Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 457-464
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145200

Γ-函数及相关函数的单调性与凹凸性

周培桂[1*]，王 飞[2]，王晓宇[2]

[1]浙江理工大学科技与艺术学院信息与控制学院，浙江 绍兴
[2]浙江机电职业技术学院数学教研室，浙江 杭州

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月28日；发布日期：2024年5月31日

摘 要

文中运用求导、对数求导等分析方法，获得了Γ-函数及相关函数的若干单调性和凹凸性，从而推广或改进了一些已有的相关结果。

关键词

Γ-函数，ψ-函数，单调性，凹凸性

Some Monotonicity and Convexity Properties of Gamma Function and Its Related Functions

Peigui Zhou[1*], Fei Wang[2], Xiaoyu Wang[2]

[1]School of Information and Control, Keyi College of Zhejiang Sci-Tech University, Shaoxing Zhejiang
[2]Teaching Section of Mathematics, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou Zhejiang

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 28th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

In this paper, some monotonicity and convexity properties of Gamma function and its related functions are obtained by analytical methods such as differentiation and logarithmic differentiation, and from which some known related results are generalized or improved.

*通讯作者。

文章引用: 周培桂, 王飞, 王晓宇. Γ-函数及相关函数的单调性与凹凸性[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 457-464.
DOI: 10.12677/pm.2024.145200

Keywords

Gamma Function, Psi Function, Monotonicity, Convexity

1. 引言

对于正实数 x 和 y，Γ-函数、B-函数、ψ-函数以及 Ramanujan R-函数 $R(x,y)$ 分别定义[1]为

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t, B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \tag{1}$$

$$R(x,y)=-2\gamma-\psi(x)-\psi(y), \tag{2}$$

其中，$\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(1/k)-\log n\right]=0.57721566\cdots$ 为 Euler-Mascheroni 常数。

当 $y=1-x$ 时，$R(x)\equiv R(x,1-x)$ 称为 Ramanujan 常数。

给定复数 a,b 和 $c(c\neq 0,-1,-2,\cdots)$，Gauss 超几何函数定义[1]为

$$F(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{z^n}{n!},\ |z|<1, \tag{3}$$

其中，当 $a\neq 0$ 时，$(a,0)=1$，当 $n\in N$ 时，

$$(a,n)=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

众所周知，Γ-函数在概率论、统计学、物理学和工程技术等领域中有广泛且重要的应用，Γ-函数与 B-函数、ψ-函数、Gauss 超几何函数等特殊函数有密切的联系[1] [2] [3] [4] [5]。2000 年后，国内外诸多学者广泛研究了上述函数的性质、应用以及不等式，可参见文献[6]-[14]。而 Ramanujan 常数(R-函数)在 Gauss 超几何函数和 Ramanujan 模方程的研究中占有重要的地位[1] [14]。故研究 Γ-函数、B-函数、ψ-函数及 Ramanujan R-函数的性质在理论上和应用上具有重要意义。

在文献[4]中，G.D. Anderson 等证明了关于 Γ-函数的如下四个重要的引理。

引理 1 ([4], Lemma2.9)对 $a,b,c,d\in(0,+\infty),a\le b,c<d,0<\delta<a$，且 $n\in N$，数列

$$P(n)=\frac{\Gamma(n+a-\delta)\Gamma(n+b+\delta)\left[(a-\delta)(b+\delta)+(c/d)(n+a+b)\right]}{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)(n+ab+a+b)}$$

关于 n 严格单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)=c/d$ 。

引理 2 ([4], Lemma2.10)对 $a,b,u,v\in(0,\infty),a+b=u+v,n\in N$，令

$$Q(n)=\frac{\Gamma(n+u)\Gamma(n+v)}{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}$$

则：(i) 当 $uv=ab$ 时，对所有 $n\in N$，则 $Q(n)=1$；

(ii) 当 $uv<ab(uv>ab)$ 时，则 $Q(n)$ 关于 n 严格单调递减(增)，且 $\lim\limits_{n\to\infty}Q(n)=1$ 。

引理 3 ([4], Lemma2.11)对 $a,b\in(0,\infty)$ 且 $a\le b$，则函数

$$f_1(x)=\Gamma(a-x)\Gamma(b+x),\ f_2(x)=B(a-x,b+x),\ f_3(x)=R(a-x,b+x)$$

在 $(0,a)$ 上均是严格单调递增且向下凸的。

引理 4 ([4], Lemma2.13(1))对 $n\in N,c\in(0,\infty)$，函数

$$f_n(a)=\psi(a+n)-\psi(c-a+n)-\psi(a)+\psi(c-a)$$

关于 a 在 $(0,c)$ 上严格递减，且 $f_n(c/2)=0$。

本文的主要目的是利用求导、对数求导等分析方法获得 Γ-函数、B-函数、ψ-函数及 Ramanujan R-函数的一些单调性和凹凸性，从而推广或改进引理 1~引理 4。作者获得了如下主要结果：

定理 1 对 $a,b,u,v\in(0,\infty),a+b=u+v$，且 $x\in R^+$，令

$$S(x)=\frac{\Gamma(x+u)\Gamma(x+v)}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)}$$

则：(i) 当 $uv=ab$ 时，$S(x)=1$；

(ii) 当 $uv<ab(uv>ab)$ 时，$S(x)$ 关于 x 严格递减且是向下凸(递增)的，且 $\lim_{x\to\infty}S(x)=1$。

定理 2 对 $a,b,c,d\in(0,\infty),a\le b,c<d,0<\delta<a$，且 $(a-\delta)(b+\delta)d\ge abc$，函数

$$T(x)=\frac{\Gamma(x+a-\delta)\Gamma(x+b+\delta)\left[(a-\delta)(b+\delta)+(c/d)(x+a+b)\right]}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)(x+ab+a+b)}$$

在 $(0,\infty)$ 上严格单调递减，且 $\lim_{x\to\infty}T(x)=c/d$。

定理 3 对 $a,b\in(0,\infty)$，函数

$$f_1(x)=\Gamma(a-x)\Gamma(b+x),\ f_2(x)=B(a-x,b+x),\ f_3(x)=R(a-x,b+x)$$

在 $((a-b)/2,a)$ 上严格递增且向下凸的，在 $(-b,(a-b)/2)$ 上严格递减且向下凸的。

定理 4 对 $c,p\in(0,\infty)$，函数

$$f(x)=\psi(x+p)-\psi(c-x+p)-\psi(x)+\psi(c-x)$$

从 $(0,c)$ 到 $(-\infty,\infty)$ 上严格递减，且 $f(c/2)=0$。而且，函数 f 在 $(0,c/2]$ 上向下凸，在 $[c/2,c)$ 上向上凸。

2. 引理

本节主要给出第三部分主要结果的证明中所需要的一个引理。首先，给出有关 Γ-函数和 ψ-函数的两个公式。

引理 2.1 [1] 著名的 Stirling 渐近公式

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x x^{1/2-x}\Gamma(x)=\sqrt{2\pi},x\in R. \tag{4}$$

引理 2.2 [1] 对所有的 $z\ne 0,-1,-2,\cdots$，ψ-函数具有下述性质：

$$\psi^{(n)}(z)=\begin{cases}-\gamma-\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k(z+k)},n=0,\\(-1)^{n+1}n!\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^{n+1}},n\ge 1.\end{cases} \tag{5}$$

即对 $n\in N\cup\{0\}$，

$$\psi^{(n)}\begin{cases}\text{单调递增，}n\text{是偶数}\\\text{单调递减，}n\text{是奇数。}\end{cases} \tag{6}$$

引理 2.3 对 $a,b\in(0,\infty),a\le b,x\in R^{+}$，且 $0<\delta<a$，函数

$$F(\delta)=\psi(x+a-\delta)+\psi(x+b+\delta)$$

在 $(0,a)$ 上严格单调递减。

证明 令 $u=a-\delta,v=b+\delta,p=a+b$，结合引理 2.2 的式(5)，对函数 $F(\delta)$ 求导得

$$\begin{aligned}F'(\delta)&=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+u+k)^{2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+v+k)^{2}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u-v)(2x+p+2k)}{(x+u+k)^{2}(x+v+k)^{2}}\\&=(u-v)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2x+p+2k}{(x+u+k)^{2}(x+v+k)^{2}},\end{aligned}$$

由于 $u<v$，因此 $F'(\delta)<0$。从而得 $F(\delta)$ 在 $(0,a)$ 上严格单调递减。

3. 主要结果的证明

本节将给出第一部分定理 1~定理 4 的证明。

定理 1 的证明 为了方便起见，不失一般性，假设 $a\le b$ 且 $u\le v$。

(i) 由 $uv=ab$ 且 $a+b=u+v$，可得 $u=a,v=b$。显然，对 $x\in R^{+}$，则 $S(x)=1$；

(ii) 利用 $uv<ab\,(uv>ab)$ 且 $a+b=u+v$，可得：$(u-a)(b-u)<0\,\big((u-a)(b-u)>0\big)$。

结合引理 2.2 的式(5)，对 $S(x)$ 进行对数求导得

$$\begin{aligned}\frac{S'(x)}{S(x)}&=\psi(x+u)+\psi(x+v)-\psi(x+a)-\psi(x+b)\\&=-\frac{1}{x+u}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x+u}{k(x+u+k)}-\frac{1}{x+v}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x+v}{k(x+v+k)}\\&\quad+\frac{1}{x+a}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x+a}{k(x+a+k)}+\frac{1}{x+b}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x+b}{k(x+b+k)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{u-a}{(x+a+k)(x+u+k)}+\frac{v-b}{(x+b+k)(x+v+k)}\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{u-a}{(x+a+k)(x+u+k)}-\frac{u-a}{(x+b+k)(x+v+k)}\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u-a)\left[(b+v-a-u)(x+k)+bv-au\right]}{(x+a+k)(x+u+k)(x+b+k)(x+v+k)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u-a)\left[2(b-u)(x+k)+b(a+b-u)-au\right]}{(x+a+k)(x+u+k)(x+b+k)(x+v+k)}\\&=(u-a)(b-u)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(x+k)+a+b}{(x+a+k)(x+u+k)(x+b+k)(x+v+k)},\end{aligned}$$

从而可得 S 在 $(0,\infty)$ 上的单调性(见表 1)。

Table 1. The monotonicity of $S(x)$

表 1. $S(x)$ 的单调性

名称	$uv < ab$	$uv > ab$
$(u-a)(b-u)$	<0	>0
$S'(x)$	<0	>0
$S(x)$	严格递减	严格递增

记 $S_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(x+k)+a+b}{(x+a+k)(x+u+k)(x+b+k)(x+v+k)}$, 则

$$S'(x)=(u-a)(b-u)S(x)S_1(x).$$

显然，$S_1>0$ 且在 $(0,\infty)$ 上严格单调递减。若 $uv<ab$，则 $(u-a)(b-u)<0$，又 $S>0$ 且严格递减，故 S' 在上 $(0,\infty)$ 严格递增，即 S 在 $(0,\infty)$ 上向下凸(见表 2)。

Table 2. The convexity of $S(x)$

表 2. $S(x)$ 的凹凸性

名称	$uv < ab$
$(u-a)(b-u)$	<0
$S_1(x)$	>0，严格递减
$S(x)$	>0，严格递减
$S'(x)$	严格递增
$S(x)$	向下凸

由引理 2.1 的式(4)可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}S(x)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+u)\Gamma(x+v)}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)}\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+u)(x+v)}{(x+a)(x+b)}\right]^x\frac{(x+u)^{a+b-v}(x+v)^v}{(x+a)^a(x+b)^b}\\&=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{uv-ab}{x^2+(a+b)x+ab}\right]^x\left(\frac{x+u}{x+a}\right)^a\left(\frac{x+u}{x+b}\right)^b\left(\frac{x+v}{x+u}\right)^v\\&=1.\end{aligned}$$

定理 2 的证明 令 $u=a-\delta, v=b+\delta, p=a+b$，对 $T(x)$ 进行对数求导得

$$\begin{aligned}\frac{T'(x)}{T(x)} &= \psi(x+u)+\psi(x+v)-\psi(x+a)-\psi(x+b)+\frac{c/d}{uv+(c/d)(x+p)}-\frac{1}{x+ab+p}\\ &=\psi(x+u)+\psi(x+v)-\psi(x+a)-\psi(x+b)+\frac{1}{(duv/c)+x+p}-\frac{1}{x+ab+p}\\ &=\left[\psi(x+u)+\psi(x+v)\right]-\left[\psi(x+a)+\psi(x+b)\right]+\left(\frac{1}{x+(duv/c)+p}-\frac{1}{x+ab+p}\right)\\ &=F(\delta)-F\left(0^+\right)+\left(\frac{1}{x+(duv/c)+p}-\frac{1}{x+ab+p}\right),\end{aligned}$$

其中，F 由引理 2.3 中定义。根据引理 2.3，$F(\delta)-F\left(0^+\right)<0$，又 $uvd \ge abc$，可得 $T'(x)<0$，故函数 T 在 $(0,\infty)$ 上是严格单调递减的。

因为 $uv<ab$，根据定理 1，可得

$$\lim_{x\to\infty}T(x)=\frac{c}{d}\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+a-\delta)\Gamma(x+b+\delta)}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)}=\frac{c}{d}.$$

定理 3 的证明 对 $f_1(x)$ 进行对数求导得

$$f_1'(x)=f_1(x)\left[\psi(b+x)-\psi(a-x)\right],$$

当 $x\in\left(\frac{a-b}{2},a\right)$ 时，由(6)式知，$f_1'(x)>0$，且 $f_1'(x)$ 为两个正的且严格递增函数的乘积。

当 $x\in\left(-b,\frac{a-b}{2}\right)$ 时，由(6)式知，$f_1'(x)<0$，且 $-f_1'(x)=f_1(x)\left[\psi(a-x)-\psi(b+x)\right]$ 为两个正的且严格递减函数的乘积。因此，可得 f_1 的单调性和凹凸性(见表 3)。

Table 3. The monotonicity and convexity of $f_1(x)$

表 3. $f_1(x)$ 的单调性和凹凸性

x	$\left(-b,\frac{a-b}{2}\right)$	$\left(\frac{a-b}{2},a\right)$
$f_1'(x)$	<0，严格递增	>0，严格递增
$f_1(x)$	严格递减，向下凸	严格递增，向下凸

由于 $f_2(x)=f_1(x)/\Gamma(a+b)$，故关于 f_2 的结论成立。

结合式(2)，则 $f_3(x)=R(a-x,b+x)=-2\gamma-\psi(a-x)-\psi(b+x)$，

进一步求导得 $f_3'(x)=\psi'(a-x)-\psi'(b+x)$，由(6)式知，当 $x\in\left(\frac{a-b}{2},a\right)$ 时，$f_3'(x)$ 为正的且严格递增。当 $x\in\left(-b,\frac{a-b}{2}\right)$ 时，$f_3'(x)$ 为负的且严格递增。从而，可得 f_3 的结论(见表 4)。

Table 4. The monotonicity and convexity of $f_3(x)$

表 4. $f_3(x)$ 的单调性和凹凸性

x	$\left(-b,\frac{a-b}{2}\right)$	$\left(\frac{a-b}{2},a\right)$
$f_3'(x)$	<0，严格递增	>0，严格递增
$f_3(x)$	严格递减，向下凸	严格递增，向下凸

定理 4 的证明 根据([6]，引理 2.14(1))，可知函数 f 单调性的证明。下面只证明 f 的凹凸性。对 f 进行求导，得

$$f'(x)=\psi'(x+p)+\psi'(c-x+p)-\psi'(x)-\psi'(c-x),$$
$$f''(x)=\psi''(x+p)-\psi''(c-x+p)-\psi''(x)+\psi''(c-x),\ f''(c/2)=0,$$
$$f'''(x)=\left[\psi'''(x+p)-\psi'''(x)\right]+\left[\psi'''(c-x+p)-\psi'''(c-x)\right],$$

由(6)式可知，ψ''' 单调递减，故 $f'''(x)<0$。从而，f'' 单调递减，进而可获得 f 的凹凸性(见表 5)。

Table 5. The convexity of $f(x)$

表 5. $f(x)$ 的凹凸性

x	$(0,c/2]$	$[c/2,c)$
$\psi'''(x)$	单调递减	单调递减
$f'''(x)$	<0	<0
$f''(x)$	≥ 0	≤ 0
$f(x)$	向下凸	向上凸

4. 结论

本文主要获得了 Γ-函数、B-函数、ψ-函数及 Ramanujan R-函数的一些单调性和凹凸性，从而推广或改进了引理 1~引理 4。这一研究具有一定的理论和应用意义，对于深入理解特殊函数的性质、改进不等式及解决相关问题有一定的推动作用。然而，仍有几个问题尚待解决。例如，

(1) 定理 1 (ii)中，当 $uv>ab$ 时，S 在 $(0,\infty)$ 上的凹凸性如何？

(2) 定理 2 中，当 $(a-\delta)(b+\delta)d<abc$ 时，T 在 $(0,\infty)$ 上单调性如何？

通过定理 1~定理 4 的证明，不难发现上述函数的性质都与 ψ-函数的 n 阶导数有关，揭示 ψ-函数的有意义的性质是值得进一步研究的内容。

致　谢

在此特别感谢评审专家给予的宝贵意见，同时感谢编辑提供的优质服务。

基金项目

浙江理工大学科技与艺术学院科研基金项目(KY2022003)，浙江省高等学校访问学者项(FX2023103)，浙江机电职业技术学院科教融合重点项目(A027123212)和浙江机电职业技术学院科技创新团队项目(A207421008)。

参考文献

[1] Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (1997) Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Mappings. John Wiley & Sons, New York, 32-47.

[2] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (Eds.) (1965) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover, New York, 253-294.

[3] Qiu, S.-L. and Vuorinen, M. (2005) Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Elsevier B.V., 621-659. https://doi.org/10.1016/S1874-5709(05)80018-6

[4] Anderson, G.D., Qiu, S.-L. and Vuorinen, M. (1997) Precise Estimates for Differences of the Gaussian Hypergeometric Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **215**, 212-234. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5641

[5] Anderson, G.D. and Qiu, S.-L. (1997) A Monotoneity Property of the Gamma Function. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**, 3355-3362. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04152-X

[6] Qiu, S.L. and Vuorinen, M. (2000) Duplication Inequalities for the Ratios of Hypergeometric Functions. *Forum Mathematicum*, **12**, 109-133. https://doi.org/10.1515/form.1999.025

[7] Anderson, G.D., Qiu, S.-L., Vamanumurthy, M.K. and Vuorinen, M. (2000) Generalized Elliptic Integrals and Modular Equations. *Pacific Journal of Mathematics*, **192**, 1-37. https://doi.org/10.2140/pjm.2000.192.1

[8] Qiu, S.-L. and Vuorinen, M. (2004) Some Properties of the Gamma and Psi Functions, with Applications. *Mathematics of Computation*, **74**, 723-742. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-04-01675-8

[9] Zhou, P.G., Qiu, S.L., Tu, G.Y. and Li, Y.L. (2010) Some Properties of the Ramanujan Constant. *Journal of the Zhejiang Sci-Tech University*, **27**, 835-841.

[10] Zhao, X., Qiu, S.L. and Chen, S.Y. (2014) Some Properties of Gamma, Beta and Psi Functions. *Journal of Zhejiang Sci-Tech University* (*Natural Sciences*), **31**, 571-575.

[11] 王飞, 周培桂, 马晓艳. Γ-函数的几个性质及其应用[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版), 2014, 31(5): 576-579.

[12] Song, Y.Q., Zhou, P.G. and Chu, Y.M. (2014) Inequalities for the Gaussian Hypergeometric Function. *Science China* (*Mathematics*), **57**, 2369-2380. https://doi.org/10.1007/s11425-014-4858-3

[13] Ma, H.X., Qiu, S.L. and Bao, Q. (2019) Some Properties of Zero-Balanced Hypergeometric Functions. *Journal of Zhejiang Sci-Tech University*, **41**, 823-828.

[14] Qiu, S.L., Ma, X.Y. and Huang, T.R. (2020) Sharp Approximations for the Ramanujan Constant. *Constructive Approximation*, **51**, 303-330. https://doi.org/10.1007/s00365-019-09464-3