Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 307-314
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145187

具有自由终端时间的多目标最优控制问题可行解的存在性

洪 叶

西南交通大学数学学院，四川 成都

收稿日期：2024年3月25日；录用日期：2024年4月26日；发布日期：2024年5月30日

摘 要

本文主要考虑在欧式空间中，初始状态和终端状态满足约束，具有自由终端时间的多目标最优控制问题。通过引入额外的状态与控制，把具有自由终端时间的多目标最优控制问题转变为有限时间区间的多目标最优控制问题，得到了具有自由终端时间的多目标最优控制问题可行解存在性条件。

关键词

自由终端时间，多目标最优控制问题，可行解

Existence of the Feasible Solutions for Multi-Objective Optimal Control Problem with Free End Time

Ye Hong

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 25^{th}, 2024; accepted: Apr. 26^{th}, 2024; published: May 30^{th}, 2024

文章引用: 洪叶. 具有自由终端时间的多目标最优控制问题可行解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 307-314.
DOI: 10.12677/pm.2024.145187

Abstract

In this paper, we mainly consider the multi-objective optimal control problem with free end time, initial state and terminal state satisfying constraints. By introducing additional state and control, we transform this problem into a control problem with fixed end time, we obtain the existence of the feasible solutions for multi-objective optimal control problem with free end time.

Keywords

Free End Time, Multi-Objective Optimal Control Problem, Feasible Solution

1. 引言

令$n, m, i \in \mathbb{N}$，U 为一般度量空间。记$\mathbb{R}^n$ 为n 维欧式空间，$\mathcal{U}$ 为$[0, +\infty)$ 映到U 的可测函数全体构成的集合，$W^{1,1}(0, +\infty; \mathbb{R}^n) = \{x(\cdot) \in L^1([0, +\infty); \mathbb{R}^n); \dot{x}(\cdot) \in L^1([0, +\infty); \mathbb{R}^n)\}$。给定如下几个映射$f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$，$f^0 = (f_1^0, \cdots, f_m^0)^\top : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^m$，考虑如下控制系统：

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), a.e. \quad t \geq 0, \tag{1}$$

其中控制$u(\cdot)$ 和状态$x(\cdot) \in W^{1,1}(0, +\infty; \mathbb{R}^n)$，满足如下约束:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \ x(T) = x_1, \\ u(t) \in U, \ a.e. \ t \in [0, +\infty), \end{cases} \tag{2}$$

这里x_0, x_1 为$\mathbb{R}^n$ 当中一任意给定向量，$T > 0$。

若称$(T, u(\cdot), x(\cdot))$ 为上述系统的可行解，如果它满足$x(\cdot) \in W^{1,1}(0, +\infty; \mathbb{R}^n)$，$u(\cdot) \in \mathcal{U}$，同时也满足(1)和(2)。记$\mathcal{P}$ 为上述系统的所有可行解构成的集合，下面为与上述系统方程相关的多目标最优控制问题：

(MTCP) 最小化性能指标

$$\underset{(T,u(\cdot),x(\cdot))\in\mathcal{P}}{J(T,u(\cdot),x(\cdot))}=\int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt \tag{3}$$

当$m>1$ 时，问题(MTCP)称为具有自由终端时间的多目标最优控制问题。在实际生活当中，有许多问题数学模型可被抽象为问题(MTCP)，例如 [1] 当中的隧道二极管振荡器问题，它是一个具有自由终端时间的多目标最优控制问题，它需要最小化发电机电压和终端时间。同样地，在飞行器轨迹设计、生物医药、疫情控制等方面也出现了具有自由终端时间的多目标最优控制问题，具体可见 [2–5]。在解决这类问题过程中，往往需要使用优化条件，但在使用优化条件之前，我们需要保证可行解的存在性。在论文 [6] 当中，作者研究了一个有限时间区间上多目标最优控制问题可行解的存在性条件，要求控制区间为一般完备可分的度量空间。自由终端时间的多目标最优控制问题终端时间是不定的，已有的有限时间区间的多目标最优控制问题的可行解存在性条件不能直接应用到具有自由终端时间的多目标最优控制问题当中去。本篇论文在 [6] 的基础上，研究具有自由终端时间的多目标最优控制问题的可行解存在性条件。

此篇论文结构分为如下几部分：第二部分为准备工作，给出问题假设、弱有效最优解的定义、记号以及有限时间区间上多目标最优控制问题可行解存在性条件，第三部分陈述主要结论并应用到一实例中，第四部分介绍具有自由终端时间的多目标最优控制问题转变为有限时间区间的多目标最优控制问题的过程，以及主要结论的证明。

2. 准备

首先给出定理的假设条件：

(A1) U 为一个完备可分度量空间；

(A2) 映射$f(=f(t,x,u)):[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$和$f_i^0(=f_i^0(t,x,u)):[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$，对任意$i\in\{1,\cdots,m\}$，关于$(t,x)$ 是C^1 的，关于u 是连续的。进一步，对于$\Phi=f,f_1^0,\cdots,f_m^0$，都存在一常值$L>0$，$t_0\in[0,+\infty)$，$x_0\in\mathbb{R}^n$，使得

$$|\,\Phi(t,x,u)-\Phi(\tilde{t},\tilde{x},u)\,|\le L(|\,t-\tilde{t}\,|+|\,x-\tilde{x}\,|), \tag{4}$$

$$|\,\Phi(t_0,x_0,u)\,|\le L,\quad \forall\,\tilde{t},t\in[0,+\infty),x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n,u\in U. \tag{5}$$

接下来给出弱有效最优解的定义：

Definition 2.1. *若称$(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))\in\mathcal{P}$ 为问题(MTCP)的弱有效最优解，如果不存在$(T,u(\cdot),x(\cdot))\in\mathcal{P}$，使得$J(T,,u(\cdot),x(\cdot))<J(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))$。*

在此部分，我们设$(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))$ 为(MTCP)的弱有效最优解。为了方便，给出如下记号，给定一个函数$g(=g(t,x_1,\cdots,x_n,u)):[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times U$，对任意$i\in\{1,\cdots,m\}$，记$\partial_t g$ 和$\partial_{x_i}g$ 分别为g 关于t 和x_i 的偏导。同样记$\partial_x g=(\partial_{x_1}g,\cdots,\partial_{x_n}g)$。对于任意定义在$[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times U$ 上映射γ，记$\gamma[t]=\gamma\,(t,x^*(t),u^*(t))$，$a.e.\,t\in[0,+\infty)$。取$\alpha\in(0,T^*)$，$\beta\in(T^*,+\infty)$，$\alpha\to0^+$，$\beta\to+\infty$。记$\mathcal{A}[0,T^*]$ 为所有从$[0,T^*]$ 映到$[\alpha,\beta]$ 所有可积函数的集合。

接着下面为有限时间区间上多目标最优控制问题可行解的存在性定理：

Theorem 2.1. 假设*(C1)-(C2)*成立，$(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 为问题*(MCP)*的弱有效最优解，令集合$F=\{\nabla_1\psi(\bar{x}(0),\bar{x}(T))W+\nabla_2\psi(\bar{x}(0),\bar{x}(T))X_{u,W}(T),\forall W\in\mathbb{R}^n,u\in\mathcal{U}\}$，其中$X_{u,W}(\cdot)$ 对于$a.e.\,t\in[0,T]$，这里T 是固定的，满足

$$
\begin{cases}\dot{X}_{u,W}(t)=\nabla_x f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))X_{u,W}(t)+f(t,\bar{x}(t),u(t))-f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\\ X_{u,W}(0)=W,\,\forall\,W\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{6}
$$

若$0\in Int\,F$，其中$Int\,F$ 为集合F 的内部，则一定能在$\bar{u}(\cdot)$ 附近找到可行控制。即：对任意$\epsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，$\exists\,u_\epsilon(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad}$，满足$d\big(u_\epsilon(\cdot),\bar{u}(\cdot)\big)<\delta$，$s.t.$，$\|u_v^\epsilon(\cdot)-u^*(\cdot)\|_{L^\infty}<\epsilon$。

这里(C1)-(C2)条件，记号以及定理证明具体可见 [6]，这里我们省略这一定理的证明。

3. 主要结论

这一部分我们给出自由终端时间的多目标最优控制问题的可行解存在性条件：

Theorem 3.1. 假设*(A1)-(A2)*成立，$(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))$ 为问题*(MTCP)*的弱有效最优解，令集合$\hat{F}=\{(\hat{\lambda}^\top,X_{\xi,u}(T^*)^\top)^\top|\,\forall\,\hat{\lambda}=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\lambda)^\top\in\mathbb{R}^{1+m+n},\forall\,(\xi(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{A}[0,T^*]\times\mathcal{U}\}$，其中$X_{\xi,u}(\cdot)$ 对于$a.e.\,t\in(0,T^*)$ 满足

$$
\begin{cases}\dot{X}_{\xi,u}(t)=\partial_t f[t]X_{\xi,u}(t)+\partial_x f[t]X_{\xi,u}(t)+f(t,x^*(t),u(t))\frac{\xi(t)}{T^*}-f[t],\\ X_{\xi,u}(0)=\lambda^\top.\end{cases}\tag{7}
$$

若$0\in Int\,\hat{F}$，其中$Int\,\hat{F}$ 为集合F 的内部，则能在$(T^*,u^*(\cdot))$ 附近找到可行控制对。即：对任意$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，存在$(T_\epsilon,u_\epsilon(\cdot))\in(0,+\infty)\times\mathcal{U}_{ad}$，满足$\|T_\epsilon-T^*\|+d\big(u_\epsilon(\cdot),u^*(\cdot)\big)<\delta$，$s.t.$，$\|T_v^\epsilon-T^*\|_{L^\infty}+\|u_v^\epsilon(\cdot)-u^*(\cdot)\|_{L^\infty}<\epsilon$。

Remark 3.1. 可行控制对的存在性即为可行解的存在性。

我们将定理应用到如下例子：

Example 3.1. 考虑如下多目标最优控制问题：最小化性能指标

$$
J(T,u(\cdot),x(\cdot))=\big(T,\quad\int_0^T u^2(t)dt\big)
$$

受控于

$$
\begin{cases}\dot{x}(t)=u(t),\,t\geq 0,\\ x(0)=0,\;x(T)=2,\\ u(t)\in[1,2],\,a.e.\;t\in[0,+\infty),\end{cases}
$$

请证明该多目标最优控制问题的可行解的存在性。

证明： 容易得$(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))=(2,1,t)$ 为问题的一个弱有效解，利用Theorem 3.1，可得$\hat{F}=\{(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda,X_{\xi,u}(2))^\top|\forall(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda)\in\mathbb{R}^4,\forall(\xi(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{A}[0,2]\times\mathcal{U}\}$，其中$X_{\xi,u}(\cdot)$ 对于$a.e.\,t\in(0,2)$ 满足

$$\begin{cases}\dot{X}_{\xi,u}(t)=u(t)\frac{\xi(t)}{T^*}-1,\\ X_{\xi,u}(0)=\lambda.\end{cases}$$

则集合$\hat{F}=\{(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\int_0^2\frac{u(\tau)\xi(\tau)}{2}d\tau-2+\lambda)^\top|\forall(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda)\in\mathbb{R}^4,\forall(\xi(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{A}[0,2]\times\mathcal{U}\}$，$0\in Int\hat{F}$，且(A1)和(A2)成立，因此$(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))$ 附近存在可行解。易知$(T,u(\cdot),x(\cdot))=\left(\frac{2}{\frac{1}{n}+1},\frac{1}{n}+1,(\frac{1}{n}+1)t\right)$ 为$(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))$ 附近的可行解，这里让$n\geq1$ 且$n\to+\infty$，证毕。

4. 证明主要结论

对于问题(MTCP)，令$\dot{x}_i(t)=f_i^0(t,x(t),u(t)),x_i(0)=0,\forall t\in[0,+\infty),i=1,\cdots,m$。进一步让$t=y_0(s)=\int_0^s v(\tau)d\tau$，$T=y_0(1)$，$y_i(s)=x_i(y_0(s))$，$w(s)=u(y_0(s))$，$y(s)=x(y_0(s))$，$\forall s\in[0,1],i=1,\cdots,m$，其中$v(\cdot)\in\mathcal{A}[0,1]$。则问题(MTCP)转变为如下有限时间区间上的多目标最优控制问题：

(P) 最小化性能指标

$$(y_1(1),\cdots,y_m(1))^\top$$

服从于如下控制系统：

$$\begin{cases}\dot{Y}(s)=F(Y(s),v(s),w(s)),\ a.e.\ s\in(0,1),\\ Y(0)=(0,\ O_{1\times m},\ x_0^\top)^\top,\\ y(1)=x_1,v(\cdot)\in\mathcal{A}[0,1],\ w(\cdot)\in\mathcal{U}.\end{cases}\tag{8}$$

这里$Y(s)=(y_0(s),y_1(s),\cdots,y_m(s),y(s)^\top)^\top\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$。记$\tilde{\mathcal{P}}$ 为上述系统的所有可行解的集合，即$\tilde{\mathcal{P}}\triangleq\{(v(\cdot),w(\cdot),Y(\cdot)^\top)^\top\in\mathcal{A}[0,1]\times\mathcal{U}\times\mathbb{R}^{1+m+n}|Y(\cdot)$ 满足(8)$\}$。映射$F:\mathbb{R}^{1+n+m}\times[\alpha,\beta]\times U\to\mathbb{R}^{1+n+m}$，其定义如下：

$$F(y_0,y_1,\cdots,y_m,v,w)=(v,f_1^0(y_0,y,w)v,\cdots,f_1^0(y_0,y,w)v,f(y_0,y,w)^\top v)^\top$$

接下来给出如下几个引理：

Lemma 4.1. 假设$(T^*, u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ 为问题*(MTCP)*的弱有效最优解，令

$$\begin{cases} v^*(s) = T^*, y_0^*(s) = T^*s, y^*(s) = x^*(T^*s), w^*(s) = u^*(T^*s), s \in [0,1], \\ y_i^*(s) = \int_0^s f_i^0(y_0^*(\tau), y^*(\tau), w^*(\tau))T^* d\tau, \forall\, i = 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{9}$$

那么$(v^*(\cdot), w^*(\cdot), y_0^*(\cdot), y_1^*(\cdot), \cdots, y_m^*(\cdot), y^*(\cdot)^T)^T$ 为问题*(P)*的弱有效最优解。

证明: 任意$(v(\cdot), w(\cdot), y_0(\cdot), y_1(\cdot), \cdots, y_m(\cdot), y(\cdot)^\top)^\top \in \tilde{\mathcal{P}}$，让$T = y_0(1)$，$t = y_0(s)$，$s \in [0,1]$，由于$t = y_0(s)$ 关于$s \in [0,1]$ 是连续且严格单增，则其存在反函数，这里我们记作$s = \Phi(t)$， 且有

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{1}{v(s)}, t \in [0,T]. \tag{10}$$

现在我们令

$$x(t) = y(\Phi(t)),\, u(t) = w(\Phi(t)),\, t \in [0,T]. \tag{11}$$

我们很容易验证到$y_i(1) = \int_0^T f_i^0(t, x(t), u(t))dt, \forall\, i = 1, \cdots, m$ 和$(x(0), x(T)) = (x_0, x_1)$，同样地，我们也可以得到$y_i^*(1) = \int_0^{T^*} f_i^0[t]\, dt, \forall\, i = 1, \cdots, m$。结合(8)、(11) 和(10), 可得$(T, u(\cdot), x(\cdot))$ 满足(1)和(2)，因此$(T, u(\cdot), x(\cdot)) \in \mathcal{P}$ 。由于$(T^*, u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ 为问题(MTCP)的弱有效最优解，则有

$$\int_0^T f_i^0(t, x(t), u(t))\, dt < \int_0^{T^*} f_i^0[t]\, dt, \forall\, i = 1, \cdots, m \tag{12}$$

不成立，这也说明了

$$y_i(1) < y_i^*(1), \forall\, i = 1, \cdots, m \tag{13}$$

不成立。因此$(v^*(\cdot), w^*(\cdot), y_0^*(\cdot), y_1^*(\cdot), \cdots, y_m^*(\cdot), y^*(\cdot)^\top)^\top$ 为问题(P)的弱有效最优解，证毕。

Lemma 4.2. 假设$(\tilde{v}^*(\cdot), \tilde{w}^*(\cdot), \tilde{y}_0^*(\cdot), \tilde{y}_1^*(\cdot), \cdots, \tilde{y}_m^*(\cdot), \tilde{y}^*(\cdot)^T)^T$ 为问题*(P)*的弱有效最优解，让$t = \tilde{y}_0(s)$，存在$\tilde{y}_0(s)$ 的反函数记作$s = \Phi(t)$，令

$$\tilde{T}^* = \tilde{y}^*(1), \tilde{u}^*(t) = \tilde{w}^*(\Phi(t)), \tilde{x}^*(t) = \tilde{y}^*(\Phi(t)),\, t \in [0, T^*]. \tag{14}$$

则有$(\tilde{T}^*, \tilde{u}^*(\cdot), \tilde{x}^*(\cdot))$ 为问题*(MTCP)*的弱有效最优解。

证明:对$\forall\, (\tilde{T}, \tilde{u}(\cdot), \tilde{x}(\cdot)) \in \mathcal{P}$，利用(9) 的变形方法，我们可以得到与之对应的$(\tilde{v}(\cdot), \tilde{w}(\cdot), \tilde{y}_0(\cdot), \tilde{y}_1^0(\cdot), \cdots, \tilde{y}_m^0(\cdot), \tilde{y}(\cdot)^\top)$。$(\tilde{v}(\cdot), \tilde{w}(\cdot), \tilde{y}_0(\cdot), \tilde{y}_1^0(\cdot), \cdots, \tilde{y}_m^0(\cdot), \tilde{y}(\cdot)^\top)^\top$ 满足(8)，因此有$(\tilde{v}(\cdot), \tilde{w}(\cdot), \tilde{y}_0(\cdot), \tilde{y}_1^0(\cdot), \cdots, \tilde{y}_m^0(\cdot), \tilde{y}(\cdot)^\top)^\top \in \tilde{\mathcal{P}}$。已知$(\tilde{v}^*(\cdot), \tilde{w}^*(\cdot), \tilde{y}_0^*(\cdot), \tilde{y}_1^*(\cdot), \cdots, \tilde{y}_m^*(\cdot), \tilde{y}^*(\cdot)^\top)^\top$ 为问题(P)的弱有效最优解，则有

$$\tilde{y}_i(1) < \tilde{y}_i^*(1), \quad \forall\, i = 1, \cdots, m$$

不成立，这也说明

$$\int_0^{\tilde{T}} f_i^0(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))\,dt < \int_0^{\tilde{T}^*} f_i^0[t]\,dt, \forall\, i=1,\cdots,m \tag{15}$$

不成立。因此$(\tilde{T}^*,\tilde{u}^*(\cdot),\tilde{x}^*(\cdot))$ 为问题(MTCP)的弱有效最优解，证毕。

Remark 4.1. *上面两个引理说明了在一定条件下，问题(MTCP)和问题(P)的可行解、弱有效最优解是可以互相转换的。*

接下来为Theorem 3.1 证明过程：

证明： Step 1. 假设$(T^*,u^*(\cdot),x^*(\cdot))$ 为问题(MTCP)的弱有效最优解，由Lemma 4.1，可得$(v^*(\cdot),w^*(\cdot),y_0^*(\cdot),y_1^*(\cdot),\cdots,y_m^*(\cdot),y^*(\cdot)^\top)^\top$ 为问题(P)的弱有效最优解。对于问题(P),根据Theorem 2.1，若$0\in Int\tilde{F}$，则一定能在$(v^*(\cdot),w^*(\cdot))$ 附近找到可行控制。

这里集合$\tilde{F}=\{\nabla_1\psi(\bar{Y}(0),\bar{Y}(1))\hat{\lambda}+\nabla_2\psi(\bar{Y}(0),\bar{Y}(1))\hat{Y}_{v,w}(1)|\,\forall\,\hat{\lambda}\in\mathbb{R}^{1+m+n},(v(\cdot),w(\cdot))\in\mathcal{A}[0,1]\times\mathcal{U}\}$，其中$\hat{Y}_{v,w}(\cdot)=\left(Y_{v,w}^0(\cdot),Y_{v,w}^1(\cdot),\cdots,Y_{v,w}^m(\cdot),Y_{v,w}(\cdot)^\top\right)^\top$ 对$a.e.\,s\in[0,1]$ 满足：

$$(\frac{d}{ds}Y_{v,w}^0(s),\frac{d}{ds}Y_{v,w}^1(s),\cdots,\frac{d}{ds}Y_{v,w}^m(s),\frac{d}{ds}Y_{v,w}(s)^\top)^\top \tag{16}$$

$$=T^*\begin{pmatrix} 0 & O_{1\times m} & O_{1\times n} \\ \partial_t f^0[T^*s] & O_{m\times m} & \partial_x f^0[T^*s] \\ \partial_t f[T^*s] & O_{m\times m} & \partial_x f[T^*s] \end{pmatrix}\left(Y_{v,w}^0(\cdot),Y_{v,w}^1(\cdot),\cdots,Y_{v,w}^m(\cdot),Y_{v,w}(\cdot)^\top\right)^\top \tag{17}$$

$$+\begin{pmatrix} v(s) \\ f^0(T^*s,y^*(s),w^*(s))v(s) \\ f(T^*s,y^*(s),w^*(s))v(s) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} T^* \\ f^0[T^*s]T^* \\ f[T^*s]T^* \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$=T^*\begin{pmatrix} \frac{v(s)}{T^*}-1 \\ \partial_t f^0[T^*s]Y_{v,w}^0(s)+\partial_x f^0[T^*s]Y_{v,w}(s)+f^0(y_0^*(s),y^*(s),w(s))\frac{v(s)}{T^*}-f^0[T^*s] \\ \partial_t f[T^*s]Y_{v,w}^0(s)+\partial_x f[T^*s]Y_{v,w}(s)+f(y_0^*(s),y^*(s),w(s))\frac{v(s)}{T^*}-f[T^*s] \end{pmatrix} \tag{19}$$

和$\nabla_1\psi(\bar{Y}(0),\bar{Y}(1))$与$\nabla_2\psi(\bar{Y}(0),\bar{Y}(1))$ 有:

$$\nabla_1\psi(\bar{Y}(0),\bar{Y}(1))=\begin{pmatrix} 1 & O_{1\times m} & O_{1\times n} \\ O_{m\times 1} & E_{m\times m} & O_{m\times n} \\ O_{n\times 1} & O_{n\times m} & E_{n\times n} \\ O_{n\times 1} & O_{n\times m} & O_{n\times n} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\nabla_2\psi(\bar{Y}(0),\bar{Y}(1))=\begin{pmatrix} O_{(m+n+1)\times(m+1)} & O_{(m+n+1)\times n} \\ O_{n\times(m+1)} & E_{n\times n} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

对于$t \in [0, T^*]$，我们取

$$u(t) = w(\frac{t}{T^*}), \quad \xi(t) = v(\frac{t}{T^*}) \tag{22}$$

$$\hat{X}_{\xi,u}(t) = \big(X^0_{\xi,u}(t), X^1_{\xi,u}(t), \cdots, X^m_{\xi,u}(t), X_{\xi,u}(t)^\top\big)^\top = \hat{Y}_{v,w}(\frac{t}{T^*}) \tag{23}$$

通过计算，可由(16)-(23)推出(7)，进一步得到集合$\hat{F}$。

Step 2. 若$0 \in Int\tilde{F}$，则$(v^*(\cdot), w^*(\cdot))$ 附近存在可行控制，那么对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，存在$(v_\epsilon(\cdot), w_\epsilon(\cdot))$，满足$d\big(v_\epsilon(\cdot), v^*(\cdot)\big) + d\big(w_\epsilon(\cdot), w^*(\cdot)\big) < \delta$，$s.t.$，$\|v^\epsilon_v(\cdot) - v^*(\cdot)\|_{L^\infty} + \|w^\epsilon_v(\cdot) - w^*(\cdot)\|_{L^\infty} < \epsilon$。取$T_\epsilon = \int_0^1 v_\epsilon(\tau)d\tau$，$u_\epsilon(t) = w_\epsilon(\frac{t}{T^*})$，$T^\epsilon_v = \int_0^1 v^\epsilon_v(\tau)d\tau$，$u^\epsilon_v(t) = w^\epsilon_v(\frac{t}{T^*})$。由Lemma 4.2，$(T_\epsilon, u_\epsilon(\cdot)) \in (0, +\infty) \times \mathcal{U}_{ad}$。结合(9)，(22) 以及$(v^*(\cdot), w^*(\cdot))$ 附近存在的可行控制的定义，对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，$(T_\epsilon, u_\epsilon(\cdot))$ 满足$\|T_\epsilon - T^*\| + d\big(u_\epsilon(\cdot), u^*(\cdot)\big) < d\big(v_\epsilon(\cdot), v^*(\cdot)\big) + \beta\, d\big(w_\epsilon(\cdot), w^*(\cdot)\big) < \beta\,\delta$，$s.t.$，$\|T^\epsilon_v - T^*\|_{L^\infty} + \|u^\epsilon_v(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L^\infty} < \|v^\epsilon_v(\cdot) - v^*(\cdot)\|_{L^\infty} + \|w^\epsilon_v(\cdot) - w^*(\cdot)\|_{L^\infty} < \epsilon$。这说明若$0 \in Int\hat{F}$，则$(T^*, u^*(\cdot))$ 附近存在可行控制对，证毕。

参考文献

[1] Kaya, C.Y. and Maurer, H. (2023) Optimization over the Pareto Front of Nonconvex Multi-objective Optimal Control Problems. arXiv preprint arXiv: 2301.13327 https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.13327

[2] Bolzoni, L., Bonacini, E., Della Marca, R. and Groppi, M. (2019) Optimal Control of Epidemic Size and Duration with Limited Resources. *Mathematical Biosciences*, **315**, Article 108232. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2019.108232

[3] Logist, F., Van Erdeghem, P.M.M. and Van Impe, J.F. (2009) Efficient Deterministic Multiple Objective Optimal Control of (Bio)Chemical Processes. *Chemical Engineering Science*, **64**, 2527-2538. https://doi.org/10.1016/j.ces.2009.01.054

[4] Vertovec, N., Ober-Blöbaum, S. and Margellos, K.(2023) Multi-Objective Low-Thrust Spacecraft Trajectory Design Using Reachability Analysis. *European Journal of Control*, **69**, Article 100758. https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2022.100758

[5] Vertovec, N., Ober-Blöbaum, S. and Margellos, K. (2021) Multi-Objective Minimum Time Optimal Control for Low-Thrust Trajectory Design. *2021 European Control Conference (ECC)*, Delft, 29 June-2 July 2021, 1975-1980. https://doi.org/10.23919/ECC54610.2021.9654919

[6] 袁嘉宁. 多目标优化控制问题可行解的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 97-102. https://doi.org/10.12677/PM.2022.121013