

APARCH-PET模型的VaR度量

徐慧颖*, 魏正元, 何青霞, 杨洁

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2022年11月28日; 录用日期: 2022年12月18日; 发布日期: 2022年12月30日

摘要

本文提出了一种包含PES的正Edgeworth截断分布(PET), 给出了APARCH-PET模型的VaR表达式, 研究了APARCH-PET与经典模型的数据拟合效果。选用上证主板招商银行股票数据进行实证分析, 结果表明: PET分布在拟合资产收益率数据的尾部特征时更具优势, 构建的APARCH-PET模型能更好的刻画金融资产收益率数据分布的尖峰、厚尾特征和非对称性, 且一定程度上提高了VaR度量的预测精度。

关键词

Edgeworth展开, APARCH模型, VaR

VaR Measure Based on APARCH-PET Models

Huiying Xu*, Zhengyuan Wei, Qingxia He, Jie Yang

School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Nov. 28th, 2022; accepted: Dec. 18th, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

In this paper, a positive Edgeworth truncated distribution (PET) including PES is proposed, the VaR expression of APARCH-PET model is given, and the data fitting effect of APARCH-PET and classical model is studied. The empirical analysis results show that PET distribution has more advantages in fitting the tail characteristics of asset yield data, and the APARCH-PET model can better depict the spike, thick-tail characteristics and asymmetry of financial asset yield data distribution, and improve the prediction accuracy of VaR measurement to a certain extent.

Keywords

Edgeworth Expansion, APARCH Model, VaR

*通讯作者。

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在金融市场中，我们一般假设扩大 100 倍的对数收益率服从正态分布，但越来越多的实证分析表明资产收益率数据并不满足对称分布，大多存在明显的尖峰厚尾特征和非对称性。厚尾性表示数据集的尾部比正态分布厚。该现象受到国内外学者持续关注，为了更好地拟合尖峰厚尾特征的资产收益率数据，有学者选用学生 t 分布、广义误差分布等来拟合，它们的拟合效果与正态分布相比尾部更厚，但这并未有效的解决数据尖峰厚尾性和非对称性。所以，不管从理论上还是实际中，我们对概率分布的研究并提出新的分布函数显得非常重要。

实际金融资产收益率数据存在明显的尖峰厚尾特征，该现象受到国内外学者持续关注。现存文献中，针对资产收益率数据分布的估计主要有：参数法(Bollerslev [1])、非参数法(Silverman [2])和半非参数法(Sargan [3], Mauleón 和 Perote [4])。参数法要求数据的分布函数形式已知，如假设研究的数据服从正态分布，再根据已有的数据估计正态分布中的参数，这种假设有时并不成立，会存在较大的偏差；非参数法是不考虑总体分布，此时可以避免对总体分布假设不当而导致的偏差，但对于大样本，计算会变得十分复杂；而半非参数法不需要知道数据概率分布的具体形式，在拟合分布时存在一定的优势。因此，利用半非参数法拟合分布是存在意义的。

若序列 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布于 $X \sim F(x)$ ，满足 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(e^{itx})| < 1$ ，四阶矩 $\mathbb{E}(X^4) < \infty$ ，令 $Z_n = \left[\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \right] / \sigma$ ，则 Z_n 的二阶 Edgeworth [5] 展开式为

$$F_n(x) = \Phi(x) - \left(\frac{d_1 H_2(x)}{\sqrt{n}} + \frac{d_2 H_3(x) + d_3 H_5(x)}{n} \right) \phi(x) + O\left(n^{-\frac{3}{2}} \right), \quad (1)$$

其中， μ 为均值， σ 为标准差， $d_1 = k_3/6$ ， $d_2 = k_4/24$ ， $d_3 = d_1^2/72$ ， $k_3 = \mathbb{E}(X - \mu)^3 / \sigma^3$ ， $k_4 = (\mathbb{E}(X - \mu)^4 - 3) / \sigma^4$ ， $H_i(x)$ 为 Hermit 多项式， $H_2(x) = x^2 - 1$ ， $H_3(x) = x^3 - 3x$ ， $H_5(x) = x^5 - 10x^3 - 15x$ ， $\Phi(x)$ 和 $\phi(x)$ 分别为标准正态分布的分布函数和概率密度函数。Edgeworth 展开式将总体的偏度和峰度参数融入其中，能较好地刻画数据尖峰厚尾特征。Núñez [6] 提出了正的 Edgeworth-Sargan 分布(PES)，León [7] 研究了变换 Gram Charlier 分布(TGC)及应用。

Bollerslev [8] 首次提出 GARCH 模型用于刻画金融数据波动率的聚集特征，此后，针对该模型的拓展和应用形成了丰富的 GARCH 簇模型，如 Nelson [9] 和 Ding [10] 分别提出 EGARCH 与 APARCH 模型，用于克服金融资产收益率正负的非对称效应；魏正元[11]将 EGARCH 模型与广义 Pareto 分布的极值理论结合，构建 EGARCH-PED 模型测算了收益率的 VaR 值，该方法在一定程度上提高了 VaR 估计的预测精度；鲁皓[12]提出用 GARCH-GED 模型来度量证券投资风险；宫晓莉[13]用 GJR-GARCH-GED 模型拟合资产收益率的边际分布，构建 GARCH-copula 模型，分析了两个模型对金融序列的拟合效果，度量了投资组合风险值。

受文献[5]和[6]的启发，本文基于 Edgeworth 展开的思想，新提出了一类正 Edgeworth 截断分布，计算出了新分布密度函数、分布函数和 k 阶矩的函数表达式，并计算出参数的最大似然估计量。新分布包含了数据的峰度与偏度两个参数，在拟合尾部较厚的数据上比正态分布更合适。将 PET 分布刻画到模型的残差序列，建立了 APARCH-PET 模型用于估计收益率序列的 VaR 值。选取上证主板招商银行股票收盘价格数据，对比分析了 APARCH-norm, APARCH-PES, APARCH-PET 三种模型拟合效果，计算出了

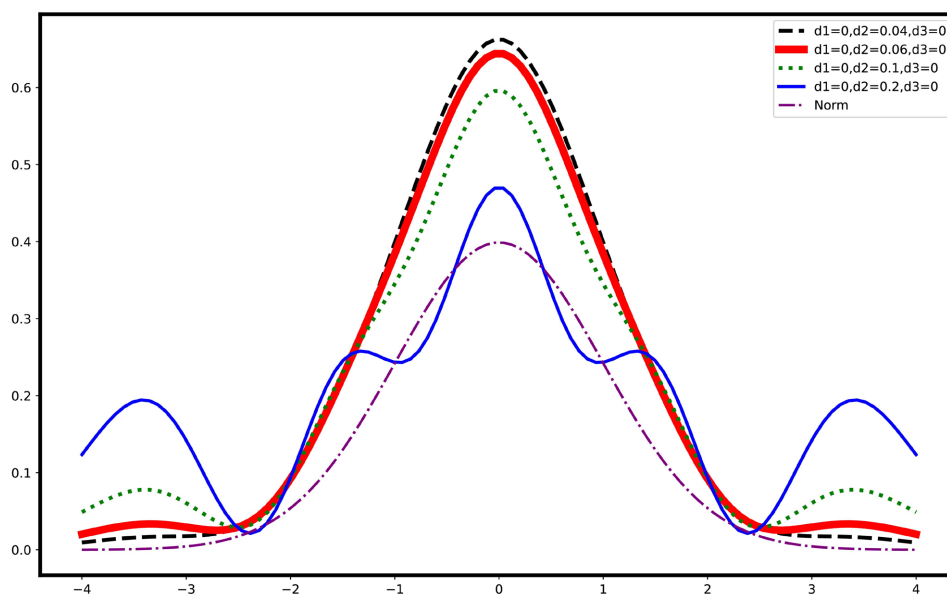
相应的 VaR, 并对 VaR 做了返回测试。结果表明, 采用正态分布拟合残差序列的模型低估了风险值, 而采用 PET 分布拟合残差序列的模型度量的 VaR 更准确。一定程度上提高 VaR 的准确度, 可以防止投资者过度投资, 从而避免一些金融交易中的重大亏损。

2. PET 分布

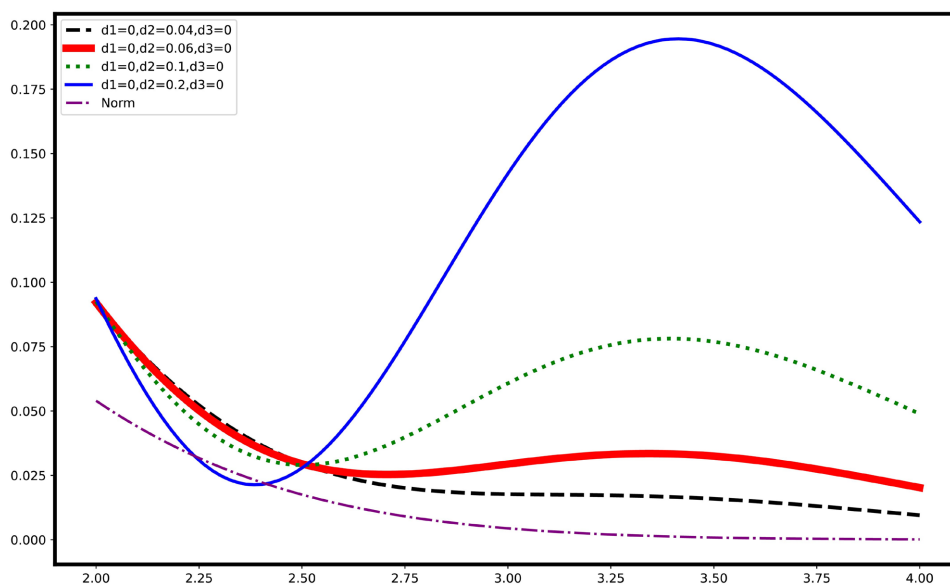
定义 1. 若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\xi} \left(1 + d_1^2 H_3^2(x) + d_2^2 H_4^2(x) + d_3^2 H_6^2(x) \right) \phi(x), \quad (2)$$

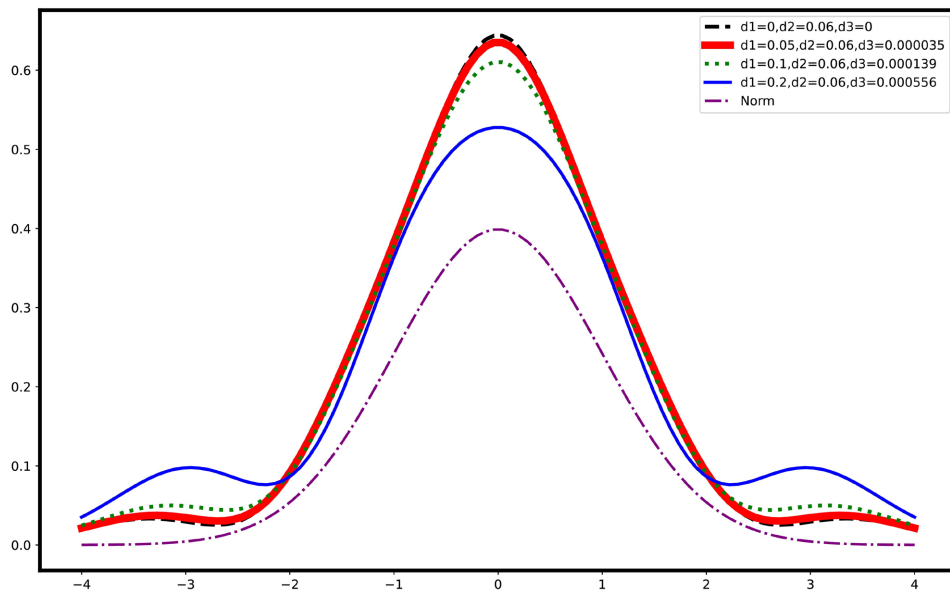
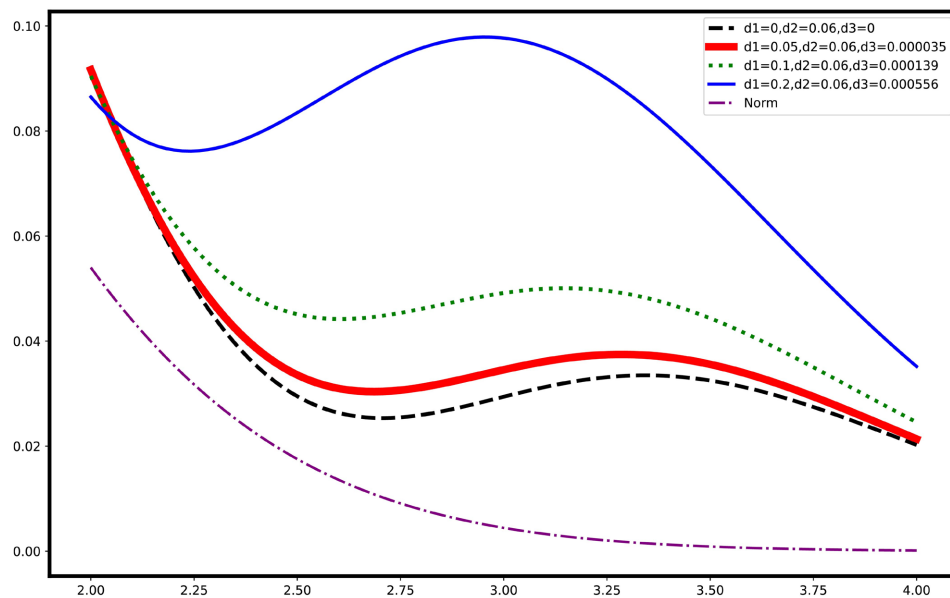
其中, $\xi = 1 + 3!d_1^2 + 4!d_2^2 + 6!d_3^2$, 则称 X 服从正 Edgeworth 截断分布, 简称 PET。



(a) PET 概率密度函数图($d_1 = 0, d_2 = 0.04, 0.06, 0.10, 0.20$)



(b) PET 概率密度函数图($d_1 = 0, d_2 = 0.04, 0.06, 0.10, 0.20$)

(c) PET 概率密度函数图($d_2 = 0.06, d_1 = 0, 0.05, 0.10, 0.20$)(d) PET 右尾概率密度函数图($d_2 = 0.06, d_1 = 0, 0.05, 0.10, 0.20$)**Figure 1.** Diagram of the PET density function with different parameters**图 1.** 不同参数下的 PET 密度函数图

注. 图 1 给出不同参数下的 PET 概率密度函数图。图 1(a)与图 1(b)表示参数 $d_1 = 0, d_2 = 0.04$ (虚线), 0.06 (粗实线), 0.10 (点线), 0.20 (细实线) 的 PET 概率密度函数图与右尾概率密度图。可以看出, 固定参数 d_1 , PET 函数图像随着 d_2 增大, 尾部将增厚, 且由单峰变为多峰。

图 1(c)与图 1(d)表示参数 $d_2 = 0.06, d_1 = 0$ (虚线), 0.05 (粗实线), 0.10 (点线), 0.20 (细实线) 的 PET 概率密度图和右尾概率密度图。可以看出, 固定参数 d_2 , PET 函数图像会随着 d_1 的增大, 尾部增厚, 峰度递减。不同参数下, 与标准正态分布(点横线)相比, PET 分布的尾部更厚。当 d_1 趋于 0 时, PET 分布将退化为 $q = 2$ 时的 PES 分布。

注 2. 不难验证(2)式右边积分为 1

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi} (1 + d_1^2 H_3^2(x) + d_2^2 H_4^2(x) + d_3^2 H_6^2(x)) \phi(x) dx \\ &= \frac{1}{\xi} (1 + 3!d_1^2 + 4!d_2^2 + 6!d_3^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

命题 1. PET 的分布函数如下, 证明见附录

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\xi} (1 + d_1^2 H_3^2(x) + d_2^2 H_4^2(x) + d_3^2 H_6^2(x)) \phi(x) dx \\ &= \frac{1}{\xi} \left[(1 + 3!d_1^2 + 4!d_2^2 + 6!d_3^2) \Phi(x) - \sum_{i=0}^2 \frac{3!d_1^2}{(3-i)!} H_{3-i}(x) H_{2-i}(x) \phi(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^3 \frac{4!d_2^2}{(4-i)!} H_{4-i}(x) H_{3-i}(x) \phi(x) - \sum_{i=0}^5 \frac{6!d_3^2}{(6-i)!} H_{6-i}(x) H_{5-i}(x) \phi(x) \right]. \end{aligned}$$

命题 2. 假设随机变量 X 服从 PET, k 阶矩为(证明见附录)

当 k 为奇数时,

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = 0;$$

当 k 为偶数时,

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \frac{1}{\xi} \left(\mu_k + d_1^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} 3!c_i i! + d_2^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} 4!c_i i! + d_3^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} 6!c_i i! \right).$$

其中, $x^k = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x)$, c_i 是常数, μ_k 表示标准正态分布的 k 阶矩。

命题 3. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 PET 的简单样本, 其样本观测值为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则参数 d_1, d_2 和 d_3 的对数似然函数为

$$\begin{aligned} l &= \ln L(d_1, d_2, d_3; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -n \ln(1 + 3!d_1^2 + 4!d_2^2 + 6!d_3^2) + \sum_{i=1}^n \ln(1 + d_1^2 H_3^2(x_i) + d_2^2 H_4^2(x_i) + d_3^2 H_6^2(x_i)) \\ &\quad - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2, \end{aligned}$$

对数似然方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial d_1} &= \frac{-12nd_1}{\xi} + \sum_{i=1}^n \frac{2d_1 H_3^2(x_i)}{1 + d_1^2 H_3^2(x_i) + d_2^2 H_4^2(x_i) + d_3^2 H_6^2(x_i)} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial d_2} &= \frac{-48nd_2}{\xi} + \sum_{i=1}^n \frac{2d_2 H_4^2(x_i)}{1 + d_1^2 H_3^2(x_i) + d_2^2 H_4^2(x_i) + d_3^2 H_6^2(x_i)} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial d_3} &= \frac{-1440nd_3}{\xi} + \sum_{i=1}^n \frac{2d_3 H_6^2(x_i)}{1 + d_1^2 H_3^2(x_i) + d_2^2 H_4^2(x_i) + d_3^2 H_6^2(x_i)} = 0. \end{aligned}$$

上式对数似然方程无解析解,借助 R 软件的 DEoptim 函数可以给出 d_1 , d_2 , d_3 的最大似然估计值数值解。

3. APARCH-PET 模型

本文提出 APARCH-PET 模型,具体表达式如下

$$\begin{cases} r_t = \mu_t + a_t, \\ a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=0}^m \alpha_i (|a_{t-1}| + \gamma_i a_{t-1})^\delta + \sum_{j=0}^s \beta_j \sigma_{t-1}^\delta. \end{cases} \quad \varepsilon_t \sim \text{PET}, \quad (3)$$

其中, μ_t , σ_t 分别为 r_t 的条件均值和条件标准差, $\delta > 0$ 。 ε_t 服从均值为 0, 方差为 1 的 PET 分布。

由于 PET 分布包含偏度与峰度两个参数, APARCH 模型能捕捉到收益率序列的非对称性, 上式模型假定 ε_t 服从 PET 分布, 提出的 APARCH-PET 模型兼具 PET 分布和 APARCH 模型的优良特性。一定程度上, 本文提出的新模型具有灵活性和双重性。

由(3)及 VaR 平移不变性和正齐次性得

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(r_t) = \mu_t + \sigma_t \text{VaR}_{1-\alpha}(\varepsilon_t). \quad (4)$$

其中, $\text{VaR}_{1-\alpha}(\varepsilon_t)$ 为 PET 的 $1-\alpha$ 分位数。

4. 模型应用

4.1. 拟合结果

本文选取上证主板招商银行股票日收盘价 P_t 作为样本(数据来源: <http://www.resnet.cn>/锐思金融数据库, 时间区间为 2007.01.04~2022.10.20), 共 3810 个数据。放大 100 倍的日对数收益率 $r_t = 100 \ln(P_t/P_{t-1})$ 。

Table 1. Summary statistics of China Merchants Bank's stock yield series
表 1. 招商银行股票收益率序列概要统计量

样本量	3810
均值	0.0166
标准差	2.2572
偏度	-0.1276
峰度	8.0419
J-B 统计量	4045.9556 (0.0000)
ADF	-27.7047 (0.0000)

注: ADF 为 ADF 检验统计量。

从表 1 可以看出, 偏度值为 -0.1276, 该序列存在左偏特征; 峰度值为 8.0419 大于 3, 该序列比正态分布陡峭。同时, J-B 统计检验在 5% 的显著性水平下, 拒绝服从标准正态分布的原假设, 数据存在尖峰厚尾特征。ADF 的检验结果表明 r_t 是平稳的序列。

图 2 中招商银行日对数收益率的样本 ACF 均在两倍标准差之内, 而平方后的样本 ACF 均超出两倍标准差, 表明 r_t 存在显著的 ARCH 效应, 而 APARCH 模型恰能刻画此效应, 所以用三种模型 APARCH-PET, APARCH-PES, APARCH-norm 来拟合 r_t 。模型参数结果如表 2。

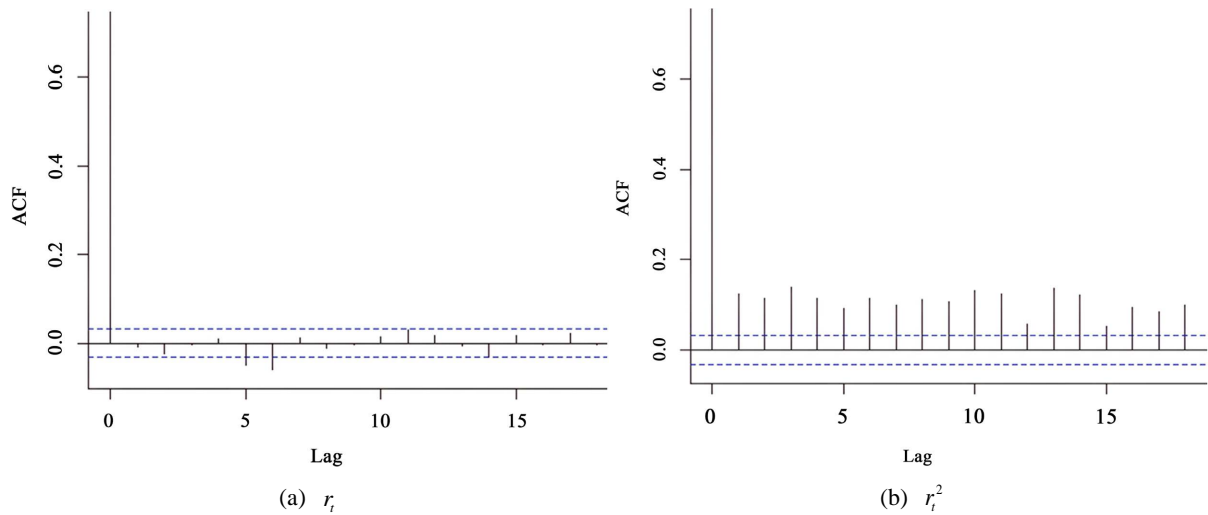


Figure 2. r_t with r_t^2 ACF diagram

图 2. r_t 与 r_t^2 的 ACF 图

Table 2. APARCH model estimation results
表 2. APARCH 模型估计结果

	APARCH-PET	APARCH-PES	APARCH-norm
ω	0.33397	0.333509	0.022795
α_1	0.581970	0.579096	0.061251
γ_1	-0.063681	-0.037883	-0.064765
β_1	0.740757	0.742701	0.944365
δ	1.804941	1.307532	1.330740
d_1	-0.070991	-0.060051	-
d_2	0.434634	0.471370	-
d_3	0.000070	-	-
AIC	6828.843000	7734.382000	8054.845000
BIC	6853.824000	7756.241000	8070.458000

根据表 2 可知, APARCH-PET 模型的 AIC 与 BIC 均小于经典模型, 这表明对于存在非称现象和具有尖峰厚尾特征的序列, 用 APARCH-PET 模型拟合能达到更好的效果。

4.2. 返回测试

本文选取 Kupiec [14] 失败率检验法评价 APARCH-PET 模型估算 $\text{VaR}_{1-\alpha}$ 值的优劣。定义示性函数

$$I = \begin{cases} 1, & r_t > \text{VaR}_{1-\alpha}, \\ 0, & r_t \leq \text{VaR}_{1-\alpha}. \end{cases} \quad (5)$$

令 $N = \#\{1 \leq t \leq T : r_t > \text{VaR}_{1-\alpha}\}$ 表示收益率超过 VaR 值的总天数, T 为序列总观测天数, $\alpha_0 = N/T$ 表示失败频率, 考虑原假设 $H_0 : \alpha = \alpha_0$ 。则

$$LR = 2 \ln \left[\left(1 - \frac{N}{T} \right)^{T-N} \left(\frac{N}{T} \right)^N \right] - 2 \ln \left[(1 - \alpha_0)^{T-N} \alpha_0^N \right].$$

在原假设条件下，似然比统计量渐近服从 $\chi^2(1)$ 分布，若 $\mathbb{P}(\chi^2(1) \geq LR) < 0.05$ ，则认为模型无效，反之有效。计算 2021.07.25~2022.10.20 共 300 天数据的 $VaR_{1-\alpha}$ ，并对其结果进行失败率返回测试。

Table 3. $VaR_{1-\alpha}$ Returns test results

表 3. $VaR_{1-\alpha}$ 返回测试结果

$1-\alpha$	残差分布	VaR	N	LR	P 值
95%	PET	1.870	19	1.032	0.308
	正态分布	1.645	21	2.259	0.133
99%	PET	2.657	6	2.348	0.125
	正态分布	2.326	11	12.802	0.000

表 3 给出残差序列分别采用 PET 和正态分布估算出的 $VaR_{1-\alpha}$ 返回测试结果。当 $1-\alpha = 95\%$ 时，两种方法得到的 p 值均大于 0.05 通过检验，但当 $1-\alpha = 99\%$ 时，正态分布拟合的残差序列估算出的值未通过检验。表 3 可知采用正态分布拟合残差序列的模型往往低估了金融风险，而采用 PET 分布拟合残差序列的模型在度量金融风险上更准确。

5. 结论

本文提出的 PET 分布包含了数据的峰度与偏度，在拟合尾部较厚的数据上比正态分布更合适，能更有效的拟合资产收益率数据“尖峰厚尾”特征。在 APARCH 模型的基础上，结合 PET 分布构建 APARCH-PET 模型，并选取上证主板招商银行股票数据进行实证分析。结果显示，用 PET 分布拟合残差序列的模型对 VaR 度量效果明显优于经典模型，新模型提高了估计 VaR 的精准度。对于存在非对称效应和尖峰厚尾特征的资产收益率数据，在度量金融风险时可以考虑利用 APARCH-PET 模型估算 VaR 值的方法，投资者可以进行更好的资金控制和风险管理。

基金项目

重庆市自然科学基金项目(cstc2020jcyj-msxmX0232)，重庆市高等教育教学改革研究项目(203332)，重庆市研究生科研创新项目(CYS21475)。

参考文献

- [1] Bollerslev, T. (1987) A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, **69**, 542-547. <https://doi.org/10.2307/1925546>
- [2] Silverman, B.W. (1982) Kernel Density Estimation Using the Fast Courier Transform Models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, **31**, 93-99. <https://doi.org/10.2307/2347084>
- [3] Sargan, J.D. (1976) Econometric Estimators and the Edgeworth Approximation. *Econometrica*, **44**, 421-448. <https://doi.org/10.2307/1913972>
- [4] Mauleón, I. and Perote, J. (2000) Testing Densities with Financial Data: An Empirical Comparison of the Edgeworth-Sargan Density to the Student's t. *The European Journal of Finance*, **6**, 225-239. <https://doi.org/10.1080/13518470050020851>
- [5] Edgeworth, F.Y. (1907) On the Representation of Statistical Frequency by a Series. *Journal of the Royal Statistical Society*, **70**, 102-106. <https://doi.org/10.2307/2339504>
- [6] Níguez, T.M., Perote, J. and Carlos, J. (2012) Forecasting Heavy-Tailed Densities with Positive Edgeworth and Gram-

-
- Charlier Expansions. *Oxford Bulletin of Economics & Statistics*, **74**, 600-627.
<https://doi.org/10.1111/j.1468-0084.2011.00663.x>
- [7] León, Á. And Níguez, T.M. (2021) The Transformed Gram Charlier Distribution: Parametric Properties and Financial Risk Applications. *Journal of Empirical Finance*, **63**, 323-349. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2021.07.004>
- [8] Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
[https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- [9] Nelson, D.B. (1991) Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, **59**, 347-370.
<https://doi.org/10.2307/2938260>
- [10] Ding, Z.X., Granger, C.W.J. and Engle, R.F. (1993) A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106. [https://doi.org/10.1016/0927-5398\(93\)90006-D](https://doi.org/10.1016/0927-5398(93)90006-D)
- [11] 魏正元, 李娟, 罗云峰. 基于 EGARCH-GPD 模型的沪深 300 指数的 VaR 度量[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版), 2016, 30(5): 119-124.
- [12] 鲁皓, 周志凯. 基于 GARCH-GED 分布模型的证券投资基金风险度量[J]. 金融理论与实践, 2014(3): 8-11.
- [13] 宫晓莉, 庄新田, 刘喜华. 基于尖峰厚尾、有偏 GARCH-Copula 模型的风险测度[J]. 系统工程, 2018, 36(1): 31-38.
- [14] Kupiec, P.H. (1995) Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, **2**, 73-84. <https://doi.org/10.3905/jod.1995.407942>

附录

证明命题 1

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
 &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\xi} (1 + d_1^2 H_3^2(x) + d_2^2 H_4^2(x) + d_3^2 H_6^2(x)) \phi(x) dx \\
 &= \frac{1}{\xi} \left[\int_{-\infty}^x \phi(x) dx + \int_{-\infty}^x d_1^2 H_3^2(x) \phi(x) dx + \int_{-\infty}^x d_2^2 H_4^2(x) \phi(x) dx + \int_{-\infty}^x d_3^2 H_6^2(x) \phi(x) dx \right]
 \end{aligned}$$

根据 Hermit 多项式的性质可以计算出

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
 &= \frac{1}{\xi} \left[(1 + 3!d_1^2 + 4!d_2^2 + 6!d_3^2) \Phi(x) - \sum_{i=0}^2 \frac{3!d_1^2}{(3-i)!} H_{3-i}(x) H_{2-i}(x) \phi(x) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=0}^3 \frac{4!d_2^2}{(4-i)!} H_{4-i}(x) H_{3-i}(x) \phi(x) - \sum_{i=0}^5 \frac{6!d_3^2}{(6-i)!} H_{6-i}(x) H_{5-i}(x) \phi(x) \right]
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \xi &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + d_1^2 H_3^2(x) + d_2^2 H_4^2(x) + d_3^2 H_6^2(x)) \phi(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} d_1^2 (9x^2 - 6x^4 + x^6) \phi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} d_2^2 (x^8 - 12x^6 + 42x^4 - 36x^2 + 9) \phi(x) dx \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} d_3^2 (x^{12} - 30x^{10} + 315x^8 - 705x^6 + 2250x^4 - 1350705x^2 + 225) \phi(x) dx \\
 &= 1 + 3!d_1^2 + 4!d_2^2 + 6!d_3^2
 \end{aligned}$$

证明命题 2

当 k 为偶数时,

$$\begin{aligned}
 m_k &= \mathbb{E}(X^k) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k}{\xi} (1 + d_1^2 H_3^2(x) + d_2^2 H_4^2(x) + d_3^2 H_6^2(x)) \phi(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x)}{\xi} (1 + d_1^2 H_3^2(x) + d_2^2 H_4^2(x) + d_3^2 H_6^2(x)) \phi(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{\xi} \left[\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x) + d_1^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x) H_3^2(x) + d_2^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x) H_4^2(x) + d_3^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x) H_6^2(x) \right] dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{\xi} \left[x^k + d_1^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x) H_3^2(x) + d_2^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x) H_4^2(x) + d_3^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i H_i^2(x) H_6^2(x) \right] dx \\
 &= \frac{1}{\xi} \left(\mu_k + d_1^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i 3!i! + d_2^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i 4!i! + d_3^2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} c_i 6!i! \right)
 \end{aligned}$$