Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2445-2450
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135232

4-连通P_0-Minor-Free图的特征

魏林嵩，杨卫华*

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2024年4月29日；录用日期：2024年5月22日；发布日期：2024年5月31日

摘 要

设H和G是两个图，如果图H可以通过从图G的一个子图中收缩边然后删除产生的环和平行边得到，我们就把图H叫做图G的一个minor。如果图G没有同构于图H的minor，我们称图G为H-minor-free图。图论中很多猜想都与H-minor-free图有关，例如Hadwiger猜想和Tutte 4-流猜想等。为了推动这些猜想的解决，我们目前非常关注Petersen-minor-free图的结构。由于它们都是15条边的3-连通图，直接刻画起来比较困难。因此为了刻画Petersen-minor-free图，许多学者尝试对每个边数小于15的3-连通图进行刻画去接近Petersen-minor-free图。记P_0为Petersen收缩两条完美匹配边和一条非完美匹配边得到的子图基础上添加一条边得到的13条边的图。本文下面将给出完整的4-连通P_0-minor-free图的刻画。

关键词

图minor，四连通图，Petersen图

A Characterization of 4-Connected Graphs with No P_0-Minor

Linsong Wei, Weihua Yang*

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 29th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

For two given graphs H and G, if H can be obtained from a subgraph of G by contracting edges then deleting the resulting loops and parallel edges, we call H a minor of G. If G has no minor isomorphic to H, G is H-minor-free, and H is a forbidden minor of G. In graph theory, many important conjectures are related to H-minor-free graphs such as Hadwiger's conjecture and Tutte's 4-flow con-

*通讯作者。

文章引用: 魏林嵩, 杨卫华. 4-连通 P_0-Minor-Free 图的特征[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2445-2450.
DOI: 10.12677/aam.2024.135232

jecture. To solve the above conjectures, we attempt to characterize Petersen-minor-free graphs. Let *H* is a graph with 15 edges. It is difficult to characterize H-minor-free graphs, thus to characterize Petersen-minor-free graphs, many scholars try to characterize every 3-connected graph with edges less than 15 to get close to Petersen graph. We denote the graph obtained by contracting two edges of a perfect matching of the Petersen, contracting one other edge and adding one edge. In this paper, we characterize 4-connected P_0-minor-free graphs.

Keywords

Minor Graph, 4-Connected Graph, Petersen Graph

1. 引言

图的刻画一直是图论研究过程中的一个重要课题。图的生成定理又叫做图的链式定理。链式定理对于研究具有某一类特征的图有着极为重要的作用。Tutte 的轮子定理被称为 3-连通图的生成定理。通过这个定理，我们可以得到所有的 3-连通图。Martinov 给出了 4-连通图的链式定理，后面 Qin 和 Ding 对这个链式定理进行了进一步的加强。

在图的刻画中，刻画一个图的 minor-free 图一直是一个非常有趣的话题。一个图的 minor-free 图的刻画可以给出一个图非常具体的特征。例如一个图是平面图当且仅当它不包含 K_5 和 $K_{3,3}$ 作为 minor。图论中很多猜想都与 H-minor-free 图有关，例如 Hadwiger 猜想和 Tutte 4-流猜想等。为了推动这些猜想的解决，我们目前非常关注 Petersen-minor-free 图的结构。由于它们都是 15 条边的 3-连通图，直接刻画非常困难，因此许多学者尝试对每个边数小于 15 的 3-连通图进行刻画去接近 Petersen-minor-free 图。其中，A.B.Ferguson 对通过收缩 Petersen 中三条完美匹配边得到的图作为禁止 minor 的图进行了完整地刻画。对于边数少于 11 的 3-连通图 H，Ding 刻画了所有的 H-minor-free 图[1]。对于 12 条边的 3-连通图，V_8-minor-free 图，cube-minor-free 图以及 Oct-minor-free 图已经得到完整的刻画[2] [3]。13 条边的 3-连通图一共有 51 个。，其中内部四连通图只有 3 个，其中 Oct+e 是其中一个并且 4-连通 Oct+e-minor-free 图得到了完整地刻画[4]。另外 Oct 对一个顶点 3-分离可以得到 2 个图，Jia 对这两类图的 4-连通 minor-free 图给出了部分刻画[5]。除此之外，刻画一个图的 minor-free 图离不开链式定理，并且还有很多与 minor-free 图的刻画以及性质的研究，可见文献[6]-[14]。我们记 P_0 为 Petersen 收缩两条完美匹配边和一条非完美匹配边得到的子图基础上添加一条边得到的 13 条边的 3-连通图。本文将完整地刻画所有的 4-连通 P_0-minor-free 图，给出一个 4-连通图是 P_0-minor-free 图的充要条件。

2. 预备知识

简单图是没有自环和重边的图，本文中我们考虑的都是简单图。G 为一个图，我们用 $V(G)$ 来表示图 G 的顶点集，$|V(G)|$ 表示图 G 的顶点数，用 $E(G)$ 表示图 G 的边集，$|E(G)|$ 表示图 G 的顶点数。

令 e 为图 G 的一条边，我们用 G/e 表示由图 G 收缩一条边得到的图，用 $G\setminus e$ 表示由图 G 删除一条边得到的图，给定两个图 G_1 和 G_2，如果 G_1 同构于 G_2，记为 $G_1 \cong G_2$。设 G 和 H 是两个图，如果图 H 可以通过从图 G 的一个子图中收缩边然后删除产生的环和平行边得到，我们就把图 H 叫做图 G 的一个 minor，

用 $H \le_m G$ 来表示。如果图 G 没有同构于图 H 的 minor，我们称图 G 为 H-minor-free 图。

如果一个圈 C 的长度为 n ($n \ge 3$)，我们记这个圈为 C_n。圈 C_n ($n \ge 5$)的平方，记作 C_n^2，是通过圈 $C_n = v_0 v_1 \cdots v_n$ 加上 n 条边 $v_i v_{i+2}$ ($0 \le i \le n-1$)得到的，我们令 $\varsigma_0 = \{C_{2n}^2 : n \ge 3\}$，$\varsigma_1 = \{C_{2n+1}^2 : n \ge 2\}$。记 DW_n 为通过两个相邻点分别与圈 C_n 上个每个点连边得到的图，令 $DW = \{DW_n : n \ge 3\}$。

令 v 为 4-连通图 G 的一个顶点。4-分离顶点 v 就是按如下操作产生一个新图 G'。给定两个集合 $A, B \subseteq N_G(v)$，$\min\{|A|, |B|\} \ge 3$。从图中移除顶点 v，然后添加两个新的顶点 v', v'' 使得在新图 G' 之中 $N(v') = A \cup \{v''\}$，$N(v'') = B \cup \{v'\}$。不难看出，图 G' 也是 4-连通图。

Martinov 给出了 4-连通图的链式定理，证明了任意 4-连通图都可以由 $\varsigma_0 \cup \varsigma_1 \cup L$ 中的 4-连通图都可以由 C_6^2 或者 C_5^2 反复地进行 4-分离点得到。

定理 2.1 [15] 一个 4-连通图是 $\overline{P_7}$ -minor-free 的当且仅当它是平面图或者属于 $DW \cup \varsigma_1 \cup \mathrm{K} \cup \{K_6, L(K_{3,3}), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5\}$ (图 1、图 2)。

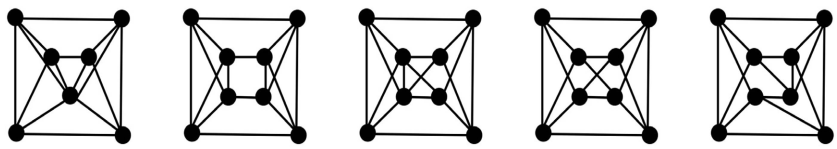


Figure 1. $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$
图 1. $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$

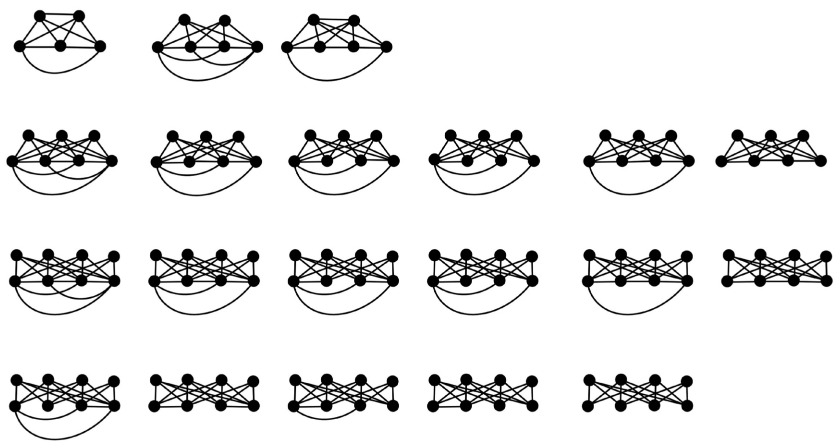


Figure 2. K
图 2. K

3. 4-连通 P_0-Minor-Free 图

本节将给出 4-连通 P_0-minor-free 图的完整刻画。

引理 3.1 若图 G 是 ς_1 中的 4-连通图，则图 G 是 P_0-minor-free 图当且仅当图 G 是 C_5^2 或者 C_7^2。

证明： C_5^2 顶点数是 5 并且少于图 P_0 的顶点数，所以 C_5^2 是 P_0-minor-free 图。假设 C_7^2 包含 P_0 作为 minor，则 P_0 可以由 C_7^2 删除或者收缩边得到。图 P_0 中点的最大度为 5，C_7^2 中点的最大度为 4，所以 C_7^2 是 P_0-minor-free 图。不难发现 C_9^2 包含 P_0 作为 minor (见图 3)，所以若图 G 是 ς_1 中的 4-连通图，则图 G 是 P_0-minor-free 图当且仅当图 G 是 C_5^2 或者 C_7^2。引理 3.1 得证。

引理 3.2 若图 G 是 K 中的 4 连通图，则则图 G 是 P_0-minor-free 图当且仅当图 G 属于集合

$\left\{K_5, DW_4, K_6 \setminus e, K_{4,3}^4, K_{4,3}^{11}\right\}$。

证明：$K_5, DW_4, K_6 \setminus e$ 的顶点数小于 P_1 的顶点数，所以 $K_5, DW_4, K_6 \setminus e$ 都是 P_1-minor-free 图。假设 $K_{4,3}^4$ 包含 P_0 作为 minor，则 P_0 可以由 $K_{4,3}^4$ 删除边得到。我们注意到 P_0 中顶点 1，3，6 为三个互不相邻点，顶点 3，7，6，2 的导出子图为一条 4 路。但是 $K_{4,3}^4$ 中除去 3 个互不相邻点以外的 4 个点构成不了一条 4 路，

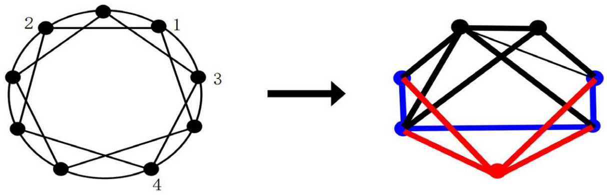


Figure 3. P_0 minor in C_7^2

图 3. C_7^2 中的 P_0 minor

所以 $K_{4,3}^4$ 是 P_0-minor-free 图(见图 4)。类似地，假设 $K_{4,3}^{11}$ 包含 P_0 作为 minor，则 P_0 可以由 $K_{4,3}^{11}$ 删除边以及收缩边得到。由于对称性，只考虑收缩 $K_{4,3}^{11}$ 中的一条边就可以。因为收缩一条边后所得的图中除去 3 个互不相邻的点以外的 4 个点不能构成一条 4 路，$K_{4,3}^{11}$ 是 P_0-minor-free 图(见图 5)。我们注意到，$K_{4,3}^4$ 和 $K_{4,3}^6$ 都包含 P_0 作为 minor (见图 6)。对于 $i = 1,2,5$，$K_{4,3}^i$ 包含 $K_{4,3}^3$ 作为 minor，所以它们也都包含 P_0 作为 minor。对于 $j = 1,2,3,\cdots,10$， $K_{4,4}^j$ 包含 $K_{4,3}^6$ 作为 minor，因此它们都包含 P_0 作为 minor。所以，引理 3.2 得证。

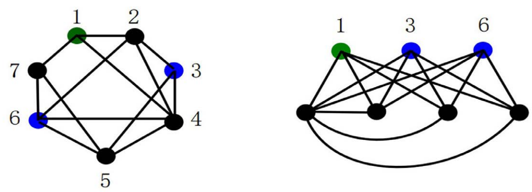


Figure 4. $K_{4,3}^4$ is P_0-minor-free

图 4. $K_{4,3}^4$ 是 P_0-minor-free 图

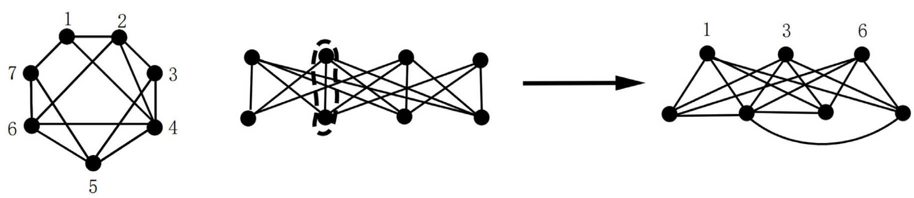


Figure 5. $K_{4,4}^{11}$ is P_0-minor-free

图 5. $K_{4,4}^{11}$ 是 P_0-minor-free 图

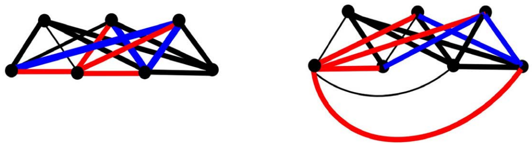
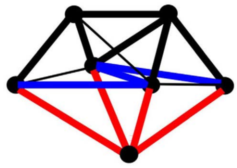


Figure 6. P_0 minor in $K_{4,3}^6$ and $K_{4,3}^3$

图 6. $K_{4,3}^6, K_{4,3}^3$ 中的 P_0 minor

引理 3.3 若图 G 是一个 4-连通图且属于集合 $DW\cup\left\{L\left(K_{3,3}\right),\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5\right\}$，则图 G 包含 P_0 作为 minor。

证明： DW_5 包含 P_0 作为 minor (见图)，并且对于 $DW_n\left(n\geq 5\right)$ 包含 DW_5 作为 minor，所以集合 DW 中的图都包含 P_0 作为 minor。Γ_1 包含 P_0 作为 minor，$\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5$ 包含 Γ_1 作为 minor，因此都包含有 P_0 作为 minor (见图 7)。不难看出，$L\left(K_{3,3}\right)$ 包含 P_0 作为 minor (见图 8)。所以，引理 3.3 得证。



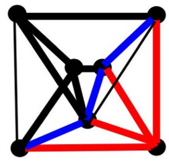
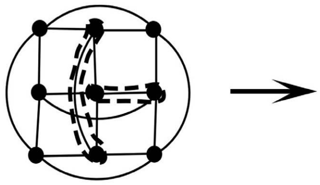


Figure 7. P_0 minor in DW_5 and Γ_1

图 7. DW_5,Γ_1 中的 P_0 minor



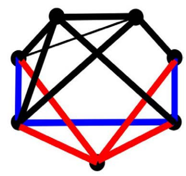


Figure 8. P_0 minor in $L\left(K_{3,3}\right)$

图 8. $L\left(K_{3,3}\right)$ 中的 P_0 minor

定理 3.4 一个 4-连通图 G 是 P_0-minor-free 图当且仅当它是平面图或属于 $\left\{K_6,K_6\setminus e,DW_4,C_5^2,C_7^2,K_{4,3}^4,K_{4,4}^{11}\right\}$。

证明： 平面图的 minor 一定是平面图，所以所有的平面图都是 P_0-minor-free 图。我们注意到 P_0 是 $\overline{P_7}$ 的子图，根据定理 2.1，以及引理 3.1、3.2 以及 3.3 的结果可得一个 4-连通图 G 是 P_0-minor-free 图当且仅当它是平面图或属于 $\left\{K_6,K_6\setminus e,DW_4、C_5^2,C_7^2,K_{4,3}^4,K_{4,4}^{11}\right\}$。定理 3.3 得证。

4. 结论与展望

Petersen-minor-free 图的刻画是一个重要的问题，但是 Petersen 图有 15 条边，直接刻画起来非常困难，于是许多学者通过刻画 Pertersen 子式作为禁止 minor 的图去接近 Petersen-minor-free 图。其中，A. B. Ferguson 对通过收缩 Petersen 中三条完美匹配边得到的图作为禁止 minor 的图进行了完整地刻画。记 P_0 为 Petersen 收缩两条完美匹配边和一条非完美匹配边得到的子图基础上添加一条边得到的 13 条边的 3-连通图。本文则主要完整地刻画了所有的 4-连通 P_0-minor-free 图，并得到一个 4-连通图 G 是 P_0-minor-free 图当且仅当它是平面图或属于 $\left\{K_6,K_6\setminus e,DW_4,C_5^2,C_7^2,K_{4,3}^4,K_{4,4}^{11}\right\}$。

然而本文对 P_0-minor-free 图的刻画也是仅限制在了 4-连通图的刻画，后面还需要通过相关的链式定理将结果推广到 3-连通图，这样才能够实现更完整地 P_0-minor-free 图的刻画。另外根据对称性，Petersen 中收缩完美匹配边和非完美匹配边还有其他的方式，因此也可以考虑那些图作为禁止 minor 的图的刻画。

参考文献

[1] Ding, G. and Liu, C. (2013) Excluding a Small Minor. *Discrete Applied Mathematics*, **161**, 355-368. https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.09.001

[2] Maharry, J. (2000) A Characterization of Graphs with No Cube Minor. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **80**, 179-201. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1968

[3] Ding, G. (2013) A Characterization of Graphs with No Octahedron Minor. *Journal of Graph Theory*, **74**, 143-162. https://doi.org/10.1002/jgt.21699

[4] Maharry, J. (2008) An Excluded Minor Theorem for the Octahedron Plus An Edge. *Journal of Graph Theory*, **57**, 124-130. https://doi.org/10.1002/jgt.20272

[5] Jia, W., Kou, S., Qin, C., and Yang, W. (2022) A Note on Oct_1^+-Minor-Free Graphs and Oct_2^+-Minor-Free Graphs. *Journal of Interconnection Networks*, **22**, 2150030. https://doi.org/10.1142/S0219265921500304

[6] Maharry, J. and Robertson, N. (2016) The Structure of Graphs Not Topologically Containing the Wagner Graph. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **121**, 398-420. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.07.011

[7] Qin, C. and Ding, G. (2019) A Chain Theorem for 4-Connected Graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **134**, 341-349. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.07.005

[8] Geelen, J. and Zhou, X. (2008) Generating Weakly 4-Connected Matroids. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **98**, 538-557. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2007.09.002

[9] Chun, C.M. and Oxley, D. (2013) Constructing Internally 4-Connected Binary Matroids. *Advances in Applied Mathematics*, **50**, 16-45. https://doi.org/10.1016/j.aam.2012.03.005

[10] Ferguson, A.B. (2015) Excluding Two Minors of the Petersen Graph. Ph.D. Thesis, Louisiana State University, Louisiana.

[11] Ding, G. and Kanno, J. (2010) Splitter Theorems for 4-Regular Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **26**, 329-344. https://doi.org/10.1007/s00373-010-0916-y

[12] Tutte, W.T. (1956) A Theorem on Planar Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **82**, 99-116. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1956-0081471-8

[13] Maharry, J. and Slilaty, D. (2012) Projective Planar Graphs with No $K_{3,4}$-minor. *Journal of Graph Theory*, **70**, 121-134. https://doi.org/10.1002/jgt.20603

[14] Chen, G. and Yu, X. (2002) Long Cycles in 3-Connected Graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **86**, 80-99. https://doi.org/10.1006/jctb.2002.2113

[15] Ding, G., Lewchalermvongs, C. and Maharry, J. (2016) Graphs with No $\overline{P_7}$-Minor. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **23**, 2, 12. https://doi.org/10.37236/5403