Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 269-280
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145184

圆环中2-点涡的可积运动

焦星月，郭 童，倪尔东

中国石油大学(北京)理学院，北京

收稿日期：2024年3月26日；录用日期：2024年4月29日；发布日期：2024年5月30日

摘 要

本文运用镜像法得到了圆环区域上 $Dirichlet$ 边值拉普拉斯算子的格林函数和两点涡系统的哈密顿函数，并用作用-角变量方法对系统进行约化。以两点涡强度相等为例，对圆环分别在内外半径比 $q = 0.02, q = 0.08, q = 0.2$ 时得到了以涡度矩 I 为参数的系统相对均衡解的完整分类，最后针对各种情况刻画出两个点涡的相对运动轨迹。

关键词

点涡，哈密顿系统，可积性，作用-角变量，相对均衡解

Integrable Motion of Two-Vortex in Annulus

Xingyue Jiao, Tong Guo, Erdong Ni

College of Science, China University of Petroleum (Beijing), Beijing

Received: Mar. 26th, 2024; accepted: Apr. 29th, 2024; published: May 30th, 2024

Abstract

In this paper, the Green's function of the Dirichlet marginal Laplace operator and the

文章引用: 焦星月, 郭童, 倪尔东. 圆环中2-点涡的可积运动[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 269-280.
DOI: 10.12677/pm.2024.145184

Hamiltonian function of the two-point vortex system in annular domain are obtained by the method of image, we make reduction to the system by action-angle variables method, and take the example of the equal strength case to describe their relative motion trajectories and classify the system's quasi-equilibrium solutions were obtained by considering the circular ring at different inner-to-outer radius ratios: $q=0.02$, $q=0.08$ and $q=0.2$, with the vorticity moment I as a parameter.

Keywords

Point Vortex, Hamiltonian System, Integrability, Action-Angle, Quasi-Equilibrium Solutions

1. 引言

平面有界区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 内理想流体的速度场满足二维欧拉方程

$$\begin{cases} \partial_t v+(v\cdot\nabla)\,v=-\nabla p, \\ \nabla v=0. \end{cases} \tag{1}$$

其中，$v\,(z,t)$，$p\,(z,t)$ 分别表示在时间 $t\in R$ 时刻点 $z\in\Omega$ 处流体的速度和所受的压力. 一般来说该方程的处理十分复杂，因此常常研究基于这些方程的简化模型，其中一个重要且典型的是 $N-$点涡模型. 现假设该速度场的涡量都集中在有限个点涡 $\{z_k=x_k+iy_k\in\Omega, k=1,\cdots,N\}$处，则点涡 z_k 的运动将遵循 N 点涡系统哈密顿方程[1][2]

$$\Gamma_k\dot{z_k}=-i\nabla_{z_k}H_\Omega(z_1,\cdots,z_N)\quad k=1,\cdots,N, \tag{2}$$

$\Gamma_k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$为 z_k 的强度，哈密顿函数

$$H_\Omega(z_1,\cdots,z_N)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1 j\neq k}^{N}\Gamma_j\Gamma_kG(z_j,z_k)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k^2g(z_k,z_k) \tag{3}$$

定义在 $\mathcal{F}_N\Omega = \left\{z = (z_1, \cdots, z_N) \in \Omega^N : \ z_j \neq z_k, \forall j \neq k\right\}$ 上，其中 G 是 Dirichlet 边值拉普拉斯算子的格林函数. 格林函数 G 的表达式一般情况下是未知的. 大量文献致力于研究多边形涡旋构型在自由平面以及环内外的稳定性，参考文献[3–5]. 关于环面中两个点涡的动力学问题，Pashaev 和 Yilmaz[6]， Lakaniemi[7] 等学者都有讨论. Bolsinov[8]等人， Vaskin 和 Erdakova[9]都使用了拓扑方法来寻找相对均衡解并分析其稳定性. 除此之外，运用拓扑方法能够研究出圆形区域中三点涡系统和圆环区域中两点涡系统新的静止构型. 本文中我们运用作用-角变量方法来研究环形区域中 2- 点涡系统，并探讨了该系统构型在环形区域内外半径比不同时的稳定性情况.

当 Ω 为圆盘、圆环等特殊对称区域时，可利用镜像法[10]得到格林函数具体形式. 现以圆盘为例阐述其原理. 如图 1，考虑位于 z_k 涡量为 Γ_k 的点涡，设 $\Omega = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ 是半径为 R 的圆盘，现在另外放置一个涡量为 $-\Gamma_k$ 的点涡在 z_k^{im} 处，这里 $z_k^{im} = \frac{R^2}{|z_k|^2} z_k$.

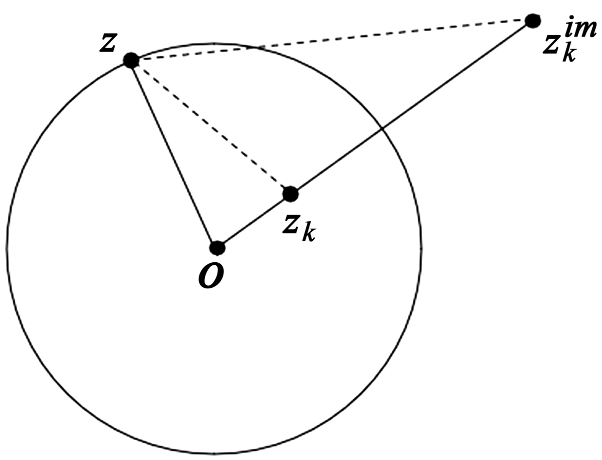


Figure 1. Example of mirror image method on a disk

图 1. 圆盘上镜像法示例

则对任意 $z \in \partial D$，

$$\frac{|z - z_k|}{|z - z_k^{im}|} = \frac{|z_k|}{z} = \frac{|z_k|}{R}$$

是一个常数，因此 z_k 和 z_k^{im} 在圆上产生径向速度分量被抵消，只需将 z_k 对应的格林函数定义为

$$G_D(z, z_k) = -\frac{1}{2\pi} \log|z - z_k| + \frac{1}{2\pi} \log \frac{|z - z_k^{im}|\,|z_k|}{R}$$

即可满足

$$\begin{cases} \Delta_z G(z, z_k) + \delta(|z - z_k|) = 0, & z \in \Omega, \\ G(z, z_k) = 0, & z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

类似地，现考虑圆环内理想流体中两点涡流的运动，设内径和外径分别为r和R，即$\Omega = A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$，设$\Omega$ 的两点涡为z_1，z_2，涡量分别为Γ_1，Γ_2.

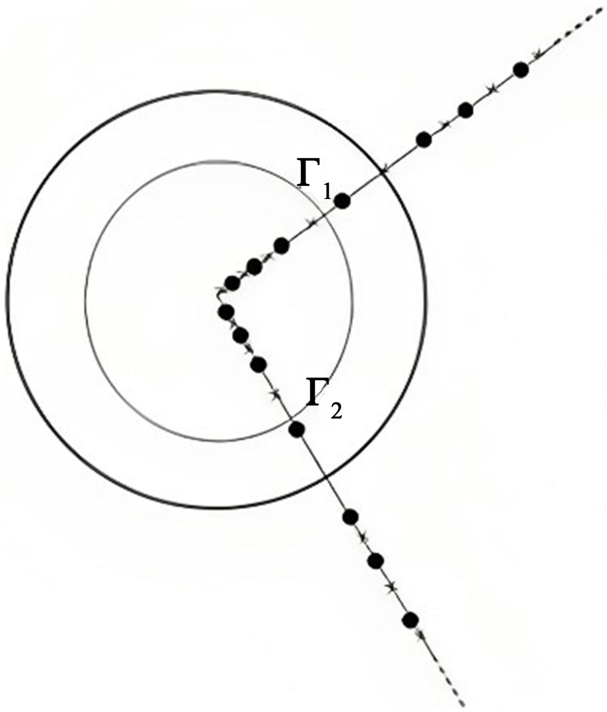


Figure 2. Mirror image method within an annulus

图 2. 圆环内镜像法

如图 2，这两列点涡分别是由点涡z_1，z_2及其镜像点关于圆环的内外边界连续反射而生成的，每个镜像点与它的原像点涡量相反. 因此每个点涡z_j都将生成一列涡量符号交替的辅助镜像点，其位置可通过边界的反射来确定. 参考圆盘内镜像法原理，记z_j关于外圆周的镜像点为$z_j^{im(1)} = \frac{R^2}{|z_j|^2} z_j$，$z_j^{im(1)}$关于内圆周的镜像点为$z_j^{im(2)} = \frac{r^2}{\left|z_j^{im(1)}\right|^2} \cdot z_j^{im(1)} = \frac{r^2}{R^2} z_j$,，若记内外半径比$q = \frac{r}{R}$，依次类推则该序列为

$$(z_j, \Gamma_j) \xrightarrow{外} \left(\frac{R^2}{|z_j|^2} z_j, -\Gamma_j\right) \xrightarrow{内} (q^2 z_j, \Gamma_j) \xrightarrow{外} \left(\frac{R^2}{|z_j|^2} q^{-2} z_j, -\Gamma_j\right)$$

$$\xrightarrow{内} (q^4 z_j, \Gamma_j) \xrightarrow{外} \left(\frac{R^2}{|z_j|^2} q^{-4} z_j, -\Gamma_j\right) \xrightarrow{内} (q^6 z_j, \Gamma_j) \longrightarrow \cdots$$

即有涡量强度为Γ_j的点涡及其镜像点$q^{2k} z_j \;\; k = 012\cdots$，和涡量强度为$-\Gamma_j$的点涡及

其镜像点 $\frac{R^2}{|z_j|^2}q^{-2k}z_j\ \ k=012\cdots$. 则当 $\Omega=A=\{z\in\mathbb{C}:r<|z|<R\}$ 时，

$$G_{\mathrm{A}}\left(z,z_j\right)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left(\ln\left|z-q^{2k}z_j\left(t\right)\right|+\left|z-\frac{R^2}{\left|z_j\right|^2}q^{-2k}z_j\left(t\right)\right|\right). \tag{4}$$

此时圆环内 2-点涡运动方程的哈密顿形式可表示为

$$\Gamma_j\dot{x}_j=\frac{\partial H}{\partial y_j}\left(z_1,z_2\right)\qquad \Gamma_j\dot{y}_j=-\frac{\partial H}{\partial x_j}\left(z_1,z_2\right)\ ,\qquad j=1,2\ .$$

由于圆环有内外两支边界，哈密顿函数将以无穷级数的形式呈现，进而

$$\begin{aligned}H\left(z_1,z_2\right)=H_0\left(z_1,z_2\right)&+\frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{R^2}{\left|z_1\right|^2}q^{2k}\right)\left(1-\frac{\left|z_1\right|^2}{R^2}q^{2k}\right)\\&+\frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{R^2}{\left|z_2\right|^2}q^{2k}\right)\left(1-\frac{\left|z_2\right|^2}{R^2}q^{2k}\right)\\&-\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{R^4\left(\left|z_2\right|^2-2\left(z_1,z_2\right)q^{2k}+\left|z_1\right|^2q^{4k}\right)\left(\left|z_1\right|^2-2\left(z_1,z_2\right)q^{2k}+\left|z_2\right|^2q^{4k}\right)}{\left(R^4-2R^2\left(z_1,z_2\right)q^{2k}+\left|z_1\right|^2\left|z_2\right|^2q^{4k}\right)\left(R^4q^{4k}-2R^2\left(z_1,z_2\right)q^{2k}+\left|z_1\right|^2\left|z_2\right|^2\right)},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}H_0\left(z_1,z_2\right)=&-\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left(z_1,z_2\right)\right)+\frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\ln\left(R^2-\left|z_1\right|^2\right)+\frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\ln\left(R^2-\left|z_2\right|^2\right)\\&+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(\left|z_1\right|^2\left|z_2\right|^2-2R^2\left(z_1,z_2\right)+R^4\right)\end{aligned}$$

是圆盘中 2-点涡系统对应的哈密顿函数. 上述函数 H 是收敛的，以第一项为例，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{R^2}{\left|z_1\right|^2}q^{2k}\right)\left(1-\frac{\left|z_1\right|^2}{R^2}q^{2k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{R^2}{\left|z_1\right|^2}q^{2k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\left|z_1\right|^2}{R^2}q^{2k}\right)$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\frac{-\ln\left(1-\frac{R^2}{|z_1|^2}q^{2k}\right)}{\frac{R^2}{|z_1|^2}q^{2k}}=1$$

无穷级数$-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{R^2}{|z_1|^2}q^{2k}\right)$ 与等比级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{R^2}{|z_1|^2}q^{2k}$具有相同敛散性. 而 $q\in(01$，无穷级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{R^2}{|z_1|^2}q^{2k}\right)$收敛，故第一项收敛，其余各项类似.

2. 系统约化

定义在 $2N$ 维相空间上的哈密顿系统中，若存在 N 个相互独立的首次积分 $f_1,\cdots,f_N$

则称为是刘维尔完全可积的[11]. 对于一个完全可积的系统，$Liouville - Arnold$定理为点涡系统方程约化提供了可行性，圆环中2-点涡系统只有能量H 和角动量$I = \sum \Gamma_k |z_k|^2$两个相互独立的首次积分，因此系统是刘维尔完全可积的. 本文首先约化点涡系统方程，其次探讨$\Gamma_1 = \Gamma_2$时系统的相对均衡解以及绘制两点涡的相对运动轨迹[12]. 约化过程中采用三次正则变换依次对圆环内2-点涡的哈密顿函数进行变量替换，最后使用涡度矩$I = \Gamma_1|z_1|^2 + \Gamma_2|z_2|^2$降低系统1个自由度来进行约化.

首先，观察到系统方程为非标准的哈密顿方程形式，结合点涡$\{z_k = x_k + iy_k \in \Omega, k = 1, 2\}$为此先引入变量

$$q_k = \sqrt{|\Gamma_k|}sgn(\Gamma_k)x_k, \quad p_k = \sqrt{|\Gamma_k|}y_k, \quad k = 1, 2.$$

则$|z_k|^2 = \frac{|p_k|^2 + |q_k|^2}{|\Gamma_k|}$，同时系统转化为标准形式

$$\dot{q_k} = \frac{\partial H'}{\partial p_k}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad \dot{p_k} = -\frac{\partial H'}{\partial q_k}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \qquad k = 1, 2. \tag{5}$$

其中$H'(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = H(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}))$.

其次为利用系统守恒量I，进一步进行正则的角坐标变换

$$q_k = \sqrt{2\rho_k}cos\theta_k, \qquad p_k = \sqrt{2\rho_k}sin\theta_k\ , \ \ k = 1, 2.$$

此时系统变成

$$\dot{\rho}_k = \frac{\partial H''}{\partial \theta_k}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) \qquad \dot{\theta}_k = -\frac{\partial H''}{\partial \rho_k}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})\ , \ \ k = 1, 2. \tag{6}$$

其中$H''(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) = H'(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}))$.

接下来，取正则变换

$$G_1 = \rho_1 \qquad G_2 = \rho_1 + s_1 s_2 \rho_2$$

$$Q_1 = (\theta_1 - s_1 s_2 \theta_2) \qquad Q_2 = s_1 s_2 \theta_2.$$

代入即可得到新系统

$$\begin{aligned} &\dot{G}_1 = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial Q_1}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{Q}), \qquad \dot{Q}_1 = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial G_1}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{Q}), \\ &\dot{Q}_2 = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial G_2}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{Q}), \qquad \dot{G}_2 = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial Q_2}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{Q}) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

此时哈密顿函数

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\left(\boldsymbol{G},\boldsymbol{Q}\right) = {} & \hat{H}_0\left(\boldsymbol{G},\boldsymbol{Q}\right) + \frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\left|\Gamma_1\right|R^2}{2G_1}q^{2k}\right)\left(1-\frac{2G_1}{\left|\Gamma_1\right|R^2}q^{2k}\right) \\
& + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\left|\Gamma_2\right|R^2}{2\left(G_2-G_1\right)s_1s_2}q^{2k}\right)\left(1-\frac{2\left(G_2-G_1\right)s_1s_2}{\left|\Gamma_2\right|R^2}q^{2k}\right) \\
& - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[\frac{R^4\left(\frac{\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}{|\Gamma_2|}-2\frac{X\sqrt{\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}}{s_1s_2\sqrt{|\Gamma_1\Gamma_2|}}q^{2k}+\frac{X^2+Y^2}{|\Gamma_1|}q^{4k}\right)}{\left(R^4-2R^2\frac{X\sqrt{\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}}{s_1s_2\sqrt{|\Gamma_1\Gamma_2|}}q^{2k}+\frac{\left(X^2+Y^2\right)\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}{|\Gamma_1\Gamma_2|}q^{4k}\right)}\right. \\
& \left.\cdot\frac{\left(\frac{X^2+Y^2}{|\Gamma_2|}-2\frac{X\sqrt{\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}}{s_1s_2\sqrt{|\Gamma_1\Gamma_2|}}q^{2k}+\frac{\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}{|\Gamma_1|}q^{4k}\right)}{\left(R^4q^{4k}-2R^2\frac{X\sqrt{\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}}{s_1s_2\sqrt{|\Gamma_1\Gamma_2|}}q^{2k}+\frac{\left(X^2+Y^2\right)\left(2G_2-X^2-Y^2\right)s_1s_2}{|\Gamma_1\Gamma_2|}\right)}\right.,
\end{aligned}
$$

其中 $s_k = sgn(\Gamma_k)$，

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_0\left(\boldsymbol{G},\boldsymbol{Q}\right) = {} & -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(\frac{2G_1}{|\Gamma_1|}+\frac{2\left(G_2-G_1\right)s_1s_2}{|\Gamma_2|}-4\frac{\sqrt{G_1\left(G_2-G_1\right)s_1s_2}\cos Q_1}{s_1s_2\sqrt{|\Gamma_1\Gamma_2|}}\right) \\
& + \frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\ln\left(R^2-\frac{2G_1}{|\Gamma_1|}\right)+\frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\ln\left(R^2-\frac{2\left(G_2-G_1\right)s_1s_2}{|\Gamma_2|}\right) \\
& + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(\frac{4G_1\left(G_2-G_1\right)s_1s_2}{|\Gamma_1\Gamma_2|}-4R^2\frac{\sqrt{G_1\left(G_2-G_1\right)s_1s_2}\cos Q_1}{s_1s_2\sqrt{|\Gamma_1\Gamma_2|}}+R^4\right).
\end{aligned}
$$

此时 $G_2 = \frac{1}{2}(q_1^2+p_1^2)+\frac{1}{2}s_1s_2(q_2^2+p_2^2) = \frac{1}{2}s_1 I$ 是角动量 I 的常数倍，为首次积分. 这表示 $\widehat{H}$ 不再依赖变量 Q_2，而 G_2 则演变为一个参数，最终我们将自由度为 2 的原系统降低了 1 个自由度.

3. 当 $\Gamma_1 = \Gamma_2$ 时系统的可积运动及相对均衡解

点涡强度不同会改变参数和变量的取值范围，在研究两点涡的相对运动时为简化计算，我们假设两点涡强度相等，即 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$，$s_1 = s_2$，此时 $2G_2 = I$ 为角动量，不妨给定 $R = 1$，则 $q = r$. 以此为例研究系统的可积运动和相对均衡解. 令

$$
X = \sqrt{2G_1}\cos Q_1, \quad Y = \sqrt{2G_1}\sin Q_1,
$$

他们满足方程

$$
\dot{X} = \frac{\partial\widetilde{H}}{\partial Y}(X,Y;G_2), \quad \dot{Y} = -\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial X}(X,Y;G_2),
$$

结合 $2G_2 = I$ 则 $2q^2 < I < 2$，(X, Y) 满足：

$$\begin{cases} 2q^2 < X^2 + Y^2 < 1 \\ q^2 < I - X^2 - Y^2 < 1 \end{cases}$$

现在系统方程变为：

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(X, Y; I) = {} & \tilde{H}_0(X, Y; I) + \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\left(1 - \frac{R^2}{X^2 + Y^2}q^{2k}\right)\left(1 - \frac{X^2 + Y^2}{R^2}q^{2k}\right)\right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{R^2}{(I - X^2 - Y^2)}q^{2k}\right)\left(1 - \frac{(I - X^2 - Y^2)}{R^2}q^{2k}\right) \\
& - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[\frac{R^4\left((I - X^2 - Y^2) - 2X\sqrt{(I - X^2 - Y^2)}q^{2k} + (X^2 + Y^2)q^{4k}\right)}{\left(R^4 - 2R^2X\sqrt{(I - X^2 - Y^2)}q^{2k} + (X^2 + Y^2)(I - X^2 - Y^2)q^{4k}\right)}\right. \\
& \left.\cdot\frac{\left((I - X^2 - Y^2)q^{4k} - 2X\sqrt{(I - X^2 - Y^2)}q^{2k} + (X^2 + Y^2)\right)}{\left(R^4q^{4k} - 2R^2X\sqrt{(I - X^2 - Y^2)}q^{2k} + (X^2 + Y^2)(I - X^2 - Y^2)\right)}\right],
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_0(X, Y; I) = {} & -\frac{1}{4\pi}\ln\left(I - 2X\sqrt{(I - X^2 - Y^2)}\right) + \frac{1}{4\pi}\ln\left(R^2 - X^2 - Y^2\right) \\
& + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\ln\left(R^2 - (I - X^2 - Y^2)\right) \\
& + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left((X^2 + Y^2)(I - X^2 - Y^2) - 2R^2X\sqrt{(I - X^2 - Y^2)} + R^4\right).
\end{aligned}$$

变量 (X, Y) 在物理上表示与点涡 1 和点涡 2 在参考系中一起旋转的笛卡尔坐标. 上述哈密顿系统方程描述了这两个点涡的相对位置变化. 如下得到 $q = 0.02q = 0.08q = 0.2$ 值的情况下，在 I 的不同区间上不动点的稳定性变化情况分析.

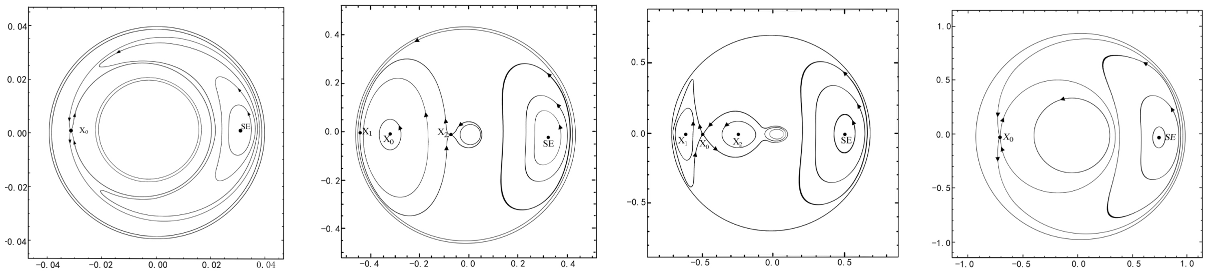
(1)在 $0.0008 < I < I_0 \approx 0.005$ 中取定 $I = 0.002$ 观察到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个鞍点.

(2)在 $I_0 < I < I_1 \approx 0.43$ 中取定 $I = 0.2$ 观察到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个中心，X_1X_2 是鞍点，由 X_1 出发到 X_2 的两条异宿轨将 X_1 “包围”.

(3)在 $I_1 < I < I_2 \approx 0.61$ 中取定 $I = 0.5$ 可以看到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个鞍点，X_0 的两条同宿轨将“包围” X_1X_2 这两个中心.

(4)在 $I_2 < I < 2$ 中取定 $I = 1$ 观察到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个鞍点. 如图 3所示，其中SE表示奇异构型.

$\boldsymbol{q = 0.02}$

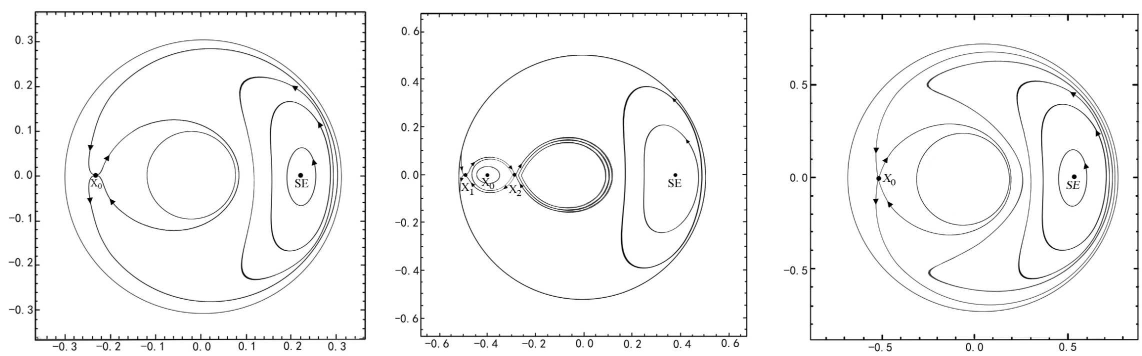


(a) $I = 0.002$ (b) $I = 0.2$ (c) $I = 0.5$ (d) $I = 1$

Figure 3. Schematic diagram of $\tilde{H}$ energy lines at different values of I at $q = 0.02$

图 3. $q = 0.02$ 时不同 I 值下 $\tilde{H}$ 能量线示意图

$\boldsymbol{q = 0.08}$



(a) $I = 0.1$ (b) $I = 0.31$ (c) $I = 0.5$

Figure 4. Schematic diagram of $\tilde{H}$ energy lines at different values of I at $q = 0.08$

图 4. $q = 0.08$ 时不同 I 值下 $\tilde{H}$ 能量线示意图

(1)在 $0.0128 < I < I_3 \approx 0.11$ 中取定 $I = 0.1$ 观察到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个鞍点.

(2)在 $I_3 < I < I_4 \approx 0.35$ 中取定 $I = 0.31$ 观察到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个中心，X_1X_2 是鞍点，由 X_1X_2 组成的的两条异宿轨“包围”了 X_0.

(3)在 $I_4 < I < 2$ 中取定 $I = 0.5$ 观察到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动

点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个鞍点. 如图 4 所示，其中 SE 表示奇异构型.

$q = 0.2$

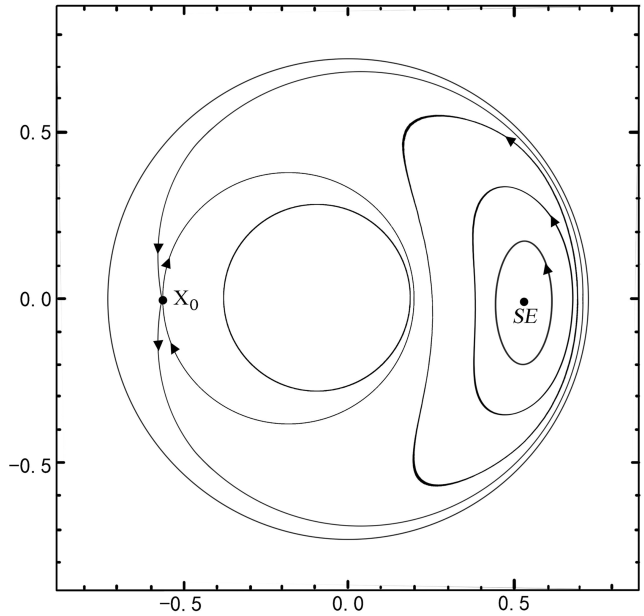


Figure 5. Schematic diagram of $\tilde{H}$ energy lines at different values of I at $q = 0.2$
图 5. $q = 0.2$ 时不同 I 值下 $\tilde{H}$ 能量线示意图

$I = 0.5$ 时，观察到系统在 XY 平面上的相对运动轨迹中不动点 $X_0 = \left(-\sqrt{I/2}, 0\right)$ 是一个鞍点. 如图 5所示，其中 SE 表示奇异构型.

通过观察相对轨迹图可以发现发生了分歧现象，即在 q 分别取 0.02，0.08 和 0.2 时随着参数 I 的变化不动点的个数和类型均发生了改变，均衡解变化情况如表 1，表 2，表 3所示.

Table 1. Change in equilibrium solution at $q = 0.02$
表 1. $q = 0.02$ 时均衡解的变化情况

I 的区间	均衡解的类型
$0.0008 < I \leq 0.005$	一个鞍点
$0.005 < I \leq 0.43$	一个中心，两个鞍点
$0.43 < I \leq 0.61$	一个鞍点，两个中心
$0.61 < I < 2$	一个鞍点

点涡系统的分歧现象非线性动力学系统中的重要现象之一，展现了动力学系统在参数变化过程中的稳定性转变的复杂性. 研究此现象可以更好地理解在复杂流场中产

Table 2. Change in equilibrium solution at $q = 0.08$

表 2. $q = 0.08$ 时均衡解的变化情况

I 的区间	均衡解的类型
$0.0128 < I \leq 0.11$	一个鞍点
$0.011 < I \leq 0.35$	一个中心，两个鞍点
$0.35 < I \leq 0.2$	一个鞍点

Table 3. Change in equilibrium solution at $q = 0.2$

表 3. $q = 0.2$ 时均衡解的变化情况

I 的区间	均衡解的类型
$0.08 < I \leq 2$	一个鞍点

生的涡流结构和动态行为，从而在飞行器设计、能源利用、湍流控制等方面提供更有效的解决方案，还能为工程实践等提供新的视角和方法，推动相关领域的发展和创新. 本文研究了圆环内两点涡系统的可积性和相对均衡解的稳定性，并绘制圆环内外半径比 $q = 0.02q = 0.08q = 0.2$ 时参数 I 取不同值时两点涡的相对运动轨迹图同时分析所产生的分歧现象. 研究环域中的分歧现象使问题具象化，可以更有针对性地解决工程实践和科学研究中的问题. 目前本文研究只局限在可能存在的三种均衡解类型，不够全面，另外是否有其他的类型还需进一步讨论.

参考文献

[1] Lin, C.C. (1941) On the Motion of Vortices in 2D: I. Existence of the Kirchhoff-Routh Function. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **27**, 570-575. https://doi.org/10.1073/pnas.27.12.570

[2] Lin, C.C. (1941) On the Motion of Vortices in 2D II. Some Further Properties on the Kirchhoff-Routh Function. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **27**, 575-577. https://doi.org/10.1073/pnas.27.12.575

[3] Thomson, J.J.S. (1968) A Treatise on the Motion of Vortex Rings: An Essay to Which the Adams Prize Was Adjudged in 1882, in the University of Cambridge. Dawsons of Pall Mall, London.

[4] Havelock T. H. (1931) The Stability of Motion of Rectilinear Vortices in Ring Formation. *Philosophical Magazine*, **11**, 617-633. https://doi.org/10.1080/14786443109461714

[5] Kurakin, L.G. (2010) On the Stability of Thomson's Vortex Configurations inside a Circular Domain. *Regular and Chaotic Dynamics*, **15**, 40-58. https://doi.org/10.1134/S1560354710010028

[6] Pashaev, O.K. and Yilmaz, O. (2011) Hamiltonian Dynamics of N Vortices in Concentric Annular Region. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **44**, Article 185501. https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/18/185501

[7] Lakaniemi, M. (2007) On the Dynamics of Point Vortices in a Quantum Gas Confined in an Annular Region. arXiv: 0708.1898

[8] Bolsinov, A.V., *et al.* (2010) Topology and Stability of Integrable Systems. *Russian Mathematical Surveys*, **65**, 259-318. https://doi.org/10.1070/RM2010v065n02ABEH004672

[9] Vaskin, V.V. and Erdakova, N.N. (2010) On the Dynamics of Two Point Vortices in an Annular Region. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **6**, 531-547. https://doi.org/10.20537/nd1003005

[10] Courant, R. and Hilbert, D. (1989) Methods of Mathematical physics. Vol. II. Partial Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc., New York. https://doi.org/10.1002/9783527617234

[11] Arnold, V.I. (1978) Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1693-1

[12] 戴芊慧, 晋榕榕, 毛玉兰. 圆盘中2-点涡的可积运动[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2019, 55(2): 179-184.