

具有隐性传染和有限医疗资源的手足口病模型分析

高永谦, 马扬军*

重庆交通大学数学与统计学院, 重庆

收稿日期: 2024年4月29日; 录用日期: 2024年5月22日; 发布日期: 2024年5月31日

摘要

本文建立和分析了一类具有隐性传染和有限医疗资源的手足口病模型, 计算了疾病的基本再生数, 证明了无病平衡点的稳定性, 讨论了地方病平衡点的存在性。通过利用中国大陆2022年1月至12月的手足口病月数据进行拟合, 分析得到提高感染者的就医率和增加医院的床位数可有效控制疾病的传播。

关键词

隐性传染, 有限医疗资源, 手足口病, 基本再生数

Analysis of a Hand-Foot-Mouth Disease Models with Recessive Infection and Limited Medical Resources

Yongqian Gao, Yangjun Ma*

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing

Received: Apr. 29th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

This article establishes and analyzes a model of hand, foot, and mouth disease with recessive infection and limited medical resources, calculates the basic regeneration number of disease, proves the stability of the disease-free equilibrium point, and discusses the existence of endemic disease equilibrium points. By fitting the monthly data of HFMD in Chinese Mainland from January to December 2022, the analysis shows that improving the medical attendance rate of infected people and increasing the number of beds in hospitals can effectively control the spread of disease.

*通讯作者。

Keywords

Recessive Infection, Limited Medical Resources, Hand-Foot-Mouth Disease, Basic Regeneration Number

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

手足口病是由多种肠道病毒引起的常见传染病[1], 其中以柯萨奇病毒 A16 型和肠道病毒 71 型为最常见的致病菌株。该病通常发生在 5 岁以下儿童, 个体感染手足口病后, 一般在 3 至 7 天后表现出症状, 7 至 10 天后完全恢复。患者主要症状表现在口腔、手掌和足心出现疱疹和溃疡, 全身症状伴有发热、头疼、食欲不振等, 严重者可导致死亡, 此外, 有些患者可能不表现出任何症状。手足口病最早于 1957 年在新西兰报道, 之后逐渐在世界范围内广泛流行。

目前, 手足口病仍然对儿童的身心健康造成威胁。从中国疾病预防控制中心查阅到, 2014 年手足口病年病例数达 278 万, 死亡 501 人, 2018 年患者达 235 万, 死亡 35 人, 幸运的是 2016 年成功研发出手足口病疫苗, 自接种以来, 患病人数明显下降, 但仍然维持在 100 万左右, 如图 1 和图 2 所示。影响手足口病的另一个原因是中国各地区的医疗资源分配不均, 从统计年鉴中查询到华东地区拥有 2.26 万张病床数, 而东北地区仅有 0.79 万张(如图 3), 巨大的差异导致儿童在患病时无法及时就医, 使得患者无法在短时间内得到有效治疗。

关于手足口病模型的研究目前非常多, 请参考文献[2] [3] [4], Ma 等将手足口病患者分为感染者和隐性感染者(不表现出任何症状), 并利用山东省手足口病病例数研究了季节性传播, 认为隐性感染者在手足口病的传播中起着重要的作用, 仅仅对感染者进行隔离并不是控制疾病的有效措施。Wang 和 Xiao 研究了隐性传染和受污染环境病毒感染的模型, 若考虑隐性感染者, 那么疾病将会持续, 若不考虑隐性感染者, 疾病就会消亡, 因此隐性感染者对手足口病的影响不可忽视。接着 Wang 和 Xiao 通过纳入环境中病毒的间接传播率、周期性传播率和疫苗接种率来考虑手足口病, 并且还考虑了隐性感染者的影响, 结果表明加强疫苗接种和环境的频繁清洁是控制手足口病感染的有效措施。

当疾病大规模爆发时, 可能会导致感染人数超过当地医疗资源的承载能力, 把有限医疗资源考虑到模型中分析疾病的传播是可行的, 请参考文献[5] [6], Shan 和 Zhu 建立了一个具有有限医疗资源的 SIR 模型, 研究表明保持足够的医院床位数对控制疾病很重要。刘等人考虑了媒体报道效应和有限医疗资源对疾病的影响, 结果表明媒体报道的覆盖率越高或医院收治病人的容纳量越大, 对疾病的控制越有效。

本文建立一个具有隐性传染和有限医疗资源的手足口病模型, 研究中国大陆手足口病模型传播。首先计算了模型的基本再生数, 证明了无病平衡点的稳定性, 接着讨论了地方病平衡点的存在性, 最后利用中国大陆 2022 年 1 月至 12 月的手足口病月数据进行拟合, 通过数值模拟来展示不同控制措施对手足口病传播的影响。

2. 模型建立

本文将考虑手足口病 5 岁以下儿童, 将人群分为: 易感者(S), 潜伏者(E), 显性感染者(I), 隐性感染

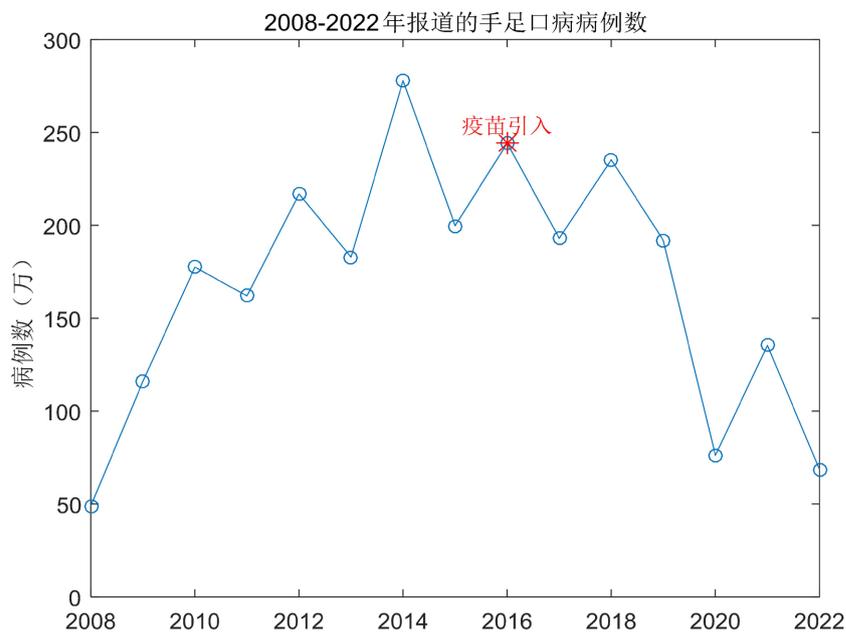


Figure 1. Number of reported cases of hand, foot, and mouth disease from 2008 to 2022

图 1. 2008~2022 年报道的手足口病病例数

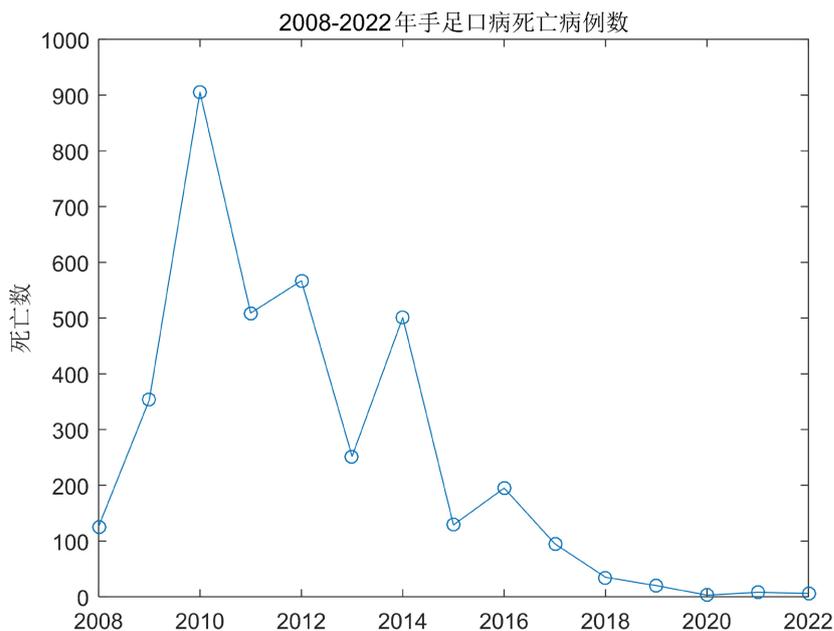


Figure 2. Reported deaths from hand, foot, and mouth disease from 2008 to 2022

图 2. 2008~2022 年报道的手足口病死亡数

者(I_e), 住院治疗者(H), 恢复者(R), 在模型中, 易感者通过与显性感染者和隐性感染者接触后先进入潜伏期, 在潜伏期之后表现出症状的为显性感染者, 不表现出任何症状的为隐性感染者, 而显性感染者一部分儿童因病情严重需要住院治疗, 而隐性感染者不表现症状, 但具有传染性。接着利用住院率函数 $rI(1-H/K)$ 来刻画有限医疗资源对手足口病传播的影响, r 代表感染者的就医率, K 代表医院的病床总数, 当病床数充足时, 即 $H < K$, 可以保证感染者及时就医治疗; 当 $H = K$ 时, 住院人数和医院床位数相等; 当 $H > K$ 时, 医院床位数受到限制, 病人将不能住院治疗。

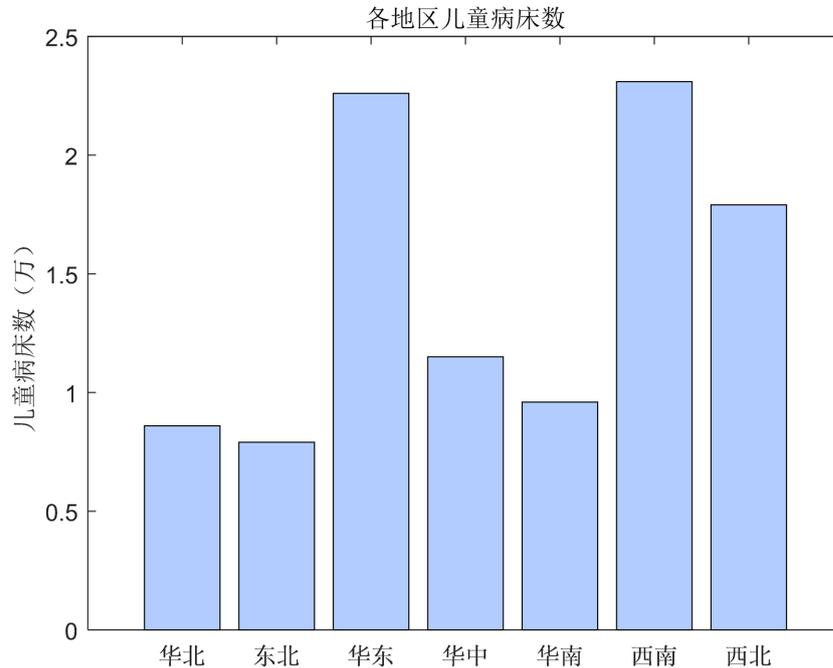


Figure 3. Number of child beds by region
图 3. 各地区儿童病床数

其中所有参数均是正常数, 并且参数及意义如下: Λ 表示人口出生率, d 表示自然死亡率, β_1 表示易感者与显性感染者接触的传染率, β_2 表示易感者与隐性感染者接触的传染率, ρ 表示显性感染者的比例, $1/\eta$ 表示疾病平均潜伏期, γ_1 表示显性感染者的恢复率, γ_2 表示隐性感染者的恢复率, γ_3 表示住院治疗者的恢复率, δ_1 表示显性感染者的因病死亡率, δ_2 表示住院治疗者的因病死亡率。建立的模型用以下微分方程描述:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 SI - \beta_2 SI_e - dS, \\ \frac{dE}{dt} = \beta_1 SI + \beta_2 SI_e - \eta E - dE, \\ \frac{dI}{dt} = \rho \eta E - dI - \delta_1 I - \gamma_1 I - rI(1 - H/K), \\ \frac{dI_e}{dt} = (1 - \rho) \eta E - dI_e - \gamma_2 I_e, \\ \frac{dH}{dt} = rI(1 - H/K) - dH - \delta_2 H - \gamma_3 H, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_1 I + \gamma_2 I_e + \gamma_3 H - dR \end{cases} \quad (1)$$

系统(1)满足初始条件: $S(0) \geq 0, E(0) \geq 0, I(0) \geq 0, I_e(0) \geq 0, 0 \leq H(0) \leq K, R(0) \geq 0$, 设 $N(t)$ 为 t 时刻种群中个体的总数, 有 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + I_e(t) + H(t) + R(t)$, 通过系统(1), 可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \Lambda - dS - dE - dI - dI_e - dH - dR - \delta_1 I - \delta_2 H \\ &= \Lambda - dN - \delta_1 I - \delta_2 H \\ &\leq \Lambda - dN \end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{d}$$

所以集合:

$$D = \left\{ (S, E, I, I_e, H, R) \in \mathbb{R}_+^6 : 0 \leq S + E + I + I_e + H + R \leq \Lambda/d, 0 \leq H \leq K \right\}.$$

是系统(1)的正不变集。

通过求解可知, 系统(1)总存在无病平衡点 $E_0 = (S_0, 0, 0, 0, 0, 0)$, 其中 $S_0 = \Lambda/d$, 下面通过 Driessche and Watmough 的下一代矩阵演绎法[7], 计算系统(1)的基本再生数如下:

$$R_0 = \frac{\beta_1 S_0 \rho \eta}{(\eta + d)(d + \delta_1 + \gamma_1 + r)} + \frac{\beta_2 S_0 (1 - \rho) \eta}{(\eta + d)(d + \gamma_2)} = R_1 + R_2$$

3. 地方病平衡点的存在性

本节中, 将研究系统(1)地方病平衡点的存在性, 令系统(1)的等式左边等于 0, 通过计算可得到关系式:

$$S^* = \frac{\Lambda}{\beta_1 I^* + \beta_2 I_e^* + d}, \quad H^* = \frac{r}{\frac{r}{K} I^* + M_3} I^*,$$

$$E^* = \frac{M_1 (r I^* + K M_3) - r^2 I^*}{\rho \eta (r I^* + K M_3)} I^*, \quad I_e^* = \frac{M_1 (r I^* + K M_3) - r^2 I^*}{(r I^* + K M_3)} A I^*$$

其中

$$M_1 = d + \delta_1 + \gamma_1 + r, \quad M_2 = d + \gamma_2, \quad M_3 = d + \delta_2 + \gamma_3, \quad A = \frac{(1 - \rho) \eta}{M_2 \rho \eta}$$

将上述 S^*, E^*, I_e^* 表达式代入系统(1)的第二个等式中, 得到一个关于 I^* 的一元三次方程:

$$f(I^*) = a_0 (I^*)^3 + a_1 (I^*)^2 + a_2 I^* + a_3 = 0$$

其中

$$a_0 = \beta_1 r^2 M_4 B + \beta_2 r^2 M_4^2 A B > 0$$

$$a_1 = \beta_1 r K M_1 M_3 B + \beta_1 r K M_3 M_4 B + 2 \beta_2 r K M_1 M_3 M_4 A B + d r^2 M_4 B - \beta_1 \Lambda r^2 - \beta_2 \Lambda r^2 M_4 A$$

$$a_2 = \beta_1 K^2 M_1 M_3^2 B + \beta_2 K^2 M_1^2 M_3^2 A B + d r K M_1 M_3 B + d r K M_3 M_4 B - 2 \beta_1 \Lambda r K M_3$$

$$- \beta_2 \Lambda r K M_3 M_4 A - \beta_2 \Lambda r K M_1 M_3 A$$

$$a_3 = d K^2 M_1 M_3^2 B - \beta_1 \Lambda K^2 M_3^2 - \beta_2 \Lambda K^2 M_1 M_3^2 A = d K^2 M_1 M_3^2 B (1 - R_0)$$

其中

$$M_4 = d + \delta_1 + \gamma_1, \quad B = \frac{\eta + d}{\rho \eta}$$

对 $f(I^*)$ 关于 I^* 求导可得

$$f'(I^*) = 3a_0 (I^*)^2 + 2a_1 I^* + a_2$$

令 Δ 为 $f'(I^*)=0$ 关于 I^* 的判别式, 则有

$$\Delta = (2a_1)^2 - 4(3a_0)a_2$$

由根与系数之间的关系以及 $f'(I^*)$ 的符号, 有以下结果:

一、当 $\Delta > 0$, 即 $f'(I^*)$ 有两个实根 I_1^*, I_2^* , 其中

$$I_1^* = \frac{-2a_1 - \sqrt{\Delta}}{6a_0}, I_2^* = \frac{-2a_1 + \sqrt{\Delta}}{6a_0}$$

1、当 $a_1 < 0$, 即 $0 < I_1^* < I_2^*$, 有:

(a) $a_3 < 0$, 即 $R_0 > 1$ 时,

(i) 若 $f'(I_1^*) > 0, f'(I_2^*) < 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 会有三个正根 I_3^*, I_4^*, I_5^* , 且满足 $I_3^* < I_1^* < I_4^* < I_2^* < I_5^*$;

(ii) 若 $f'(I_1^*) = 0, f'(I_2^*) < 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 会有两个正根 $I_3^* = I_4^*, I_5^*$, 且满足 $I_3^* = I_4^* = I_1^*, I_2^* < I_5^*$;

(iii) 若 $f'(I_1^*) > 0, f'(I_2^*) = 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 会有两个正根 $I_3^*, I_4^* = I_5^*$, 且满足 $I_3^* < I_1^*, I_4^* = I_5^* = I_2^*$;

(iv) 若 $f'(I_1^*) > 0, f'(I_2^*) > 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 只有一个正根 I_3^* , 且满足 $I_3^* < I_1^*$;

(v) 若 $f'(I_1^*) < 0, f'(I_2^*) < 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 只有一个正根 I_5^* , 且满足 $I_2^* < I_5^*$ 。

(b) $a_3 \geq 0$, 即 $R_0 \leq 1$ 时,

(i) 若 $f'(I_2^*) < 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 会有两个正根 I_4^*, I_5^* , 且满足 $I_4^* < I_2^* < I_5^*$;

(ii) 若 $f'(I_2^*) = 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 只有一个正根 $I_4^* = I_5^*$, 且满足 $I_4^* = I_2^* = I_5^*$ 。

2、当 $a_1 = 0$, 即 $I_1^* < 0 < I_2^*$, 有:

(a) $a_3 \geq 0$, 即 $R_0 \leq 1$ 时,

(i) 若 $f'(I_2^*) < 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 会有两个正根 I_4^*, I_5^* , 且满足 $I_4^* < I_2^* < I_5^*$;

(ii) 若 $f'(I_2^*) = 0$, 那么 $f(I^*)=0$, 只有一个正根 $I_4^* = I_5^*$, 且满足 $I_4^* = I_2^* = I_5^*$ 。

(b) $a_3 < 0$, 即 $R_0 > 1$ 时, 那么 $f(I^*)=0$, 只有一个正根 I_5^* , 且满足 $I_2^* < I_5^*$ 。

3、当 $a_1 > 0$, 即 $I_1^* < I_2^* < 0$, 且 $R_0 > 1$ 时, 那么 $f(I^*)=0$, 只有一个正根 I_5^* , 且满足 $I_2^* < I_5^*$ 。

二、当 $\Delta = 0$, 即 $f'(I^*)$ 有一个重根 $I_1^* = I_2^*$,

1、当 $a_1 < 0$, 即 $0 < I_1^* = I_2^*$, 且 $R_0 > 1$ 时, 那么 $f(I^*)=0$ 有一个正根 I_6^* ;

2、当 $a_1 > 0$, 即 $0 > I_1^* = I_2^*$, 且 $R_0 > 1$ 时, 那么 $f(I^*)=0$ 有一个正根 I_6^* ;

三、当 $\Delta < 0$, 即 $f'(I^*)$ 没有实根, 且 $R_0 > 1$, 那么 $f(I^*)=0$ 有一个正根 I_7^* 。

定理 1 系统(1)地方病平衡点的存在性有以下结果成立。

1、当 $\Delta > 0$, 即 $f'(I^*)$ 有两个实根 I_1^*, I_2^* , 那么有以下结果:

(a) 当 $a_1 < 0$, $R_0 > 1$, $f'(I_1^*) > 0, f'(I_2^*) < 0$ 时, 那么系统(1)有三个地方病平衡点;

(b) 当 $a_1 < 0$, $R_0 > 1$, $f'(I_1^*) = 0, f'(I_2^*) < 0$ 时, 那么系统(1)有两个地方病平衡点;

(c) 当 $a_1 < 0$, $R_0 > 1$, $f'(I_1^*) > 0, f'(I_2^*) = 0$ 时, 那么系统(1)有两个地方病平衡点;

(d) 当 $a_1 < 0$, $R_0 > 1$, $f'(I_1^*) > 0, f'(I_2^*) > 0$ 时, 那么系统(1)有一个地方病平衡点;

(e) 当 $a_1 < 0$, $R_0 > 1$, $f'(I_1^*) < 0, f'(I_2^*) < 0$ 时, 那么系统(1)有一个地方病平衡点;

(f) 当 $a_1 \leq 0$, $R_0 \leq 1$, $f'(I_2^*) < 0$ 时, 那么系统(1)有两个地方病平衡点;

(g) 当 $a_1 \leq 0$, $R_0 \leq 1$, $f'(I_2^*) = 0$ 时, 那么系统(1)有一个地方病平衡点;

(h) 当 $a_1 \geq 0$, $R_0 > 1$ 时, 那么系统(1)有一个地方病平衡点。

2、当 $\Delta = 0$, 即 $f'(I^*)$ 有一个重根 $I_1^* = I_2^*$, 且 $a_1 \neq 0$, $R_0 > 1$ 时, 那么系统(1)有一个地方病平衡点。

3、当 $\Delta < 0$, 即 $f'(I^*)$ 没有实根, 如果 $R_0 > 1$, 那么系统(1)有一个地方病平衡点。

4. 无病平衡点的稳定性

4.1. 局部稳定性

定理 2 对于系统(1), 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。

证明 系统(1)在 E_0 处的雅可比矩阵是

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -d & 0 & -\beta_1 S_0 & -\beta_2 S_0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\eta+d) & \beta_1 S_0 & \beta_2 S_0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\eta & -(d+\delta_1+\gamma_1+r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\rho)\eta & 0 & -(d+\gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & -(d+\delta_2+\gamma_3) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -d \end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda+d & 0 & \beta_1 S_0 & \beta_2 S_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+(\eta+d) & -\beta_1 S_0 & -\beta_2 S_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\eta & \lambda+(d+\delta_1+\gamma_1+r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\rho)\eta & 0 & \lambda+(d+\gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & \lambda+(d+\delta_2+\gamma_3) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda+d \end{vmatrix}$$

对应的特征根为 $-d$, $-(d+\delta_2+\gamma_3)$, $-d$ 和以下方程的根

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0$$

其中

$$A_1 = (\eta+d) + (d+\gamma_2) + (d+\delta_1+\gamma_1+r)$$

$$A_2 = (\eta+d)(d+\gamma_2) + (\eta+d)(d+\delta_1+\gamma_1+r) + (d+\gamma_2)(d+\delta_1+\gamma_1+r) - \beta_1 S_0 \rho\eta - \beta_2 S_0 (1-\rho)\eta \\ = (d+\gamma_2)(d+\delta_1+\gamma_1+r) + (\eta+d)(d+\delta_1+\gamma_1+r)(1-R_1) + (\eta+d)(d+\gamma_2)(1-R_2)$$

$$A_3 = (\eta+d)(d+\gamma_2)(d+\delta_1+\gamma_1+r) - \beta_1 S_0 \rho\eta(d+\gamma_2) - \beta_2 S_0 (1-\rho)\eta(d+\delta_1+\gamma_1+r) \\ = (\eta+d)(d+\gamma_2)(d+\delta_1+\gamma_1+r)(1-R_0)$$

注意到 $A_1 > 0$, 若 $R_0 < 1$, 则 $R_1 < 1, R_2 < 1$, 即 $A_2, A_3 > 0$, 并得到

$$A_1 A_2 - A_3 = (\eta+d)(d+\delta_1+\gamma_1+r)(\eta+2d+\delta_1+\gamma_1+r)(1-R_1) \\ + (\eta+d)(d+\gamma_2)(\eta+2d+\gamma_2)(1-R_2) \\ + (d+\delta_1+\gamma_1+r)(d+\gamma_2)(2\eta+4d+\gamma_2+\delta_1+\gamma_1+r)$$

当 $R_0 < 1$ 时, $R_1 < 1, R_2 < 1$, 所以 $A_1 A_2 - A_3 > 0$, 因此由 Hurwitz 判据[8]可知, $E(\lambda) = 0$ 的根均具有负实部, 即当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。

4.2. 全局稳定性

定理 3 若 $R_0 < 1$, 系统(1)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

证明 构造 Lyapunov 函数:

$V(t) = (d+\gamma_2)(d+\delta_1+\gamma_1+r)E(t) + (d+\gamma_2)\beta_1 S_0 I(t) + (d+\delta_1+\gamma_1+r)\beta_2 S_0 I_e(t)$, 则 $V(t)$ 沿系统(1)的

全导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= (d + \gamma_2)(d + \delta_1 + \gamma_1 + r)\beta_1 SI + (d + \gamma_2)(d + \delta_1 + \gamma_1 + r)\beta_2 SI_e \\ &\quad - (d + \gamma_2)(d + \delta_1 + \gamma_1 + r)(\eta + d)E + (d + \gamma_2)\beta_1 S_0 \rho \eta E \\ &\quad - (d + \gamma_2)\beta_1 S_0 (d + \delta_1 + \gamma_1 + r)I + (d + \gamma_2)\beta_1 S_0 r I (H/K) \\ &\quad + (d + \delta_1 + \gamma_1 + r)\beta_2 S_0 (1 - \rho)\eta E - (d + \delta_1 + \gamma_1 + r)(d + \gamma_2)\beta_2 S_0 I_e \\ &\leq \left[(d + \gamma_2)\beta_1 S_0 \rho \eta + (d + \delta_1 + \gamma_1 + r)\beta_2 S_0 (1 - \rho)\eta - (\eta + d)(d + \gamma_2)(d + \delta_1 + \gamma_1 + r) \right] E \\ &= (R_0 - 1)E \end{aligned}$$

因此当 $R_0 < 1$ 时, $\frac{dV}{dt} < 0$, 且仅 $S = S_0, H = 0$ 时成立, 所以根据 LaSalle 不变理论及极限方程理论[9], 无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

5. 数值模拟

本文从中国疾病预防控制中心官网(见 <http://www.chinacdc.cn/>链接)获取了 2022 年 1 月至 12 月的手足口病病例数, 并将该数据与系统(1)进行拟合。通过查阅中国统计年鉴(见 <http://www.stats.gov.cn> 链接), 计算了 2022 年平均每月新增人口数大约为 79.6 万人; 自然死亡率约为 $1/78.3 = 1.28 \times 10^{-2}$ 。该年手足口病死亡 6 人, 患病总人数为 68.52 万人, 所以因病死亡率为 1.46×10^{-6} 。手足口病的平均潜伏期约为 4 天; 患者在感染手足口病后平均恢复时间为 8.5 天。其他参数值通过使用最小二乘法拟合得到, 如表 1, 估计的初始值见表 2。系统(1)对 2022 年中国大陆报告手足口病病例拟合程度见图 4。

Table 1. Parameter values and sources

表 1. 参数取值及来源

参数	取值	来源	参数	取值	来源
Λ	796,000	Data	d	1.28×10^{-2}	Data
β_1	2.1×10^{-7}	Fitted	β_2	5×10^{-8}	Fitted
ρ	0.12	Fitted	$1/\eta$	4/30	Data
γ_1	3.5293	Data	γ_2	3.5293	Data
γ_3	3.5293	Data	δ_1	1.46×10^{-6}	Data
δ_2	1.46×10^{-6}	Data	r	0.8	Fitted
K	2×10^5	Fitted			

Table 2. Initial values and sources

表 2. 初始值及来源

初值	取值	来源	初值	取值	来源
$S(0)$	7×10^7	Data	$E(0)$	8×10^4	Assumed
$I(0)$	44183	Data	$I_e(0)$	6×10^4	Assumed
$H(0)$	2×10^4	Assumed	$R(0)$	0	Assumed

下面利用偏秩相关系数分析各参数对 R_0 的影响, 图 5 中 PRCC 值为正表示该参数增加时 R_0 会增大, 为负值表示该参数增加时 R_0 会减小。图中显示就医率 r 与 R_0 高度负相关, 接下来将考虑就医率对疾病传

播的影响。

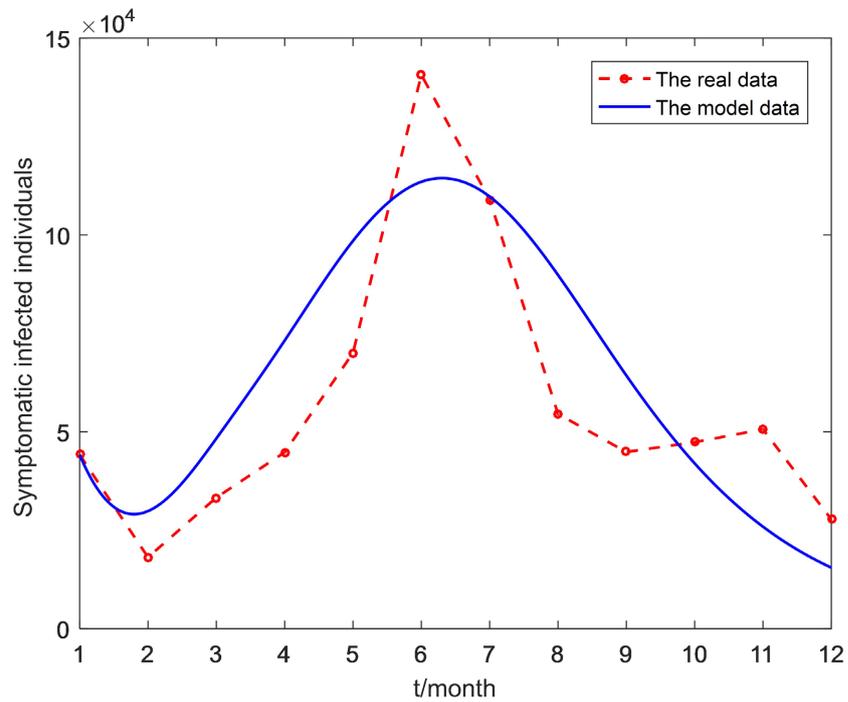


Figure 4. Fitting results of system (1) and data reported in Chinese Mainland from January to December 2022

图 4. 系统(1)与中国大陆 2022 年 1 月至 12 月报道数据的拟合结果

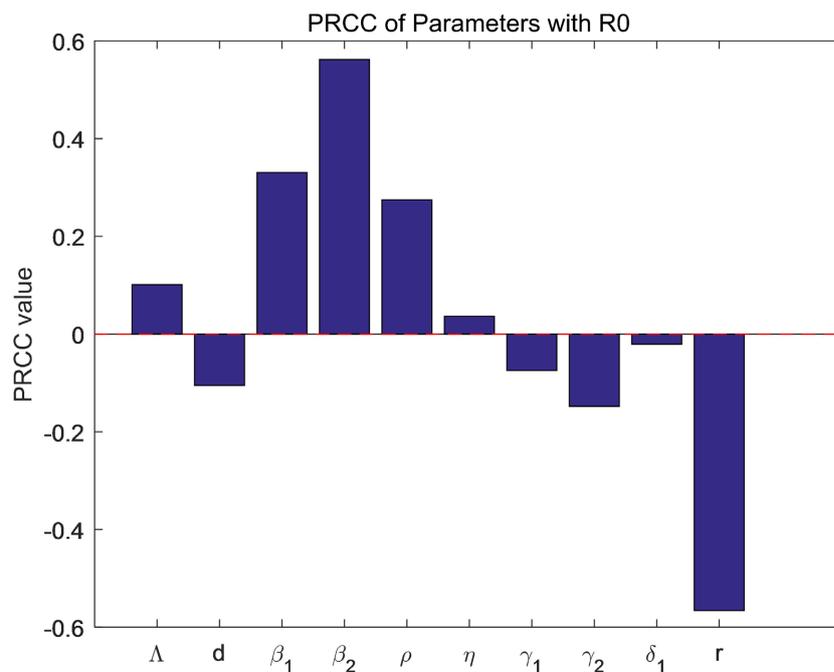


Figure 5. The relevant parameters of system (1) are related to the PRCC value of R_0

图 5. 系统(1)的相关参数关于 R_0 的 PRCC 值

从图 6 和图 7 可以看出, 就医率从 0.7 提高到 0.9 时, 感染者的峰值从 122,600 降到 108,600, 即峰

值下降 11.4%，而住院治疗者的峰值从 21,480 上升到 23,800，即峰值上升 10.8%，这表明在感染手足口病后，及时就医可以确保更多患者得到治疗。

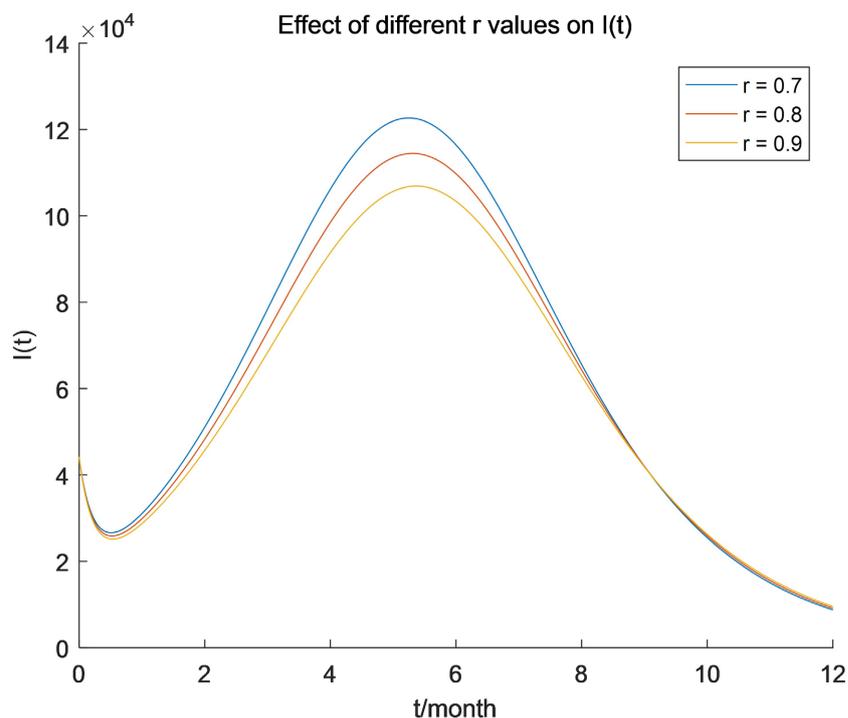


Figure 6. The impact of different medical treatment rates on overtly infected individuals

图 6. 不同就医率对显性感染者的影响

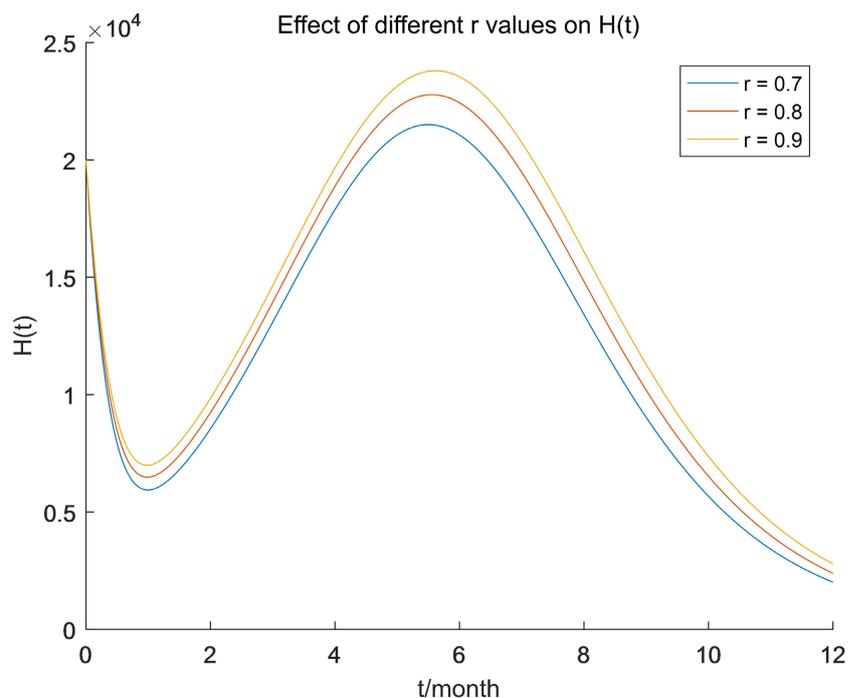


Figure 7. The impact of different medical treatment rates on hospitalized patients

图 7. 不同就医率对住院治疗者的影响

因此提高公众对感染手足口病后及时就医的意识可有效控制手足口病的传播。建议相关部门可以通过互联网平台, 学校讲座以及社区宣传等多种方式提高公众对手足口病的认识, 其中包括手足口病出现

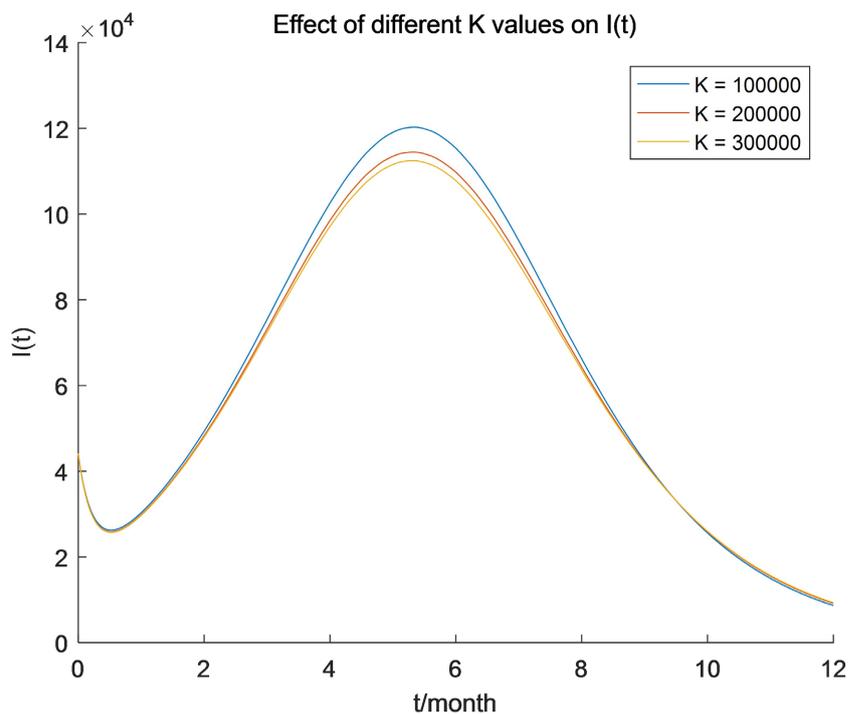


Figure 8. The impact of hospital bed counts on overt infected individuals

图 8. 医院床位数对显性感染者的影响

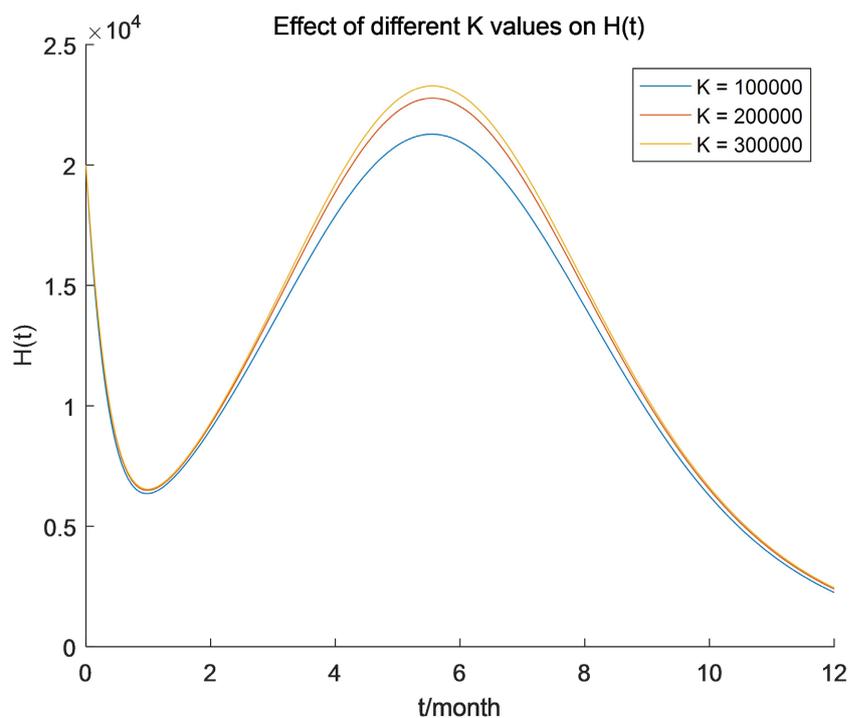


Figure 9. The impact of hospital bed count on hospitalized patients

图 9. 医院床位数对住院治疗者的影响

的症状, 治疗方法, 预防措施等, 同时在手足口病高发季节, 如夏季和秋季, 增设临时诊所, 便于患者在发病时能够及时治疗。

从图 8 和图 9 中可以看出医院床位数从 100,000 增加至 300,000 时, 感染者的峰值从 120,300 降到 112,400, 即峰值下降 6.6%, 而住院治疗者的峰值从 21,280 升到 23,290, 即峰值上升 9.4%, 这表明增加床位数能够接纳更多患者进行治疗, 从而保障儿童的健康, 并有效降低其他儿童感染手足口病的风险。

医院床位数是衡量有限医疗资源的一个指标, 由图 3 中统计的数据可知中国大陆各个地区的儿童病床数存在较大差异, 在手足口病大规模爆发情况下, 如果床位数不足, 可能会导致一些重症患者无法住院治疗。因此, 希望政府可以优化医疗资源分配, 以确保在手足口病高发期, 医院有足够的床位去接纳重症患者。

6. 总结

本文建立了具有隐性传染和有限医疗资源的手足口病模型。计算了疾病的基本再生数, 得到了无病平衡点的稳定性条件, 并讨论了地方病平衡点的存在性。利用中国大陆 2022 年 1 月至 12 月的月数据进行拟合, 通过分析发现提高就医率可确保更多患者及时就医, 增加医院床位数可使医院接纳更多患者, 保证他们能够及时治疗, 因此准备充足的医疗资源可有效控制手足口病的传播。

基金项目

重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJQN202100709)。

参考文献

- [1] 聂青和. 手足口病流行病学及其临床诊断与治疗[J]. 中国实用内科杂志, 2008, 28(8): 3.
- [2] Ma Y., Liu M., Hou Q., et al. (2013) Modelling Seasonal HFMD with the Recessive Infection in Shandong, China. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **10**, 1159-1171. <https://doi.org/10.3934/mbe.2013.10.1159>
- [3] Wang J., Xiao Y. and Check R. (2016) Modelling the Effects of Contaminated Environments on HFMD Infections in Mainland China. *Biosystems*, **140**, 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2015.12.001>
- [4] Wang J., Xiao Y. and Peng Z. (2016) Modelling Seasonal HFMD Infections with the Effects of Contaminated Environments in Mainland China. *Applied Mathematics and Computation*, **27**, 615-627. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.035>
- [5] Shan, C. and Zhu, H. (2014) Bifurcations and Complex Dynamics of an SIR Model with the Impact of the Number of Hospital Beds. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1662-1688. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.05.030>
- [6] 刘单, 王艳, 任新志, 等. 具有媒体报道和有限医疗资源的传染病模型[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(3): 333-344.
- [7] Van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- [8] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程稳定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [9] La Salle, J.P. (1994) *The Stability of Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.