

考虑疫苗接种和失效的COVID-19传播模型的动力学分析

赵勇盛*, 张 蒙

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2024年4月29日; 录用日期: 2024年5月22日; 发布日期: 2024年5月31日

摘 要

疫苗接种是一种控制疫情传播的有效措施。但是随着毒株的变异出现了一个新的问题 - 免疫逃亡。免疫逃亡会使我们接种的疫苗失去作用, 再次面临被感染的风险。重症治疗是应对COVID-19疫情的重要环节, 不仅决定了患者的康复率和死亡率, 还直接影响了疫情的传播速度和范围。因此本文构建了一个具疫苗失效以及重症住院治疗的COVID-19传播动力学模型, 计算了模型的控制再生数, 证明了模型无COVID-19平衡点和COVID-19平衡点存在性条件, 并进行数值模拟验证了理论结果。

关键词

COVID-19, 住院治疗, 疫苗失效, 全局稳定性, 数值模拟

Dynamics Analysis of a COVID-19 Transmission Model Incorporating Vaccination and Failure

Yongsheng Zhao*, Meng Zhang

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Apr. 29th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

Vaccination is an effective measure to control the spread of epidemics. However, as strains of the virus mutate, a new problem arises-immune escape. Immune escape renders the vaccine ineffective and puts us at risk of being infected again. Critical care is an important part of the response to

*通讯作者。

COVID-19 epidemic, which not only determines the recovery rate and mortality rate of patients, but also directly affects the speed and scope of the epidemic. In this paper, we constructed a model of COVID-19 transmission dynamics with vaccine failure and intensive care hospitalisation, calculated the control regeneration number of the model, proved that the model has no COVID-19 equilibrium point and the existence condition of COVID-19 equilibrium point, and conducted numerical simulations to verify the theoretical results.

Keywords

COVID-19, Hospitalization, Vaccine Failure, Global Stability, Numerical Modeling

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

COVID-19 是一种由 SARS-CoV-2 病毒引起的主要通过呼吸道飞沫传播和密切接触传播的传染病。SARS-CoV-2 病毒是一种 RNA 病毒, 其基因结构和遗传特性导致病毒很容易发生变异[1] [2]。目前奥密克戎变异株已经成为我国流行优势毒株, 其具有潜伏期短、传播速度快、传播能力强、致病力减弱、免疫逃逸能力强等特点[3]。据不完全统计, 截止到 2023 年 COVID-19 在我国已经造成 6 万余人死亡, 死亡病例中 65 岁以上比例高达 90%。我国经过科学的防疫政策有效控制了疫情的传播, 并根据疫情传播情况自 2022 年 12 月我国开始实行乙类乙管, 但并不意味着疫情已经消失。目前 COVID-19 已经发展成为一种地方性流行病, 地方性流行病的特点是病毒会常态化存在, 例如流感病毒, 支原体、衣原体病毒等, 我们需要常态化的免疫力与之对抗。此外研究表明多次感染 COVID-19 会造成严重的后遗症, 并且增加死亡的风险[4]。因此, 对于一些抵抗力低下的人群, 例如孕妇、婴幼儿、老人等长期暴露在病毒状态下增加了很多潜在的危險, 而接种疫苗可以有效地降低致死率, 阻止疫情的传播, 因此我国也在加紧研发新型疫苗。目前主要接种疫苗的种类有灭活疫苗、腺病毒载体疫苗, 重组蛋白疫苗, mRNA 疫苗, DNA 疫苗等等[5]。但是由于 COVID-19 病毒的基因结构以及超强的免疫逃逸能力, 导致疫苗失效较快, 需要不断研发新型疫苗应对不断变异的毒株。考虑到死亡人群多为老年人, 以及有一些基础疾病的人群, 因此住院治疗以确保其生命安全是至关重要的。

我们研究传染病建模一般情况下采取建立动力学模型的方法。Salman 等建立了一个简单的 SIR 系统并且研究了系统的临界值, 表明了超过临界值即为 COVID-19 很难根除的原因[6]。Jia 等人建立了一个 eSIR 模型通过预测意大利 COVID-19 传染病趋势, 得出严格的隔离防控措施可以有效控制疫情传播[7]。Morgan 等人考虑了不同症状患者的传播情况, 提出在不同场合下应该采取不同的防疫举措[8]。Andrea 等人考虑了具有住院治疗的传染病模型, 考虑了药物干预对疫情规模的影响[9]。Tom 等人研究了佩戴口罩对于疫情传播的影响, 研究表明佩戴口罩可以降低病毒传播能力[10] [11]。研究发现, 在疫苗研制之前均采取隔离住院药物干预等方法阻止疫情的传播。随着疫苗的研发, 各个国家都开始推广疫苗接种。因此各个国家的科研工作者也开始研究疫苗接种对 COVID-19 传染病的影响。Sonabend 等人预测了英国在面对 alpha (B.1.1.7)变异毒株时, 保证原有非药物干预不变的情况下, 疫苗接种之后 COVID-19 的传播情况, 验证了疫苗接种的作用[12]。Djaafara 等人研究了疫苗接种之后放松管控措施对 COVID-19 传播动态的影响, 结果表面解释接种疫苗也需要进行一定的防控措施才能避免 COVID-19 疫情反弹[13]。Davies

等人建立了一个考虑疫苗接种的传染病模型, 预测了如果没有药物干预和疫苗接种将会造成更多的人死亡[14]。还有一些研究者研究了不同的接种策略对疾病传播的影响[15] [16]。

考虑到 COVID-19 的传播现状, 以及疫苗接种的实际情况, 本文建立了一个考虑疫苗接种和疫苗失效的 SVIACR 传染病模型, 并且由于很多重症患者需要接受住院治疗, 因此考虑了因为重症导致住院的情况, 对 COVID-19 的传播进行了研究。

本文的行文结构如下, 第二节中建立了 COVID-19 疫苗接种动力学模型, 第三节中研究了模型的阈值动力学求出了模型的平衡点和控制再生数, 第四节证明了系统的全局稳定性, 第五节进行了归纳总结。

2. 模型建立

根据 COVID-19 在人群中的传播特性, 我们建立了一个传染病模型用于研究疫苗接种的动力学, 此模型为一个 SVIACR 模型, 其中 $S(t)$ 、 $V(t)$ 、 $I(t)$ 、 $A(t)$ 、 $C(t)$ 、 $R(t)$ 分别表示易感者人群、疫苗接种人群、有症状感染者人群、无症状感染者人群、住院治疗人群、恢复者人群, 本文构造的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \psi S(t) - \beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu S(t) + \lambda V(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \psi S(t) - \lambda V(t) - \mu V(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = (1 - \rho)\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu I(t) - \delta I(t) - qI(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \rho\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu A(t) - \eta A(t) - qA(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} = qI(t) + qA(t) - \gamma C - \mu C(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \delta I(t) + \eta A(t) + \gamma C - \mu R(t). \end{cases} \quad (1)$$

我们假设模型(1)中所有的参数都是正的, 各个参数的定义参见表 1。

Table 1. The definition of parameters in a model

表 1. 模型中参数的定义

参数	定义
Λ	人类自然出生率
ψ	疫苗接种率
β	感染率
σ	无症状感染者传播概率的调节因子
μ	自然死亡率
δ	有症状感染者恢复率
η	无症状感染者恢复率
ρ	无症状感染者比率
λ	疫苗丧失率
q	住院治疗率
γ	住院治疗恢复率

定义 $\mathbb{R}_+^6 = \{(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)^T : m_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。在接下来的工作中我们将会讨论模型(1)的解 $u(t) = (S(t), V(t), I(t), A(t), C(t), R(t))^T$ 在 \mathbb{R}_+^6 中的存在性、非负性和有界性。

定理 2.1 系统(1)的解 $u(t)$ 在非负区间上是存在唯一非负的, 并且在 \mathbb{R}_+^6 上是最有界的, 其中解是过初始值 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6)^T \in \mathbb{R}_+^6$ 的。

证明 参考[17]中常微分方程的基本理论, 系统(1)经过初值的解在其最大存在区间 $[0, T_\phi)$ 上是唯一的, 其中 $0 < T_\phi \leq \infty$ 。下面我们证明经过初值 $\phi \in \mathbb{R}_+^6$ 的解在其最大存在区间 $[0, T_\phi)$ 是非负的。证明方法与[18]中命题 1 的方法类似。对于任意的 $\alpha \in (0, T_\phi)$ 以及任意小的 $\varepsilon > 0$, 可知模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \psi S(t) - \beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu S(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \psi S(t - \tau) - \mu V(t) + \varepsilon, \\ \frac{dI(t)}{dt} = (1 - \rho)\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu I(t) - \delta I(t) + \varepsilon, \\ \frac{dA(t)}{dt} = \rho\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu A(t) - \eta A(t) + \varepsilon, \\ \frac{dC(t)}{dt} = qI(t) + qA(t) - \gamma C(t) - \mu C(t) + \varepsilon, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \delta I(t) + \eta A(t) + \gamma C(t) - \mu R(t) + \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

通过 ϕ 的解为 $u(t, \varepsilon) = (u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), u_3(t, \varepsilon), u_4(t, \varepsilon), u_5(t, \varepsilon), u_6(t, \varepsilon))^T$, 基于常微分方程解对参数的连续依赖性[17], $u(t, \varepsilon)$ 在 $[0, \alpha)$ 上是一致存在的, 并且关于参数 ε 连续。当 $u_i(0, \varepsilon) = 0, i = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, 有 $\dot{u}_i(0, \varepsilon) > 0$, 于是我们可以得到 $u(t, \varepsilon) \gg \mathbf{0}, t \in (0, \alpha)$ 。从而对于任意 $t \in [0, \alpha)$, 有 $u(t) \gg \mathbf{0}$ 。由 α 的任意性, 我们可以得到 $u(t) \geq \mathbf{0}, t \in (0, T_\phi)$ 。

接下来证明模型(1)的有界性, 定义函数 $M(t) = S(t) + V(t) + I(t) + A(t) + C(t) + R(t)$, 对函数 $M(t)$ 进行求导可得:

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} &= \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} \\ &= \Lambda - \mu S(t) - \mu V(t) - \mu I(t) - \mu A(t) - \mu R(t) \\ &= \Lambda - \mu M(t). \end{aligned}$$

取极限可以得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$$

所以有 $u(t)$ 最终是有界的。由常微分方程解的延拓定理[17]知 $T_\phi = \infty$ 。于是定理 2.1 得证。

其中模型的可行域为:

$$\Omega = \left\{ (S, V, I, A, C, R) \in \mathbb{R}_+^6 : S + V + I + A + C + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} + \varepsilon; \varepsilon > 0 \right\}.$$

3. 阈值动力学

通过计算我们可以得到系统(1)的无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + \psi + \mu)}, \frac{\psi\Lambda}{\mu(\lambda + \mu + \psi)}, 0, 0, 0, 0 \right)^T$, 利用下一

代矩阵的方法求出控制再生数:

$$R_c = \frac{(1-\rho)\beta\Lambda(\lambda+\mu)}{\mu(\mu+\delta+q)(\lambda+\mu+\psi)} + \frac{\sigma\rho\beta\Lambda(\lambda+\mu)}{\mu(\mu+\eta+q)(\lambda+\mu+\psi)}.$$

为方便后续计算我们令:

$$R_1 = \frac{(1-\rho)\beta\Lambda(\lambda+\mu)}{\mu(\mu+\delta+q)(\lambda+\mu+\psi)}, R_2 = \frac{\sigma\rho\beta\Lambda(\lambda+\mu)}{\mu(\mu+\eta+q)(\lambda+\mu+\psi)}.$$

为进一步得到系统的地方病平衡点, 我们令模型(1)的右侧为零, 通过化简可以得知当且仅当 $R_c > 1$ 时, 系统存在唯一的地方病平衡点 $E^* = (S^*, V^*, I^*, A^*, C^*, R^*)^T$. 其中:

$$S^* = \frac{(\mu+\eta+q)(\mu+\delta+q)}{(1-\rho)\beta(\mu+\eta+q) + \rho\beta\sigma(\mu+\delta+q)},$$

$$V^* = \frac{\psi(\mu+\eta+q)(\mu+\delta+q)}{\beta(\lambda+\mu)[(1-\rho)(\mu+\eta+q) + \rho\sigma(\mu+\delta+q)]},$$

$$C^* = \frac{q(1-\rho)(\mu+\eta+q) + q\rho(\mu+\delta+q)}{(1-\rho)(\mu+\eta+q)(\mu+r)} I^*,$$

$$A^* = \frac{\rho(\mu+\delta+q)}{(1-\rho)(\mu+\eta+q)} I^*,$$

$$R^* = \frac{\delta(1-\rho)(\mu+\gamma)(\mu+\eta+q) + \eta\rho(\mu+\gamma)(\mu+\delta+q) + \gamma q(1-\rho)(\mu+\eta+q) + \gamma q\rho(\mu+\delta+q)}{\mu(1-\rho)(\mu+\eta+q)(\mu+\gamma)} I^*,$$

$$I^* = \frac{1}{\beta(\lambda+\mu)[\sigma\rho(\mu+\delta+q) + (1-\rho)(\mu+\eta+q)]k_1} (R_c - 1),$$

其中:

$$k_1 = \frac{\delta(1-\rho)(\mu+\gamma)(\mu+\eta+q) + \eta\rho(\mu+\gamma)(\mu+\delta+q) + \gamma q(1-\rho)(\mu+\eta+q) + \gamma q\rho(\mu+\delta+q)}{\mu(1-\rho)(\mu+\eta+q)(\mu+\gamma)} + \frac{\rho(\mu+\delta+q)}{(1-\rho)(\mu+\eta+q)} + \frac{q(1-\rho)(\mu+\eta+q) + q\rho(\mu+\delta+q)}{(1-\rho)(\mu+\eta+q)(\mu+r)}.$$

4. 全局稳定

在本节中我们将利用 Lyapunov 函数法来讨论模型(1)的无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性。设 $u(t)$ 是模型(1)经过任何一个初始值 $\phi \in \mathbb{R}_+^6$ 的解, 定义 $\omega(\phi)$ 是 ϕ 关于模型(1)的 ω -极限集。记 $g(x) = x - 1 = \ln x$, $x > 0$ 。于是我们对于无病平衡点 E_0 有如下的结果。

定理 4.1 当 $R_c \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 在 \mathbb{R}_+^5 中是 GAS, 当 $R_c = 1$ 时, 是全局吸引的。

证明: 首先, 我们证明当 $R_c \leq 1$ 时, E_0 是全局吸引的。由定理 2.1 可以得知, $\omega(\phi) \subseteq \mathbb{R}_+^6$ 是紧的, 记:

$$\Omega = \{\phi \in \mathbb{R}_+^6 : \phi_1(0) > 0\}.$$

我们在 Ω 上定义如下 V 函数:

$$V(\phi) = S_0 g\left(\frac{\phi_1}{S_0}\right) + V_0 g\left(\frac{\phi_2}{V_0}\right) + \frac{1}{1-\rho}\phi_3 + \frac{1}{\rho}\phi_4 \quad (3)$$

当 $t \geq 1$ 时, V 沿着 u_t 的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V}(u_t) = & -\frac{\mu}{S}(S^0 - S)^2 + \mu V^0 \left(3 - \frac{S^0}{S} - \frac{V}{V^0} - \frac{SV^0}{S^0 V} \right) + \lambda V^0 \left(2 - \frac{S^0 V}{SV^0} - \frac{SV^0}{S^0 V} \right) \\ & + 2\rho(\rho - 1)\beta S(I + \sigma A) + \frac{\mu + \delta + q}{1 - \rho}(R_1 - 1)I + \frac{\mu + \eta + q}{\rho}(R_2 - 1)A \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

下面我们证明 $R_c \leq 1$ 时, E^0 是全局吸引的, 即 $\omega(\phi) = \{E_0\}$ 。结合(3)式和(4)式, 我们可以得到 $\omega(\phi) \subseteq \Omega$ 。因此对 $R_c \leq 1$, V 在 $\{u_t : t \leq 1\} \subseteq \Omega$ 是 Lyapunov 函数。由[19]中引理 4.1, 可得 $\forall \kappa \in \omega(\phi)$ 有 $\dot{V}(\kappa) = 0$ 。

假设 $u_t = (S(t), V(t), I(t), A(t), C(t), R(t))^T$ 是系统(1)过任意初值 $\kappa \in \omega(\phi)$ 的解。由于 $\omega(\phi)$ 的不变性, 我们可以得出结论, 对于所有的 $t \in \mathbb{R}$, $u_t \in \omega(\phi)$ 。所以得到, 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\dot{V}(u_t) = 0$ 。因此, 从(4)可知, 所有 $t \in \mathbb{R}$ 的 $S(t) = S^0$ 、 $V(t) = V^0$ 。由 $\omega(\phi)$ 的不变性可以得到对任意 $t \in \mathbb{R}_+^6$ 有 $I(t) = A(t) = 0$ 。因此, $\omega(\phi) = \{E_0\}$ 。

接下来, 我们证明 E^0 是稳定的。由于系统(1)的第五和第六个方程是独立的, 因此系统(1)的其余四个方程可以构成一个独立的子系统。通过(3)、(4)和([20], 引理 4.1), 我们可以证明该子系统的无病平衡点

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + \psi + \mu)}, \frac{\psi\Lambda}{\mu(\lambda + \mu + \psi)}, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

是稳定的。由([19], 引理 4.1 和定理 4.3)中类似的论证, 我们可以得到 E^0 是一致稳定的。因此, 当 $R_c \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 在 R_+^6 中是全局渐近稳定的。

下面我们论证地方病平衡点的 E^* 的全局稳定性, 以下是我们的结果:

定理 4.2 当 $R_c > 1$ 时, 地方病平衡点 E^* 在 $M = \{\phi \in R_+^6 : \phi_3 > 0\}$ 中是 GAS。

证明: 由定理 3.1 可得, 当 $R_c \leq 1$ 时, 模型(1)不存地方病平衡点 E^* , 因此可以得到 E^* 在 M 中是全局渐近稳定的必有 $R_c > 1$ 。接下来我们证明当 $R_c > 1$ 时, 地方病平衡点 E^* 在 M 中是全局渐近稳定的。设 $u(t)$ 是模型(1)经过任何一个初始值 $\phi \in M$ 的解。显然 M 是系统(1)的正向不变集, 且 $u(t) \gg \mathbf{0}$, $t > 0$ 。记 $\Omega_2 = \{\phi \in R_+^6 : \phi \gg \mathbf{0}\}$ 。显然 $\Omega_2 \subseteq M$ 。定义如下 V 函数:

$$V(\phi) = S^* g\left(\frac{\phi_1}{S^*}\right) + V^* g\left(\frac{\phi_2}{V^*}\right) + \frac{\beta S^* I^*}{\mu + \delta + q} g\left(\frac{\phi_3}{I^*}\right) + \frac{\beta \sigma S^* A^*}{\mu + \eta + q} g\left(\frac{\phi_4}{A^*}\right) \quad (5)$$

当 $t \geq 1$ 时, V 沿着 u_t 的导数为:

$$\dot{V}(u_t) = -\frac{\mu}{S}(S^* - S)^2 + \mu V^* \left(3 - \frac{S^*}{S} - \frac{V}{V^*} - \frac{SV^*}{S^* V} \right) + \lambda V^* \left(2 - \frac{S^* V}{SV^*} - \frac{SV^*}{S^* V} \right) - \frac{\beta \sigma S(AI^* - A^* I)^2}{AI(I^* + \sigma A^*)} \leq 0. \quad (6)$$

下面我们证明 $R_c > 1$ 时, E^* 是全局吸引的, 即 $\omega(\phi) = \{E^*\}$ 。结合(5)式和(6)式, 我们可以得到 $\omega(\phi) \subseteq \Omega$ 。因此对 $R_c \leq 1$, V 在 $\{u_t : t \leq 1\} \subseteq \Omega$ 是 Lyapunov 函数。由[19]中引理 4.1, 可得 $\forall \kappa \in \omega(\phi)$ 有 $\dot{V}(\kappa) = 0$ 。

假设 $u_t = (S(t), V(t), I(t), A(t), C(t), R(t))^T$ 是系统(1)过任意初值 $\kappa \in \omega(\phi)$ 的解。由于 $\omega(\phi)$ 的不变性, 我们可以得出结论, 对于所有的 $t \in \mathbb{R}$, $u_t \in \omega(\phi)$ 。所以得到, 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\dot{V}(u_t) = 0$ 。因此, 从(4)可知, 所有 $t \in \mathbb{R}$ 的 $S(t) = S^*$, $V(t) = V^*$, $I(t) = I^*$, $A(t) = A^*$ 。由 $\omega(\phi)$ 的不变性可以得到对任意 $t \in \mathbb{R}_+^6$ 有 $u_t = E^*$ 。因此, $\omega(\phi) = \{E^*\}$ 。

接下来, 我们证明 E^* 是稳定的。由于系统(1)的第五和第六个方程是独立的, 因此系统(1)的其余四个方程可以构成一个独立的子系统。通过(5)、(6)和([20], 引理 4.1), 我们可以证明该子系统的地方病平衡点 E^* 是稳定的。由([19], 引理 4.1 和定理 4.3)中类似的论证, 我们可以得到 E^* 是一致稳定的。因此, 当 $R_c > 1$ 时, 地方病平衡点 E^* 在 R_+^6 中是全局渐近稳定的。

5. 数值模拟

在本节中我们采用数值模拟的方法验证理论成果, 疫苗接种及其失效以及住院治疗对疫情传播的影响是我们关注的重点。

接下来我们进行数值模拟:

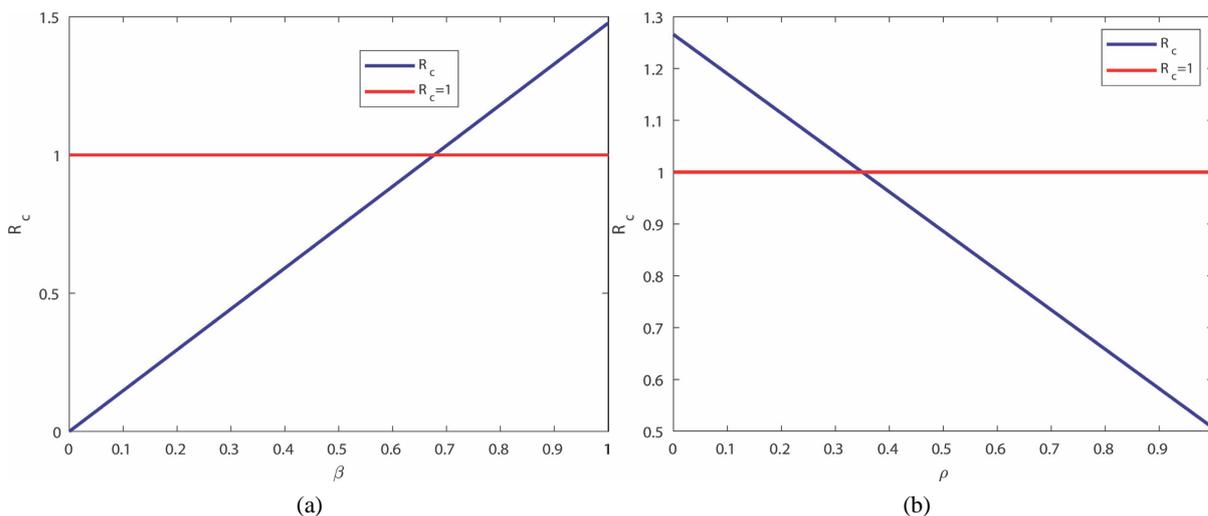


Figure 1. The correlation of R_c to β and ρ

图 1. R_c 与 β 和 ρ 的关系

图 1 表示 β 和 ρ 的变化对 R_c 的影响, 根据图像可知, 其它参数保持不变, 当不断增大 β 的值会导致 R_c 不断增大, 说明感染率越高, 疫情越难以控制, 当 β 的值增大到一定值时, R_c 的值会大于 1, 疫情难以得到有效控制。保持其它参数不变, 当 ρ 的值不断减小时, R_c 不断减小, 说明当无症状感染者所占比例越高, 疫情越容易控制, 当 ρ 的值增大到一定值时, R_c 的值会小于 1, COVID-19 会在某区域内被消灭。

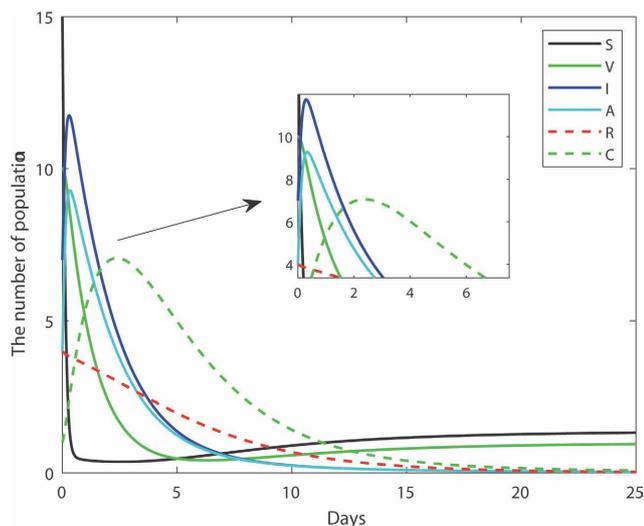


Figure 2. A time series plot of the growth of the number of people in each compartment over time

图 2. 各个仓室人数随时间增长的时间序列图

在图 2 中, 我们给出了各个仓室人数随时间变化的时间序列图, 从图中可以看到刚开始在没有进行疫苗接种和住院治疗的情况下, 感染者人数迅速增长, 然后在疫苗接种和住院治疗的共同作用下, 易感者人数先增长然后达到峰值, 最后趋于稳定。

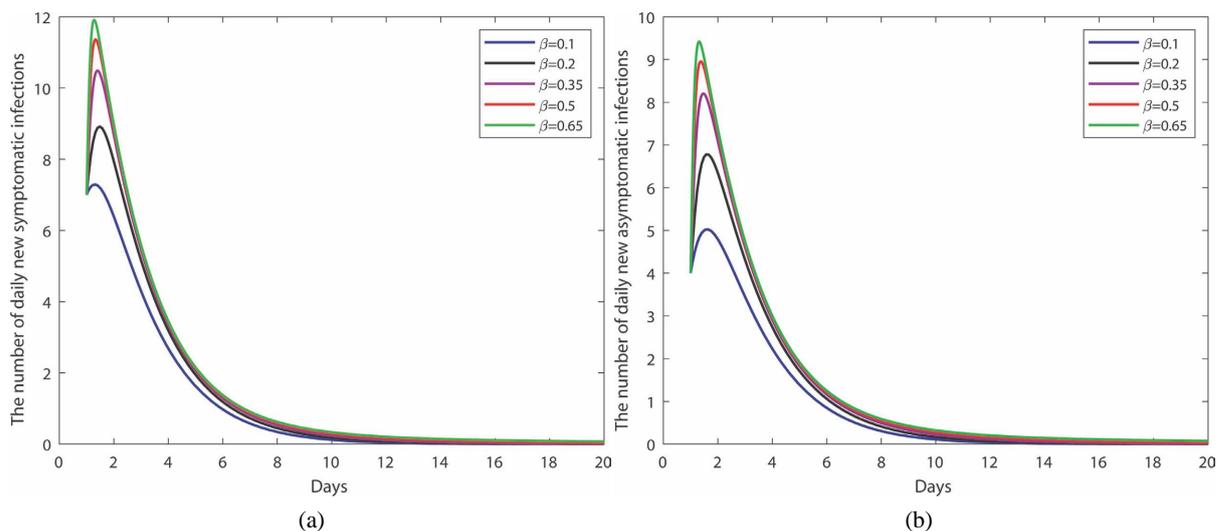


Figure 3. The impact of transmission rates β on I and A

图 3. 传播率 β 对 I 和 A 的影响

在图 3 中, 我们固定其它参数值, 考虑不同的传播率 β 对有症状感染者人数和无症状感染者人数的影响, 研究表明传播率 β 越高, 有症状感染者和无症状感染者人数越多, 峰值越高, 因此应采取一些列措施降低疫苗传播率。

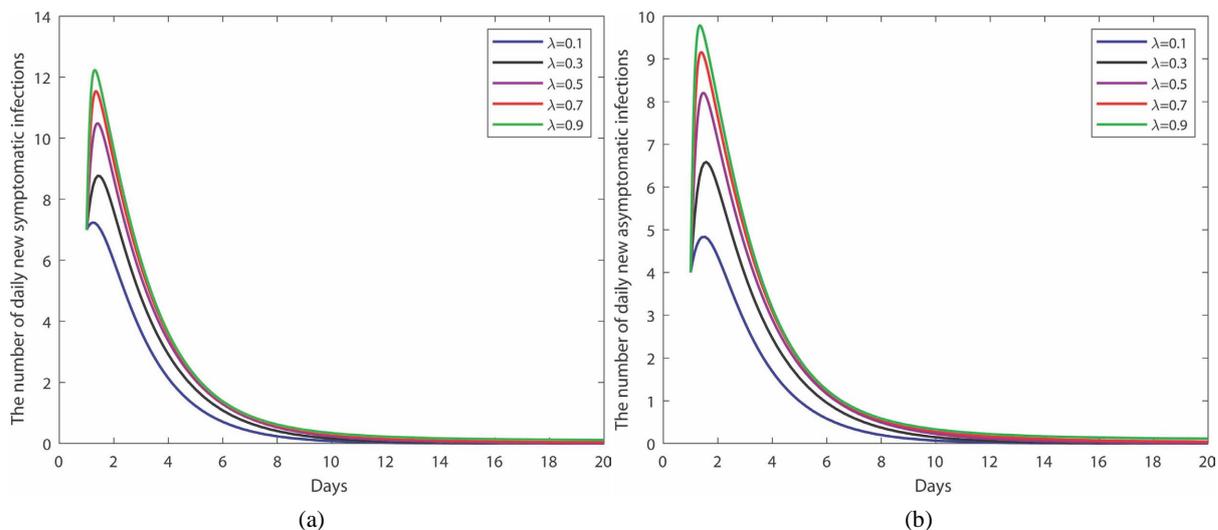


Figure 4. Effect of vaccine loss rates λ on I and A

图 4. 丧失率 λ 对 I 和 A 的影响

在图 4 中, 我们固定其它参数值, 考虑不同的疫苗丧失率 λ 对有症状感染者人数和无症状感染者人数的影响, 研究表明疫苗丧失率 λ 越高, 有症状感染者和无症状感染者人数越多, 峰值越高, 因此应采

取及时接种加强针, 或尽早研发新型疫苗以应对病毒免疫逃逸导致的疫苗丧失。

6. 结论

本文构建了一个具有疫苗失效和重症住院治疗的 COVID-19 传染病模型, 计算了模型的控制再生数和平衡点, 给出了模型的平衡点稳定性条件, 并加以证明。最后通过数值模拟, 验证了理论成果。

通过数值模拟可知:

随着感染率 β 从 0.65 逐渐降低到 0.1, 每日新增感染者人数减半。由此可知, 在非药物干预措施中采取核酸检测、动态清零、佩戴口罩、保持社交距离以及社区封控等有效地降低感染率措施是非常必要的, 可以有效控制疫情传播的规模。这也与我国疫情初期的疫情防控政策相符合。而随着疫苗丧失率从 0.1 增加到 0.9, 每日新增感染者人数峰值变大。因此, 从药物干预的角度来看, 疫苗丧失越高, 疫情整体规模越大, 控制疫情所需时间越长, 因此应采取不断研发新型疫苗以及接种加强针等措施来面对病毒的免疫逃逸。按照目前情况来看, COVID-19 成为一种地方性疾病之后, 病毒将长期与我们并存, 因此新型疫苗的不断研发是非常有必要的。这也与我国实行乙类乙管严防重症的防疫政策相符合。

对此我们给出相关建议: 当 COVID-19 疫情爆发时, 采取多种措施抑制疫情的传播是非常有必要的。此外, 随着疫情的演变, 疫苗的有效性可能会受到影响。为了应对疫苗失效问题, 我们需要采取研发新型疫苗或推广接种加强针等措施, 以增强人群的免疫保护力, 降低疫苗失效率。这样, 我们才能在疫情防控的道路上不断前进, 最终战胜这场全球性的疫情危机。

参考文献

- [1] Xu, X., Chen, P., Wang, J., *et al.* (2020) Evolution of the Novel Coronavirus from the Ongoing Wuhan Outbreak and Modeling of Its Spike Protein for Risk of Human Transmission. *Science China Life Sciences*, **63**, 457-460. <https://doi.org/10.1007/s11427-020-1637-5>
- [2] Ciotti, M., Ciccozzi, M., Pieri, M., *et al.* (2022) The COVID-19 Pandemic: Viral Variants and Vaccine Efficacy. *Critical Reviews in Clinical Laboratory Sciences*, **59**, 66-75. <https://doi.org/10.1080/10408363.2021.1979462>
- [3] 中国疾病预防控制中心. 新型冠状病毒感染[EB/OL]. https://www.chinacdc.cn/jkzt/crb/zl/szkb_11803/, 2024-03-25.
- [4] 李娜, 汪哲, 包云丽, 唐海茹, 黄俊, 于晓辉, 张久聪. 新冠肺炎后遗症的临床特征及研究进展[J]. 海南医学院学报, 2022, 28(14): 1041-1049.
- [5] 陈盼, 杨剑, 肖永红. 新型冠状病毒疫苗的研究进展[J]. 医药导报, 2024, 43(2): 240-248.
- [6] Salman, A.M., Ahmed, I., Mohd, M.H., *et al.* (2021) Scenario Analysis of COVID-19 Transmission Dynamics in Malaysia with the Possibility of Reinfection and Limited Medical Resources Scenarios. *Computers in Biology and Medicine*, **133**, Article 104372. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2021.104372>
- [7] Wangping, J., Ke, H., Yang, S., *et al.* (2020) Extended SIR Prediction of the Epidemics Trend of COVID-19 in Italy and Compared with Hunan, China. *Frontiers in Medicine*, **7**, 169-173. <https://doi.org/10.3389/fmed.2020.00169>
- [8] Kain, M.P., Childs, M.L., Becker, A.D., *et al.* (2021) Chopping the Tail: How Preventing Superspreading Can Help to Maintain COVID-19 Control. *Epidemics*, **34**, Article 100430. <https://doi.org/10.1016/j.epidem.2020.100430>
- [9] Torneri, A., Libin, P., Vanderlocht, J., *et al.* (2020) A Prospect on the Use of Antiviral Drugs to Control Local Outbreaks of COVID-19. *BMC Medicine*, **18**, Article No. 191. <https://doi.org/10.1186/s12916-020-01636-4>
- [10] Li, T., Liu, Y., Li, M., *et al.* (2020) Mask or No Mask for COVID-19: A Public Health and Market Study. *PLOS ONE*, **15**, e0237691. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0237691>
- [11] Reiner, R.C., Barber, R.M., Collins, J.K., *et al.* (2021) Modeling COVID-19 Scenarios for the United States. *Nature Medicine*, **27**, 94-105. <https://doi.org/10.1038/s41591-020-1132-9>
- [12] Sonabend, R., Whittles, L.K., Imai, N., *et al.* (2021) Non-Pharmaceutical Interventions, Vaccination, and the SARS-CoV-2 Delta Variant in England: A Mathematical Modelling Study. *The Lancet*, **398**, 1825-1835. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(21\)02276-5](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(21)02276-5)
- [13] Djaafara, B.A., Whittaker, C., Watson, O.J., *et al.* (2021) Using Syndromic Measures of Mortality to Capture the Dynamics of COVID-19 in Java, Indonesia, in the Context of Vaccination Rollout. *BMC Medicine*, **19**, Article No. 146.

-
- <https://doi.org/10.1186/s12916-021-02016-2>
- [14] Davies, N.G., Abbott, S., Barnard, R.C., *et al.* (2021) Estimated Transmissibility and Impact of SARS-CoV-2 Lineage B.1.1.7 in England. *Science*, **372**, eabg3055. <https://doi.org/10.1126/science.abg3055>
- [15] Buckner, J.H., Chowell, G. and Springborn, M.R. (2021) Dynamic Prioritization of COVID-19 Vaccines When Social Distancing Is Limited for Essential Workers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **118**, e2025786118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2025786118>
- [16] Moore, S., Hill, E.M., Tildesley, M.J., *et al.* (2021) Vaccination and Non-Pharmaceutical Interventions for COVID-19: A Mathematical Modelling Study. *The Lancet Infectious Diseases*, **21**, 793-802. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(21\)00143-2](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(21)00143-2)
- [17] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程稳定性与稳定性方法[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2015.
- [18] Sheng, Y., Cui, J.-A. and Guo, S. (2023) The Modeling and Analysis of the COVID-19 Pandemic with Vaccination and Isolation: A Case Study of Italy. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **20**, 5966-5992. <https://doi.org/10.3934/mbe.2023258>
- [19] Bai, Y.-Z., Wang, X.-J. and Guo, S.-B. (2021) Global Stability of a Mumps Transmission Model with Quarantine Measure. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **37**, 665-672. <https://doi.org/10.1007/s10255-021-1035-7>
- [20] Ao, D., Lan, T., He, X., Liu, J., Chen, L., Baptista-Hon, D.T., Zhang, K. and Wei, X. (2022) SARS-CoV-2 Omicron Variant: Immune Escape and Vaccine Development. *MedComm*, **3**, e126. <https://doi.org/10.1002/mco2.126>