样会瞬间崩塌。对于真理而言，它具有“放之四海而皆准”的普遍性。然而在诠释学看来，真正的普遍性乃是有限性的普遍性，格朗丹就说过，“哲学本身就体现为一个有限性的功能，它必须充分意识到其自身的有限性，正是在思考时，我们明确地认识到，我们最需要记住的是我们普遍的有限性”[2]。对于数学而言也不例外，数学也是一门具有有限性的学科。在整个数学史上，数学总是在危机中前行正是对其自身有限性的证明。不过，正是因为有限性的存在，数学也才拥有了在危机中前行的可能性。

2. 第一次数学危机及其解决

数学起源于哲学，或者说，数学与哲学最初是一个学科，这应该是亚里士多德以来人们的共识。之所以如此，皆因亚里士多德曾经以其知识结构图说明了哲学与各门学科的关系。参见图 1。

在这里，显然，哲学被亚里士多德看作一种技艺，而这其实是源自于毕达哥拉斯的。传说最早发明哲学这个词的就是毕达哥拉斯，“当古希腊城邦弗流斯举办奥运会的时候，他来到了弗流斯，国王雷翁

恭敬的向他请教什么叫‘技艺’，但毕达哥拉斯却打了一个比喻回答了什么叫‘哲学’”([4]: p. 1)。在毕达哥拉斯的时代，哲学与技艺未能得以明显区分，这是鸿蒙未开而混沌初分之时人类知识的常态。不过，亚里士多德区分了这一知识体系，他将知识区分为逻辑学、理论科学、实践科学和创制科学，其中数学属于理论科学中非独立存在但永不变动的东西。也就是说，在亚里士多德的认知中，数学具有确定不移的性质。数学的研究对象是数，在毕达哥拉斯那里，数是作为独立的灵魂而存在的，人们可以通过数的灵魂去窥探神，并可以通过对神的探索而使自身的灵魂升华。然而在亚里士多德那里，数是非独立存在的东西。

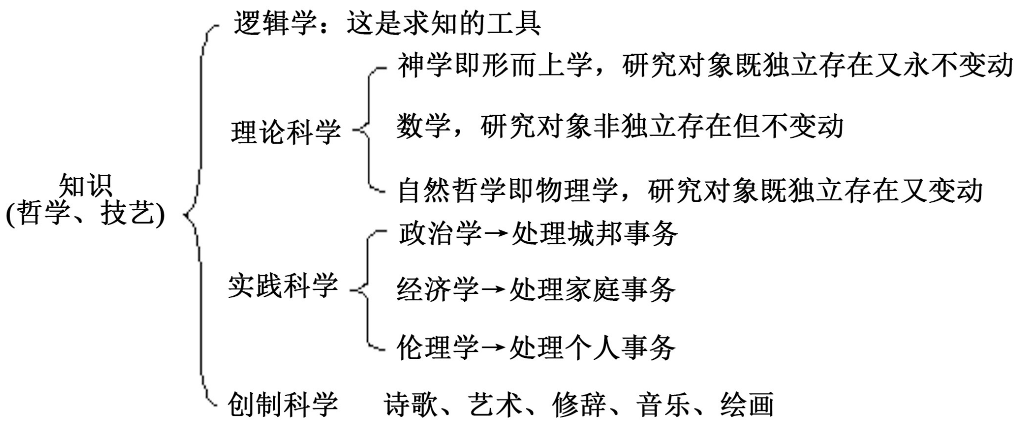

Figure 1. Aristotle’s scientific knowledge structure diagram [3]
图 1. 亚里士多德科学知识结构图[3]

毕达哥拉斯大约生活于公元前 570~前 490 年，比亚里士多德(公元前 384~前 322)早了一百多年。古希腊哲学的起源是自然哲学，而毕达哥拉斯是最早的自然哲学家之一。传说他的老师是西方第一个哲学家泰列斯，泰列斯将水当作世界的本原，然而毕达哥拉斯却敏锐的发现了两个问题：“其一，可见的感性原则如何能解释抽象的理性本原？其二，一中何以生出多来”([4]: p. 18)？为此，毕达哥拉斯不再于感性事物中寻找本原而诉诸于数。在他那里，数作为一种抽象的原则被神圣化。在他看来，万物都包含数，甚至万物都是数，数是变化多端的万物之真相。“它是众多的、不变的，一切事物的性质都可被归结为数的规定性；……数字先于事物而存在，是构成事物的基本单元。1 点 2 线 3 面 4 体，水火土气四元素以不同的方式相互结合与转化，从而产生出世界万物”([4]: p. 18)。这样，毕达哥拉斯就构建了以“数”为万物始基的宇宙观。在他那里，世界就是一个由数和数的关系构成的和谐系统，每一种事物都是数的和谐，数是构成千差万别事物的根本原因。

今天看来，毕达哥拉斯对数的看法是相当牵强的。不过，谁都不能否认毕达哥拉斯在数学史上的重要地位，他因发现勾股定理而著称于世。在中国古代，勾股定理为中国人所熟知。这大约是因为成书于公元前 2 到 1 世纪的数学著作《周髀算经》中，记载了假托商高同周公的一段对话，在那本书的记载中，商高说：“故折矩，勾广三，股修四，径隅五”[5]。这个对话提出了勾股定理的一个特例。不过，如果要说谁对勾股定理做了最早证明的话，这一荣誉大概可归功于毕达哥拉斯而非商高，因为他用演绎法证明了“直角三角形斜边平方等于两直角边平方之和”，即 $X^2 + Y^2 = Z^2$。这种形式化的表达方式为商高所不具备。如果说，商高对勾股定理特例的发现体现了一种感性原则，那么可以说，毕达哥拉斯对勾股定理的演绎则体现了一种理性原则。

毕达哥拉斯的“万物皆数”有两个方面的内涵，“(1) 宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。

(2) 任意两条线段都是可公度的”([6]: P. 65)。后来，毕达哥拉斯学派中的一个成员希帕索斯思考了一个问题：边长为 1 的正方形，其对角线长度是多少呢？他发现这一长度既不能用整数，也不能用分数来表示。希帕索斯的发现在数学界掀起了一场巨大风暴，因为它动摇了人们的数学常识：任何量，在任何精确度的范围内都可以表示成有理数。这一发现直接动摇了毕达哥拉斯学派的数学信仰，使毕达哥拉斯学派大为恐慌。后来，希帕索斯被毕达哥拉斯的忠实门徒投海溺毙。“然而，科学是无法封锁的，谁为科学划定禁区，谁就变成科学的敌人，最终被科学所埋葬”([4]: p. 18-19)。希帕索斯的发现将“万物皆数”的观点打破，它直接证明了毕达哥拉斯的失败：数不再是可感事物背后的理性原则；也间接提出了对亚里士多德学科分类的质疑：既然数是非独立存在的，像根号 2 这样的无理数究竟与什么事物结合在一起？希帕索斯的这一伟大发现不但是对毕达哥拉斯学派的致命打击，而且是对当时所有古希腊人观念的一个巨大冲击，它简直把以前所习以为常的事情根本推翻了。更糟糕的是，面对这一荒谬，人们竟然毫无办法，这直接导致了人们对于数学认识的危机，史称“第一次数学危机”。直到约公元前 370 年，柏拉图的学生欧多克萨斯(Eudoxus，约公元前 408~前 355)才用公理化方法创立了新的比例理论，通过无理数解决了这一问题。欧多克萨斯对第一次数学危机的解决使人们的眼光转向了几何，促进了几何学的繁荣昌盛。

第一次数学危机的出现与解决引发人们思考：勾股定理、乃至整个数学系统具有亘古不变的特性吗？它是一劳永逸解决了数学领域的真理问题呢，还是仅仅是对世界的一种解释？而所谓解释，荷尔德林曾经说：“我们是一个没有解释的符号”[7]。在他看来，时间和事物或许都是不确定的，只是给予解释意义的一种符号。这一点或许与毕达哥拉斯的“万物皆数”有所相似，但却又大不相同。荷尔德林或许认为，一种不确定事物将会在意义中安定下来，而毕达哥拉斯则需要将世间万物都归结于数中以确定其所具有的意义。其依据在于，数本来就是有意义的，尽管这些意义具有神秘色彩。例如，1 表示理性，2 表示意见，4 表示正义，5 表示婚姻，10 表示完美，等等。对于一个认识共同体来讲，当他们依赖于某些东西的时候，必然会赋予某些东西重要的意义和价值。毕达哥拉斯提出“万物皆数”的思想后，作为学术共同体的毕达哥拉斯学派就此形成。然而学术共同体之所以存在，不过是因为世上本无确定不移的东西，人们需要在有限领域达成并保持共识。然而，既然是有限领域，那么超出领域之外，人们的共识就会不复存在。这一点，由毕达哥拉斯学派的崩溃来看，再典型不过了。

3. 第二次数学危机及其解决

无理数的发现使数的概念扩大，对数学界、哲学界都具有巨大而深刻的影响。它迫使人们将对有形事物的关注转化为对无形事物的思考。因为，人们可以描述一件事物，但是却不能够描述根号 2 个事物。人们对根号 2 的思考扩大了思维的认知和理解能力，不过，也正是因为人们对根号 2 的思考引发了数学的第二次危机。就此而言，第二次数学危机的产生其实在第一次数学危机时就已经埋下了种子。为了解决第一次数学危机，人们对数进行了扩展，扩大了对数的认识；为了解决第二次数学危机，人们对连续性进行了详细的讨论，并给予了充分的论证。

在第一次数学危机中，芝诺悖论已经给连续性这一问题推开了大门。按照芝诺，古希腊神话中善跑的英雄阿基里斯(又名阿喀琉斯)是追不上乌龟的。在他和乌龟的竞赛中，他的速度为乌龟速度的十倍，乌龟在前面 1000 米跑，他在后面追，他想要追上乌龟，就必须先要到达乌龟离他 1000 米远的所在。然而，当阿基里斯追到 1000 米时，乌龟已经又向前爬了 100 米。于是，一个新的起点产生了。阿基里斯必须继续追，而当他追到乌龟爬的这 100 米时，乌龟又已经向前爬了 10 米，阿基里斯只能再追向那个 10 米。就这样，乌龟会制造出无穷个起点，它总能在起点与自己之间制造出一个距离，不管这个距离有多小，但只要乌龟不停地奋力向前爬，阿基里斯就永远也追不上乌龟。“阿基里斯追龟”在逻辑上完美无缺，

但人们清楚，现实中阿基里斯是能够追上乌龟的，这一点芝诺也不可能否认。那么问题出在哪里了呢？悖论本身的逻辑并没有错，它之所以与实际相差甚远，在于芝诺与人们采取了不同的时间系统。人们习惯于将运动看作时间的连续函数，而芝诺的解释则采取了离散的时间系统，即无论将时间间隔取得再小，整个时间轴仍是由无限的时间点组成的。换句话说，连续时间是离散时间将时间间隔取为无穷小的极限。

“阿基里斯追龟”所反映出的思维模式在芝诺“飞矢不动”的悖论中也得以体现。按照芝诺，我们设想一支飞行的箭，在每一时刻，它位于空间中的一个特定位置。时刻是特定的时间，是时间的最小单元，不具有连续性。假设箭在某个时刻中运动了，那么它将在这个时刻的开始和结束位于空间的不同位置。这说明时刻具有一个起点和一个终点，从而至少包含两部分，但这明显与时刻是时间的最小单元这一前提相矛盾。由于时刻不具有持续性，因此箭在每个时刻处于某一特定的点上，只能是静止的。鉴于整个运动期间是由时刻组成的，而每个时刻又只有静止的箭，所以芝诺断定，飞行的箭总是静止的，它不可能在运动。芝诺的这种思维只是看到了飞箭运动的间断性，却没有看到运动的连续性。芝诺悖论的提出在数学王国掀起了一场轩然大波。因为它是如此的无理，但却是一个数学家们不能不解决的问题。芝诺悖论反映了希腊人已经看到“无穷小”与“很小很小”的矛盾，但他们无法解决这些矛盾。其后果是，希腊几何证明中从此就排除了无穷小，直到 17 世纪晚期微积分这门学科的出现。

人们普遍认为，牛顿和莱布尼茨是微积分的创始人。[1]在《流数术和无穷级数》中，牛顿指出，变量是由点、线、面的连续运动产生的。他把连续变量叫做流动量，把这些流动量的导数叫做流数。牛顿在流数术中所提出的中心问题是：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度(微分法)。不久以后，牛顿又提出反流数术，即，已知运动的速度，求给定时间内经过的路程(积分法)。牛顿之后不久，德国人莱布尼茨于 1684 年发表了现在世界上公认最早的微积分文献。这份文献具有划时代的意义，含有现代的微分符号和基本微分法则，远优于牛顿的微积分符号，对微积分的发展有极大的影响。直到今天，我们使用的微积分通用符号还是当时由莱布尼茨精心选用的。微积分是能够应用于函数的一种新的普遍的方法，它将数学脱离了几何学，发展成一门独立的学科。同时，由于牛顿和莱布尼兹两人分别是物理学家和数学家，而物理学科与数学学科总呈现出密不可分，相辅相成的关系，所以两人的研究也促进了物理学的发展。

微积分诞生之后，数学迎来了一次空前的繁荣，对 18 世纪的数学产生了重要而深远的影响。但是，牛顿和莱布尼茨的微积分都缺乏清晰的、严谨的逻辑基础。比如说，对无穷小量而言，它究竟等于不等于零？就牛顿和莱布尼茨的应用而言，它必须既是零，又不是零。显然，这在形式逻辑上是一个悖论。然而，微积分的漏洞在初创时期是不可避免的，科学上的巨大需要战胜了逻辑上的缜密考虑。科学家们需要做的事情太多了，他们急于去攫取新的成果，基本问题只好先放一放。达朗贝尔曾经说过：“向前进，你就会产生信心”[8]！数学史的发展一再证明自由创造总是领先于形式化和逻辑基础。在微积分的发展过程中，出现了这样的局面：一方面，微积分创立之后立即在科学技术上获得了应用，从而迅速地发展；另一方面，微积分理论在当时是不严密的，出现了越来越多的悖论。然而，正是由于人们对数学的理解和对科学的探究还没有足够多的认识，对于一些复杂的计算无法进行验证，所以在数学的历史长河中，人们能够反复讨论微积分，去享受微积分富含的无穷乐趣。或许这也正告诉人们，既要脚踏实地，又不能一成不变。要反复琢磨，不停探索，最终肯定会有新的发现。

正是因为微积分初创时期的漏洞，牛顿和莱布尼茨的微积分理论受到了神学家贝克莱的批评。贝克

[1]关于牛顿和莱布尼茨谁更早发明微积分是一段公案。牛顿在 1671 年写了《流数术和无穷级数》，在这本书中，牛顿指出，变量是由点、线、面的连续运动产生的，否定了变量是无穷小元素的静止集合这一观点。他把连续变量叫做流动量，把这些流动量的导数叫做流数。在写完这本书后，牛顿觉得自己的考虑不够完善，直到 1736 年才将此书出版。不过，1686 年的时候，莱布尼茨就发表了第一篇积分学文献《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》。牛顿认为莱布尼茨抄袭了自己的学术成果，从而对莱布尼茨进行了多方面的打压。不过，学界一般认为，二人分别独立发展了微积分。

莱出版了《分析学家；或一篇致一位不信神的数学家的论文，其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是不是比宗教的神秘、信仰的要点有更清晰的表达，或更明显的推理》，对微积分进行攻击。面对贝克莱的攻击，1821 年，卓越的法国数学家 A.L.柯西出版了《分析教程》，抓住极限概念，指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量，重新定义了导数与积分，成功的用现代极限理论说明了导数的性质。到了 19 世纪下半叶，魏尔斯特拉斯批评柯西等前人采用的“无限趋近”等说法具有明显的运动学含义，代之以更精密的表述，重新定义了极限、连续、导数等分析基本概念，本质上使得数学分析达到了今天的严密形式。后来，戴德金和康托尔分别给出了实数的定义，并在他们各自的实数定义下严格证明了实数系的完备性。实数定义及其完备性的确立，标志着由魏尔斯特拉斯倡导的分析算术化运动宣告完成。后来，康托尔发现并完善了集合论，让众多数学家以为找到了构建数学大厦的工具。在 1900 年的数学家大会上，数学大师庞加莱更是直接宣布，数学大厦已经建设完成。不过很快，第三次数学危机爆发了，庞加莱的预言破产了。

4. 第三次数学危机及其解决

“一般认为，由于严格的实数理论和极限理论的建立，上述两次数学‘危机’已经得到解决；……由于严格的实数理论和极限理论事实上都是以集合论为基础的，因而在一定的意义上，因集合论悖论所导致的第三次危机就可以看作是前两次‘危机’的继续和深化”([9]: p. 136-137)。第三次数学危机爆发的起因，是人们在康托尔一般集合理论的边缘发现了悖论。由于集合概念已经渗透到众多的数学分支，导致集合论事实上成了数学的基础，因此集合论中悖论的发现自然引起了对数学整个基本结构有效性的怀疑。在这其中，罗素悖论最为经典。

1901 年 6 月，罗素在运用康托尔创立的集合论解决自然数数列问题时，发现了悖论。按照罗素，一切事物都可分为“与自身相等同”和“与自身不相等同”的两类。同样，一切集合也可分为“与自身相等同”与“与自身不相等同”的两类。悖论就出在“一切与自身不相等同的集合组成的集合”这一概念。试问：这一集合与自身相等同，还是与自身不相等同呢？如果它与自身相等同，就是说，它与组成自身的集合相等同，也就是“与自身不相等同的集合”；如果它与自身是不相等同的，那么根据“一切集合不是与自身不相等同的集合，就是与自身相等同的集合”这一逻辑区分标准，它就是与自身相等同的集合。这一矛盾具有“如果 A 是 A，则 A 是非 A；如果 A 是非 A，则 A 是 A”的形式，因而是一种悖论。罗素悖论还具有语义学的表达方式，如说谎者悖论与理发师悖论。说谎者悖论指的是：相传克里特岛上的哲学家爱比米尼说，所有克里特人都是说谎者。那么，如果爱比米尼说谎了，克里特岛上就有不说谎的人，这与所有克里特人都是说谎者构成悖论。如果爱比米尼没有说谎，因为他是克里特人，那么，这与所有克里特人都是说谎者构成悖论。理发师悖论与说谎者悖论具有同等意义。理发师悖论指的是：理发师声称，他只给不给自己理发的人理发。问题就出在这里，谁给理发师理发呢？如果他给自己理发，那么他就不能给自己理发。如果他不给自己理发，那么他将给自己理发。无论是集合论悖论，还是语义学悖论，二者本质上都是逻辑悖论，因为数学的严格性和精确性建立在逻辑的基础之上，这一问题直接威胁到数学的基础。

罗素悖论给当时正为了微积分的严格基础被建立而欢欣鼓舞的数学家们泼了一盆冷水。一向认为推理严密，结论永远正确的数学，竟在自己最基础的部分推出了矛盾！而推理的方法如此简单明了，这对数学方法的可靠性再次造成了猛烈的冲击。1902 年 6 月 16 日，罗素写信告诉弗雷格他的这一发现。弗雷格读后大为震惊，他在即将出版的《算术基本法则》第二卷的结尾处写了一段话：“一个科学家的工作完成之日，也是这一建筑物的基础倒塌之时，没有什么比这更糟糕了。当本书即将付梓之时，罗素先生的一封信把我置于这样的境地”[10]。著名的数学家希尔伯特也说：“必须承认，在这些悖论面前，我

们目前所处的情况是不能长期忍受下去的。人们试想：在数学这个号称可靠性和真理性的模范里，第一个人所学的、教的和应用的那些概念结构和推理方法竟会导致不合理的结果。如果甚至于数学思考也失灵的话，那么应该到哪里去寻找可靠性和真理性呢”[11]？

罗素悖论出现之后，数学家们进行了一系列思考。他们认为，再如同康托那样直观地说明什么是集合不行了，像弗雷格那样用概念的外延来定义集合也无法解决问题。罗素本人对这一悖论也进行了认真的思考，他在 1906 年出版的《数学原理》一书中提出了这一问题的解决方案。罗素认为，一切悖论都来源于自我指示的恶性循环，即：用已经蕴涵着整体规定性的个体定义反过来规定整体。比如，把一切事物分成“与自身相等同的”和“与自身不相等同的”两类，这是对个体事物的规定，不适用于包含一切类的总类。否则，“一切与自身不相等同的类所构成的类”就成为自我指示的恶性循环。同样，爱比米尼以整体名义所说的“所有克里特人都是说谎者”是对每一个克里特人所做的判断，不适用于他所代表的整体；理发师所做的适用于每一个人的声称，也不适用于他所代表的整体。这样，罗素认为，整体与个体是分层次的，他提出逻辑类型的层次理论，认为对集合和概念的研究都应该分层次引入，他把逻辑概念、谓词、命题都分了层次和类型。罗素认为，当定义集合的时候，必须说明层次。按照罗素，n + 1 级类型由 n + 1 级谓词和 n 级及 n 级以下变元构成。一个谓词只有用来表述较低级对象时才是有效的，如果用来表述自身(或同一级对象)和较高级对象，则是无效的，悖论就会产生。按照罗素的层次理论，悖论可以消除，因为在悖论中，“所有不以自己为元素的集合构成的集合”这个定义，没有说明是哪一层的，违反了规则。

但是，由于罗素理论太过于庞大和复杂，这与数学家们通过简明陈述表示复杂问题的原则相违背，因为大部分数学家都希望数学建立在简明可靠的牢固基础之上。数学家们希望用比较简单的方法解决罗素悖论，不倾向于罗素庞大的设计。对此，策墨罗首先想出来了一套办法，他提出了一个“有限抽象原则”，把原来的素朴集合论加以公理化，在这一公理化集合论中，集合成为不加定义的原始概念，它所具有的只是公理所规定的性质。按照策墨罗，只须对公理适当地加以选择，我们就可做到既使新建立的集合理论能成为整个数学的基础，同时又确保新的理论不会导致悖论。一般认为，策墨罗的理论并未完全脱离罗素的思路，策墨罗曾经明确表达过自己关于解决悖论的方法，他说：“在解决这一问题时，我们必须一方面对这些原则加上足够的限制以排除悖论；但另一方面又必须使它们在充分广泛以保留理论中一切有价值的地方”[12]。具体的说，策墨罗的意思是，“悖论的出现是由于使用了太大的集合，特别是大全集，因此必须对康托的素朴集合论加以限制，特别是必须抛弃前面所提到的概括原则，因为，从概括原则可立即推出大全集的存在性”([9]: p.145)。策墨罗解决问题的方式具有明显的局限性，“就已知的集合论悖论来说，其共同的特点在于对大集合特别是大全集的承认，因此，人们普遍认为，这些悖论已不可能……得到构造，更准确地说，是不可能按照原来的方式……得到构造”([9]: p. 147-148)。策墨罗之后，其他一些数学家也相继提出了一些公理去解决策墨罗所留下的问题，比如，弗伦克尔和斯科朗提出了替换公理，他们之所以提出这些公理，是因为他们发现，如果没有替换公理的话，某些结果的证明就是不可行的。美籍匈牙利数学家冯 • 诺伊曼(von Neumann, J.)提出了基础公理，其作用是在系统中排除那些不正常的集以避免悖论。

无论数学界对第三次数学危机的讨论如何激烈，不过，要说第三次数学危机被他们解决了，恐怕大多数人都不认同。因为，在数学史上，罗素悖论的出现只是延缓了数学大厦的建设，“哥德尔不完备性定理”才宣告了数学大厦根本无法建成。1931 年，年方 25 岁的哥德尔证明：任意一个包含一阶谓词逻辑与初等数论的形式系统，都存在一个命题，它在这个系统中既不能被证明为真命题，也不能被证明为假命题。也就是说，在一个公理系统中，总有一些命题如同悖论一样。如果想要证明或者证伪这些命题，就需要额外增加公理的数量。这一定理意味着，公理的数量必须得是无限的，否则就一定存在一些领域，

我们的头脑无论如何聪明，我们的技术无论多么先进，都无法弄明白。这并不是能力问题，而是宇宙法则给我们设置的障碍。后来，哥德尔继续提出第二个定理：如果系统 S 含有初等数论，当 S 无矛盾时，它的无矛盾性不可能在 S 内得到证明。哥德尔不完备性定理基于罗素悖论的框架，它在数学上直接证明了希尔伯特的“算数公理的相容性”原理是错的。由此，以希尔伯特为首的一群顶级数学家的宏伟梦想就此破灭了。100 年快过去了，如今的数学家们仍旧试图搭建所谓的数学大厦，但是从目前的进展来看，前路漫漫，未有穷期。

5. 结语：数学危机的本质及其未来

在数学的三次危机中，人们不断地经历这样一个过程：如果在一个数学理论中发现了悖论，而这一悖论所涉及的又是理论的基础的话，人类就会产生一种危机感。那么，数学危机的本质到底是什么呢？事实上，它和物理学所遇到的危机一样，“并不是数学自身的危机，而只是一种因旧观念的急剧崩溃而造成的认识上的危机”([9]: P. 183)。从旧观念的崩溃到新观念的产生，在危机得以解决的同时，人们的认识也得以进步。而这一进步，乃是人类理性之思的无限性思维为有限的知性认识开辟潜在无限可能的过程，这是一个认识无限推进的过程，也是科学产生的过程，这个过程更是人类运用思维定式将认知成果固定下来的过程。“科学产生的动力机制表明了，人类的认识不可能永远停留于某个层次或者某种水准而止步不前”([4]: p. 229)。这正是库恩的科学革命论所告诉我们的。

在数学上，“尽管悖论可以消除，矛盾可以解决，然而数学的确定性却在一步一步地丧失”([6]: P. 65)。确定性的丧失使我们意识到，我们的认识绝对不可能是终极真理，而只能是范式。在科学上，一种旧的观念往往使大家习以为常。这种观念被某一个科学共同体所共同认可，就会形成为他们的共同信念，这种共同信念被称之为范式。范式是一个科学发展阶段的模式。库恩认为，范式这个概念与科学家集团或科学共同体密切相关，它为科学家集团或科学共同体共同具有，但却并不是认识论意义上的知识体系，而仅仅是科学家集团的共同信念。这种共同信念是科学家集团的成员们在一定时期由于接受共同的教育训练，以共同的基本理论、基本观点和基本方法去解决一切疑难而形成的。对于数学体系的大厦而言，它归根到底就是一种范式。

然而，人们对于范式的信念不可能是完美无缺的，因为人们对观念的认识一定是经验负载的结果。所有的观念都不可能脱离先天理论的指导而独立存在，人们的理论与观察经验密切联系并内含于经验当中。就此而言，我们对于数学公理的认知也仅仅是一种约定而已。这种认识之所以为数学家们所普遍接受，并不是因为它是亘古不变的真理，而是因为数学家们在特定领域内对其做出了合理解释。对于数学的公理体系而言，一方面，从心理上说，它是数学家共同体共有的信念；另一方面，从理论和方法上说，它是数学共同体共有的模型和框架。总体来说，它就是数学家集团具有的共同信念。这种信念规定了数学家们共同的基本理论、基本观点和基本方法，从而形成了共同的传统，并为数学的发展规定了共同的方向。

不过，在现实中，我们每每看到科学领域的崩塌，数学的三次危机就是既有科学理论崩塌的经典范例。不过，科学是渐进的和革命性的。最初，每一门科学的发展都会形成科学共同体所共同认可的“常规科学”。常规科学建立在一种或者多种过去科学成就基础的研究之上，它是当时一切科学的显著模式，并为后来的发展提供了开放的空间。然而，随着科学研究的不断发展和新事实的不断涌现，常规科学必然就会面临无法解决的问题，原有的范式面临新的实验结果的挑战而导致认识的不断深入，认识的深入推进使常规科学发生革命。在数学中，悖论就是常规科学发生革命的起因。科学的发展是经过科学革命完成的，数学的发展是经过对悖论的解决而完成的。科学革命的结束意味着新的常规科学时期的开始，而悖论的解决则意味着一座新的数学大厦得以建立。第一次数学危机和第二次数学危机的解决使一些数

学巨人站在了历史的坐标之上，我们相信在第三次数学危机的解决中，必然会有人类历史的新的坐标出现！

基金项目

2023 年度福建省社会科学基金重点项目：雅克·克莱恩的形式化思想研究(FJ2023A018)。

参考文献

[1] 张能为. 科学知识何以是不确定的——伽达默尔的哲学基础论理解及其意义论析[J]. 广西大学学报(哲学社会科学版), 2024(1): 78-96.

[2] (加拿大) 让·格朗丹. 哲学解释学导论[M]. 北京: 商务印书馆, 2009: 193.

[3] 李朝东. 西方哲学思想[M]. 兰州: 甘肃人民出版社, 2000: 100.

[4] 朱光亚. 从传统到现代: 中西哲学的当代叙事[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2019.

[5] 程贞一. 周髀算经[M]. 闻人军, 译. 上海: 上海古籍出版社, 2012: 1.

[6] 陆新生. 数学史上的三次危机[J]. 科学教育与博物馆, 2020, 6(1): 65-69.

[7] 伽达默尔. 创作与解释[M]. 邓安庆, 等, 译. 上海: 远东出版社, 1997: 502.

[8] 梁俊. 数学名著的教育价值研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2008.

[9] 夏基松, 郑毓信. 西方数学哲学[M]. 北京: 人民出版社, 1986: 136-137.

[10] Geach, P. and Black, M. (1952) Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege. Basil Blackwell, New York.

[11] 大卫·希尔伯特. 论无限[M]//保罗·贝纳塞拉夫, 希拉里·普特南. 数学哲学. 朱水林, 等, 译. 北京: 商务出版社, 2003: 141.

[12] 王浩. 从数学到哲学[M]. 桂林: 广西师范大学出版社, 1974: 190.