Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(4), 1558-1564**
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134146

回收锥和回收函数的性质

黄　雯[1*]**，高　英**[2]

[1]重庆师范大学数学科学学院，重庆
[2]内蒙古大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特

收稿日期：2024年3月23日；录用日期：2024年4月21日；发布日期：2024年4月28日

摘　要

回收锥和回收函数作为凸分析的重要研究对象，在最优化理论中有着广泛的应用。本文首先根据渐近锥和回收锥有关交集运算的性质推导出了渐近锥关于并集运算的性质。其次，针对正则条件下回收函数的四则运算进行了讨论，并得出了相应的结论。最后，举例说明了回收函数一些性质成立时相关条件的合理性。

关键词

渐近锥，回收锥，回收函数，正则性

The Properties of Recession Cone and Recession Function

Wen Huang[1*]**, Ying Gao**[2]

[1]School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing
[2]School of Mathematics Science, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Mar. 23rd, 2024; accepted: Apr. 21st, 2024; published: Apr. 28th, 2024

Abstract

The recession cone and recession function are extremely important research objects in Convex Analysis. They have extensive applications in the optimization theory. Firstly, this article investigates the properties of union operation of asymptotic cones based on the properties of the intersection operation of asymptotic cone and recession cone. Secondly, the four operations of the recession function under regular conditions are discussed and corresponding conclusions are drawn.

*通讯作者。

文章引用: 黄雯, 高英. 回收锥和回收函数的性质[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1558-1564.
DOI: 10.12677/aam.2024.134146

Finally, examples are given to illustrate the rationality of the relevant conditions when some properties of recession function hold.

Keywords

Asymptotic Cone, Recession Cone, Recession Function, Regularity

1. 引言

在二十世纪六十年代末期，凸分析[1] [2] [3]日益形成，随后逐渐发展起来，成为新的数学分支。凸分析主要研究凸集和凸函数的性质及其应用。在凸分析的基本概念中，回收锥和回收函数作为刻画凸集和凸函数无界性的主要工具，得到了广泛的研究和应用。早在 1970 年，Rockafellar [1]针对回收锥和回收函数的基本概念、性质及其应用进行了详细的介绍。此外，文献[2]和[3]也针对凸优化概念的理论和应用进行了详细介绍。Rockafellar 在凸分析中讨论凸集的回收锥及其性质和应用。1979 年，Beer [4]提出了非凸集合的回收锥，并利用其研究增函数的性质，证明数值分析中的重要定理和关于闭集与闭性的优化理论。

凸性在研究回收锥和回收函数的性质中起着重要的作用。如：1974 年，Robert [5]利用集合的回收锥、函数的回收锥讨论了最优性条件。在文献[6] [7] [8]中回收锥和回收函数在凸性条件下具有很好的性质。Lara 在文献[9]中讨论了拟凸条件下的一些拟凸渐近函数及其应用。然而，因为回收锥不能反映一个集合在无穷远处的性质，所以对于非凸条件下回收锥和回收函数的研究并不多。近年来，Li 等人[10]扩展了非凸条件下回收锥和回收函数的研究，表明了函数的单调性和 Lipschitz 连续性与回收函数的性质密切相关。特别地，他们在非凸条件下的渐近分析中引入了正则性的概念，并得到了正则性条件下非凸优化问题解集有界性和非空性的刻画。随后，在文献[11]中 Li 等人从回收函数的角度讨论了渐近函数的单调性和 Lipschitz 连续性，并利用非线性标量化函数研究了一般约束条件下非凸优化问题解集的有界性和非空性。

本文以文献[1] [2] [3]中回收锥和回收函数的基本理论作为基础，针对文献[10]中回收锥和回收函数的性质作了进一步研究。首先，根据渐近锥和回收锥有关交集运算的性质研究了渐近锥关于并集运算的性质。其次，针对正则条件下回收函数的四则运算进行了讨论并得到了相应的结论。最后，再举例说明了回收函数一些性质成立时相关条件的合理性。

2. 预备知识

令 R^n 为 n 维欧氏空间。对于函数 $f: R^n \to R\bigcup\{+\infty\}$，定义

$$dom\, f = \{x \in R^n : f(x) < +\infty\},$$

$$epi\, f = \{(x,\alpha) \in R^{n+1} : \alpha \ge f(x)\}.$$

若对于任意 $x \in R^n$ 有 $f(x) > -\infty$ 且 $dom\, f \ne \varnothing$，则称函数 f 是真函数。

定义 2.1 [10]设 $A \subset R^n$ 为一非空集合，A 的渐近锥记为 A_∞，其定义如下

$$A_\infty=\left\{u\in R^n:\exists t_n\downarrow 0,\exists x_n\in A,t_nx_n\to u\right\}.$$

特别地，若 A 为非空凸集，则渐近锥 A_∞ 退化为回收锥 A^∞，其中

$$A^\infty=\left\{u\in R^n:x+\lambda u\in A,\forall\lambda\geq 0,\forall x\in A\right\}.$$

定义 2.2 [10]函数 $f:R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 的渐近函数 f_∞ 和回收函数 f^∞ 分别定义如下

$$epi\,f_\infty=\left(epi\,f\right)_\infty,$$

$$epi\,f^\infty=\left(epi\,f\right)^\infty.$$

定义 2.3 [10]设 $A\subset R^n$ 为一非空集合，$f:R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 为一个真函数。若 $A^\infty=A_\infty$，则称集合 A 是正则的。若 $f^\infty=f_\infty$，则称函数 f 是正则的。

文献[3] [10]给出了渐近锥和回收锥的以下性质。

引理 2.4 [10]对任意一组集合 $A_i\subset R^n,i\in I$，其中 I 为任意指标集且 $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\varnothing$，则

1) $\left[\bigcap_{i\in I}A_i\right]_\infty\subset\bigcap_{i\in I}\left(A_i\right)_\infty$，

2) $\bigcap_{i\in I}A_i^\infty\subset\left[\bigcap_{i\in I}A_i\right]^\infty$。

注 2.5 在引理 2.4 中若 $A_i\subset R^n\left(i\in I\right)$ 为闭凸集，则包含关系变成等式关系。

引理 2.6 [3]设 A_1,A_2 为 R^n 中的非空闭凸集，假设 A_1 回收方向的反方向都不是 A_2 的回收方向，则 A_1+A_2 为闭集且

$$\left(A_1+A_2\right)^\infty=A_1^\infty+A_2^\infty.$$

引理 2.7 [10]设 $f:R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是一个真函数，则对任意 $u\in R^n$ 有

$$f_\infty\left(u\right)=\liminf_{u'\to u,t\to+\infty}\frac{f\left(tu'\right)}{t}.$$

引理 2.8 [3]设 $f:R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是一个真函数，则对任意 $u\in R^n$ 有

$$f^\infty\left(u\right)=\sup_{x\in dom f,\,t>0}\frac{f\left(x+tu\right)-f\left(x\right)}{t}.$$

引理 2.9 [2]设 $f:R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是一个真函数，若 f 是正则的，则

$$f^\infty\left(u\right)=f_\infty\left(u\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(x_0+tu\right)-f\left(x_0\right)}{t},$$

其中 $x_0\in dom\,f$。若 $0\in dom\,f$，则

$$f^\infty\left(u\right)=f_\infty\left(u\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(tu\right)}{t}.$$

引理 2.10 [10]设 $f_1,f_2:R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是正则函数，则对任意 $u\in R^n$ 有

$$\left(f_1\pm f_2\right)_\infty\left(u\right)=\left(f_1\right)_\infty\left(u\right)\pm\left(f_2\right)_\infty\left(u\right).$$

定义 2.11 [12]设 A 为 R^n 中一非空凸集，f 是 A 上的函数。若对任意两点 $x_1,x_2\in A$ 和 $\lambda\in(0,1)$ 有

$$f\left(\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2\right)\leq\lambda f\left(x_1\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(x_2\right),$$

则称函数 f 为 A 上的凸函数。

3. 回收锥和回收函数的性质

文献[3]和[10]给出了渐近锥和回收锥有关交集的运算性质。下面结合相关定理给出渐近锥的并集运算性质。

定理 3.1 对任意一组集合 $A_i, i\in I$，其中 I 为任意指标集，则有

$$\bigcup_{i\in I}(A_i)_\infty \subset \left[\bigcup_{i\in I} A_i\right]_\infty.$$

证明： 设 $u\in\bigcup_{i\in I}(A_i)_\infty$，则存在 $i_0\in I$ 使得 $u\in\left(A_{i_0}\right)_\infty$。由渐近锥的定义得存在 $i_0\in I, t_k\to 0, x_k\in A_{i_0}$ 使得 $x_k t_k\to u$。因此存在 $t_k\to 0, x_k\in\bigcup_{i\in I}A_i$ 使得 $x_k t_k\to u$。即 $u\in\left[\bigcup_{i\in I}A_i\right]_\infty$，故 $\bigcup_{i\in I}(A_i)_\infty\subset\left[\bigcup_{i\in I}A_i\right]_\infty$。从而结论成立。

推论 3.2 当 i 为有限指标集时，则

$$\bigcup_{i=1}^n (A_i)_\infty = \left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right]_\infty.$$

证明： 下面用数学归纳法证明 $\bigcup_{i=1}^n (A_i)_\infty = \left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right]_\infty$ 成立。

令 $i=2$，若 $u\in(A_1\cup A_2)_\infty$，则存在 $t_k\to 0, x_k\in A_1\cup A_2$ 使得 $x_k t_k\to u$。从而存在 $t_k\to 0, x_k\in A_1$ 或 $x_k\in A_2$ 使得 $x_k t_k\to u$。即存在 $i_0\in\{1,2\}, t_k\to 0, x_k\in A_{i_0}$ 使得 $x_k t_k\to u$。故存在 $i_0\in\{1,2\}$ 使得 $u\in\left(A_{i_0}\right)_\infty$。从而有 $u\in(A_1)_\infty\cup(A_2)_\infty$。

再由定理 3.1 可知 $(A_1\cup A_2)_\infty=(A_1)_\infty\cup(A_2)_\infty$。

假设当 $i=m(m>2)$ 时结论成立，即 $\bigcup_{i=1}^m (A_i)_\infty = \left[\bigcup_{i=1}^m A_i\right]_\infty$，则当 $i=m+1$ 时有

$$\bigcup_{i=1}^{m+1}(A_i)_\infty=\bigcup_{i=1}^{m}(A_i)_\infty\cup(A_{m+1})_\infty=\left[\bigcup_{i=1}^m A_i\right]_\infty\cup(A_{m+1})_\infty=\left[\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)\cup A_{m+1}\right]_\infty=\left(\bigcup_{i=1}^{m+1}A_i\right)_\infty.$$

从而由数学归纳法有 $\bigcup_{i=1}^n (A_i)_\infty = \left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right]_\infty$。

下面举例说明上述定理。

例 3.3 设 $A_1=\left\{(x_1,x_2): x_1>0, x_2\ge\dfrac{1}{x_1}\right\}, A_2=\left\{(x_1,x_2): x_2\ge x_1^2\right\}$，则

$$A_1\cup A_2=\left\{(x_1,x_2): x_1\le 1, x_2\ge x_1^2\right\}\cup\left\{(x_1,x_2): x_1>1, x_2\ge\frac{1}{x_1}\right\}.$$

从而

$$(A_1\cup A_2)_\infty=\left\{(x_1,x_2): x_1\ge 0, x_2\ge 0\right\}.$$

又 A_1 和 A_2 的渐近锥分别为

$$(A_1)_\infty=\left\{(x_1,x_2): x_1\ge 0, x_2\ge 0\right\},$$

$$(A_2)_\infty=\left\{(x_1,x_2): x_1=0, x_2\ge 0\right\}.$$

从而

$$(A_1)_\infty\cup(A_2)_\infty=\left\{(x_1,x_2): x_1\ge 0, x_2\ge 0\right\}.$$

这表明

$$(A_1\cup A_2)_\infty=(A_1)_\infty\cup(A_2)_\infty.$$

下面给出正则条件下渐近函数的一些运算性质。

定理 3.4 设 $f:R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是正则函数，且 f 是线性泛函，则

1) 对任意 $u\in R^n$ 有 $f_\infty(\lambda u)=\begin{cases}\lambda f_\infty(u) & \lambda\ge 0,\\ -\lambda(f_\infty)(-u) & \lambda<0.\end{cases}$

2) 对任意 $u,v\in R^n$ 有 $f_\infty(u+v)=f_\infty(u)+f_\infty(v)$。

证明：(1) 当 $\lambda\ge 0$ 时，由引理 2.9 有

$$\begin{aligned}f_\infty(\lambda u)=f^\infty(\lambda u)&=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+\lambda tu)-f(x_0)}{t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(\lambda x_0+\lambda tu)-f(\lambda x_0)}{t}\\&=\lambda\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}=\lambda f_\infty(u).\end{aligned}$$

当 $\lambda<0$ 时，

$$f_\infty(\lambda u)=-\lambda\left[(-f)_\infty(u)\right]=-\lambda(f_\infty)(-u).$$

(2) 根据引理 2.9，对任意的 $u,v\in R^n$ 有

$$\begin{aligned}f_\infty(u+v)&=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+tu+tv)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(2x_0+tu+tv)-f(2x_0)}{t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+tu)+f(x_0+tv)-f(x_0)-f(x_0)}{t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}+\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}\right]\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}+\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}=f_\infty(u)+f_\infty(v).\end{aligned}$$

注 3.5 在定理 3.4 中，函数 f 为线性泛函的条件是必不可少的。即使 $f(x)$ 是次线性的，该结论也不一定成立。

例 3.6 设 $f(x)=|x|,x\in R$，则对任意的 $x\in R$ 和 $t>0$ 有

$$f(tx)=|tx|=t|x|=tf(x).$$

对任意的 $x_1,x_2\in R$ 有

$$f(x_1+x_2)=|x_1+x_2|\le|x_1|+|x_2|=f(x_1)+f(x_2).$$

这表明 $f(x)$ 是次线性泛函，且 $f(x)=|x|$ 是正则的。由引理 2.9 可知

$$f_\infty(\lambda u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+t\lambda u)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|x_0+t\lambda u|-|x_0|}{t},$$

$$\lambda f_\infty(u)=\lambda\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda|x_0+tu|-\lambda|x_0|}{t}.$$

$$f_\infty(u+v)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x_0+tu+tv)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|2x_0+tu+tv|-|2x_0|}{t},$$

$$f_\infty(u)+f_\infty(v)=\lim_{t\to+\infty}\frac{|x_0+tu|-|x_0|}{t}+\lim_{t\to+\infty}\frac{|x_0+tv|-|x_0|}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|x_0+tu|+|x_0+tv|-|2x_0|}{t}.$$

无法得到定理 3.4 中的结论。

定理 3.7 设 $\overline{f}(x)=\max_{i\in I} f_i(x), \underline{f}(x)=\min_{i\in I} f_i(x)$，且 $f_i(x), i\in I$ 是正则函数，则

$$\overline{f}_\infty(u)\le \max_{i\in I}(f_i)_\infty(u),\quad \min_{i\in I}(f_i)_\infty(u)\le \underline{f}_\infty(u)\le \max_{i\in I}(f_i)_\infty(u).$$

证明： 因为 $\overline{f}(x)=\max_{i\in I} f_i(x), \underline{f}(x)=\min_{i\in I} f_i(x)$，则 $epi\,\overline{f}=\bigcap_{i\in I} epi\, f_i$，$epi\,\underline{f}=\bigcup_{i\in I} epi\, f_i$。

取 $A_i = epi\, f_i$，则根据引理 2.4 有

$$\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right]_\infty=\left[\bigcap_{i\in I} epi\, f_i\right]_\infty=\left[epi\,\overline{f}\right]_\infty\subset\bigcap_{i\in I}(A_i)_\infty=\bigcap_{i\in I}(epi\, f_i)_\infty.$$

从而有 $\overline{f}_\infty(u)\le \max_{i\in I}(f_i)_\infty(u)$。

根据定理 3.1 有

$$\bigcup_{i\in I}(A_i)_\infty=\bigcup_{i\in I}(epi\, f_i)_\infty\subset\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right]_\infty=\left[\bigcup_{i\in I} epi\, f_i\right]_\infty=\left[epi\,\underline{f}\right]_\infty.$$

从而有 $\min_{i\in I}(f_i)_\infty(u)\le \underline{f}_\infty(u)$。

又根据

$$\underline{f}_\infty(u)=\left[-\max_{i\in I}(-f_i)\right]_\infty(u)=\left[\max_{i\in I}(-f_i)\right]_\infty(-u)\le \max_{i\in I}(-f_i)_\infty(-u)=\max_{i\in I}(f_i)_\infty(u).$$

故得到 $\min_{i\in I}(f_i)_\infty(u)\le \underline{f}_\infty(u)\le \max_{i\in I}(f_i)_\infty(u)$。

定理 3.8 设 $f_1, f_2 : R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是正则的，若 $f_1 f_2$ 是正则的且 $0\in dom\, f_1, 0\in dom\, f_2$，并且 $(f_1)_\infty(u)(f_2)_\infty(u)$ 有界大于 0，则有 $(f_1 f_2)_\infty(u)=+\infty$。

证明： 因为 $f_1 f_2$ 是正则的且 $0\in dom\, f_1, 0\in dom\, f_2$，从而根据渐近函数的计算方法有

$$(f_1 f_2)_\infty(u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(f_1 f_2)(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f_1(tu)f_2(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f_1(tu)}{t}\frac{f_2(tu)}{t}t,$$

又由 $(f_1)_\infty(u)(f_2)_\infty(u)$ 有界大于 0，$\{t\}_{t\to+\infty}$ 是无穷大量，则根据无穷大量的运算性质可得 $(f_1 f_2)_\infty(u)=+\infty$。

若 $f_1, f_2 : R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是正则的，不能推出 $f_1 f_2$ 和 $f_1/f_2\,(f_2\ne 0)$ 也是正则的。

例 3.9 设 $f_1(x)=x, f_2(x)=x^2, f_3(x)=x^4, x\in R$ 都是正则函数，由回收函数的计算方法有

$$(f_1 f_2)^\infty(u)=\sup_{x\in R,\, t>0}\frac{(x+tu)^3-x^3}{t}=\sup_{x\in R,\, t>0} 3ux^2+3tu^2x+t^2u^3,$$

当 $u>0$ 时，$(f_1 f_2)^\infty(u)=+\infty$。

当 $u<0$ 时，$(f_1 f_2)^\infty(u)=0$。

再由渐近函数的计算方法有

$$(f_1 f_2)_\infty(u)=\liminf_{u'\to u,\, t\to+\infty}\frac{(f_1 f_2)(tu')}{t}=\liminf_{u'\to u, t\to+\infty} t^2u'^3,$$

当 $u>0$ 时，$(f_1 f_2)_\infty(u)=+\infty$。

当 $u<0$ 时，$(f_1 f_2)_\infty(u)=-\infty$。

可知 $(f_1 f_2)^\infty(u)\ne(f_1 f_2)_\infty(u)$，从而 $f_1 f_2=x^3$ 和 $f_3/f_1=x^3\,(x\ne 0)$ 不是正则的。

定理 3.10 设 $f_1, f_2 : R^n\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是正则的，若 $f_1/f_2\,(f_2\ne 0)$ 是正则的且 $0\in dom\, f_1, 0\in dom\, f_2$，令 $(f_1)_\infty(u)/(f_2)_\infty(u)=a$，其中 a 为实数，则以下结论成立：

1) 当 $a=0$ 时，$(f_1/f_2)_\infty(u)=0$，

2) 当 a 有界时，$(f_1/f_2)_\infty(u)=0$。

证明： 因为 $f_1/f_2\,(f_2\ne 0)$ 是正则的且 $0\in dom\, f_1, 0\in dom\, f_2$，从而根据渐近函数的计算方法有

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)_\infty(u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(f_1/f_2)(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f_1(tu)/f_2(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f_1(tu)/t}{f_2(tu)/t}\frac{1}{t},$$

又 $\{1/t\}_{t\to+\infty}$ 是无穷小量，从而根据无穷小量的运算性质可得定理 3.10 中的结论。

下面举例来说明定理 3.8 和定理 3.10 的合理性。

例 3.11 设 $f_1(x)=f_2(x)=x, x\in R$，则根据引理 2.9 可得

$$(f_1)_\infty(u)=(f_2)_\infty(u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f_1(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{tu}{t}=u\neq 0,$$

从而 $(f_1)_\infty(u)(f_2)_\infty(u)=u^2>0$，又有

$$(f_1f_2)_\infty(u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(f_1f_2)(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2u^2}{t}=\lim_{t\to+\infty}u^2t=+\infty.$$

例 3.12 设 $f_1(x)=x, f_2(x)=x^2, x>0$。则由引理 2.9 可得

$$(f_1)_\infty(u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f_1(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{tu}{t}=u\neq 0,$$

$$(f_2)_\infty(u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f_2(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2u^2}{t}=\lim_{t\to+\infty}tu^2=+\infty,$$

又有

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)_\infty(u)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(f_1/f_2)(tu)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1/tu}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2u}=0.$$

基金项目

重庆市留学人员回国创新基金项目(cx2020096)。

参考文献

[1] Rockafellar, R.T. (1970) Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400873173

[2] 冯德兴. 凸分析基础[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[3] Bertsekas, D.P. (2009) Convex Optimization Theory. Athena Scientific, Nashua, NH.

[4] Beer, G. (1979) Recession Cones of Nonconvex Sets and Increase Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **73**, 228-232. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1979-0516469-7

[5] Robert, A. (1975) Abrams. Technical Note: Optimality Conditions and Recession Cones. *Operations Research*, **23**, 549-553. https://doi.org/10.1287/opre.23.3.549

[6] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.B. (2004) Variational Analysis. Springer, Berlin.

[7] Auslender, A. and Teboulle, M. (2003) Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities. Springer, Berlin.

[8] Bagirov, A., Karmitsa, N. and Makela, M.M. (2014) Introduction to Nonsmooth Optimization. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08114-4

[9] Lara, F. (2017) Generalized Asymptotic Functions in Nonconvex Multiobjective Optimization Problems. *Optimization*, **66**, 1259-1272. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1235162

[10] Li, G.H., Li, S.J. and You, M.X. (2021) Recession Function and Its Applications in Optimization. *Optimization*, **70**, 2559-2578. https://doi.org/10.1080/02331934.2020.1786569

[11] Li, G.H., Li, S.J. and You, M.X. (2023) Asymptotic Analysis of Scalarization Functions and Applications. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **19**, 2367-2380. https://doi.org/10.3934/jimo.2022046

[12] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2003.