Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 781-794
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134081

四元代数上图的顶点加权 Zeta 函数

李淑雅

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023 年 3 月 11 日；录用日期：2023 年 4 月 12 日；发布日期：2023 年 4 月 21 日

摘 要

给定一个有向图，建立了一个图上的四元数顶点加权 zeta 函数及其 Study 行列式表达式。对于顶点上有四元数权值的图，我们通过使用无限积来定义 zeta 函数，将其视为欧拉积。这是 Ihara zeta 函数在四元数上的扩展。给出新的 zeta 函数的两个 Study 行列式表达式。

关键词

Ihara Zeta 函数，Study 行列式，顶点加权

Vertex-Weighted Zeta Function of the Quaternion Algebraic Graph

Shuya Li

Faculty of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 11^{th}, 2023; accepted: Apr. 12^{th}, 2023; published: Apr. 21^{st}, 2023

Abstract

Given a directed graph, a quaternion vertex weighted zeta function on the graph and its Study determinant expression are established. For graphs with quaternion weights

文章引用: 李淑雅. 四元代数上图的顶点加权 Zeta 函数 [J]. 理论数学, 2023, 13(4): 781-794.
DOI: 10.12677/pm.2023.134081

on vertices, we define zeta functions by using infinite products as Euler products. This is an extension of the Ihara zeta function on quaternions. Two Study determinant expressions of the new zeta function are given.

Keywords

Ihara Zeta Function, Study Determinant, Vertex Weighting

1. 引言

著名的 Riemann zeta 函数是黎曼在 1859 年首次给出，在此基础上，越来越多的数学家定义各种不同的 zeta 函数。有限图的 Ihara zeta 函数最初是 Ihara 在 [1] 中在正则图上建立的。最初， Ihara 在 [1] 中给出了离散群的 zeta 函数，并证明了它的倒数是一个多项式。Ihara 也证明了 Ihara zeta 函数的对数具有生成函数形式的表达式。Sunada 在 [2] [3] 中提出了正则图 G 的 zeta 函数，该函数与 G 的基础群的酉表示相关联。Hashimoto 在 [4] 中引入了二部图的多变量 zeta 函数。对于一般图，Hashimoto 利用其边矩阵给出了 Ihara zeta 函数的行列式表达式。Bass 在 [5] 中将 Ihara 关于正则图的 Ihara zeta 函数的结果推广到不规则图上，并证明其倒数也是一个多项式。Bass 定理的各种证明已由 Stark 和 Terras 在 [6],Foata 和 Zeliberger 在 [7]，Kotani 和 Sunada 在 [8] 中给出。接下来 Hsahimoto 在 [9] 中对图 G 的边进行赋值, 把图的 zeta 函数推广到图的加权 zeta 函数。Stark 和 Terra 在 [6] 中定义了其有向边赋权的图的边 zeta 函数， 并利用其边矩阵给出了其行列式表达式。Mizuno 和 Sato 在 [10] 中引入图的边 zeta 函数的特殊版本，并通过对有向边进行加权和计算循环长度的变量 t 定义了图的加权 zeta 函数。后来称这个函数为第一个加权函数，与 Sato 在定义的另一个函数进行区分。Konno 等人在 [11] 中对无向图的顶点进行加权，通过定义图 G 的一个新的加权 Ihara zeta 函数，给出了函数的行列式表达式。

另一方面，四元数是 Hamilton 在 1843 年发现的，它可以看成复数的扩展，任何一个四元数都可以表示成：$a+bi+cj+dk$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 用 $\mathbb{H}$ 来表示四元数的集合。多年来，许多人对四元数矩阵的行列式给出了不同的定义。为了将图的 zeta 函数扩展到四元数的情况下，我们使用了 Study 在 [12] 中开发的方法, 来研究图的 Study 行列式与四元数 $zeta$ 函数之间关系是什么样的，这种方法的优点是可以将研究四元数行列式的计算转换为普通行列式的计算。它的缺点是它的行列式不是行列式不是行列式的精确延伸，而是它的平方。我们在本论文中的方法遵循 [7] [13] 中的方式。

本篇论文的目的是结合线性代数、图论以及四元数等知识，通过给图的顶点加权，将 zeta 函数的行列式表达式推广到四元数上。研究在四元数上，通过定义四元数矩阵的 Study 行列式，用一个无限积即欧拉积来定义四元数上图的顶点加权 zeta 函数。

本文的其他部分组织如下：第 2 节给出了相关定义和引理，引理 2.3 对全文的证明至关重要。第 3 节给出了之前定义的一般情况下有向图的顶点加权 zeta 函数表达式，为后面定义四元数上图的顶点加权 zeta 函数奠定基础。第 4 节在四元数的基础上，对图的 zeta 函数进行顶点加权，通过定义两个四元数矩阵，借助形式幂级数以及 Lyndon words 将 zeta 函数转化到 Study 行列式上来。

2. 预备知识

定理 2.1. (见 [14]) $\mathbb{R}$ 是一个带单位元的交换环， A 是 $\mathbb{R}$ 上的一个代数. $A[[t]]$ 中的每一个元素 α 定义如下：

$$\alpha=\sum_{k\geq 0}\alpha_k t^k,\ \alpha_k\in A.$$

定理 2.2. (见 [15]) 令 $X=\{x_1,\cdots,x_N\}$ 为一个字母表全序集， X^* 由 X 产生的自由幺半群。对于任何一个非空单词 $\omega\in X^*$, 存在唯一的非递增 *Lyndon words* 序列 $l_1,l_2,\cdots,l_r$, 使得 $\omega=l_1l_2\cdots l_r$。

引理 2.1. (见 [15]) $X=\{x_1,\cdots,x_N\}$ 为一个字母全序集， X^* 为由 X 产生的自由幺半群， L_x 为 X^* 中的 *Lyndon words* 的集合, 则：

$$\{1-(x_1+\cdots+x_N)\,t\}=\prod_{l\in L_x}^{<}\left(1-lt^{|l|}\right).$$

这里 $\prod_{l\in L_x}^{<}$ 表示这写乘数因子按照递增的顺序相乘.

引理 2.2. (见 [15]) $\boldsymbol{A}\in Mat\,(n,A)$, $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵，则：

$$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}t=\prod_{\substack{(i_1,j_1)\cdots(i_r,j_r)\in L_{[n]\times[n]}\\ j_k=i_{k+1}\,(k=1,\cdots,r)}}^{<}\left(\boldsymbol{I}_n-a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_rj_r}\boldsymbol{E}_{i_1j_r}t^r\right). \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{E}_{i_1j_r}$ 为第 i_1 行, 第 j_r 列的元素为 1， 其余元素为 0 的矩阵，

$$\prod_{\substack{(i_1,j_1)\cdots(i_r,j_r)\in L_{[n]\times[n]}\\ j_k=i_{k+1}\,(k=1,\cdots,r)}}^{<}$$

表示这写乘数因子按照递增的顺序相乘.

引理 2.3. (见 [16]) $\mathbb{H}$ 为四元数的集合, $\mathbb{H}$ 为 $\mathbb{R}$ 上不可交换的代数, 记:

$$\mathbb{H}=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\,,$$

这里 $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj, ki = j = -ik.$

对于 $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}, x^*$ 为 x 在 $\mathbb{H}$ 中的共轭. 定义:

$$x^* = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k.$$

定义 2.1. (见 [16]) 当 $z \in \mathbb{H}$ 时，z 可以表示成下面这种形式:

$$z = x + jy,\ x,\ y \in \mathbb{C}.$$

其中 $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的代数, 而不是 $\mathbb{C}$ 上的代数.

定义 2.2. (见 [15]) $Mat\,(m \times n, \mathbb{H})$ 为 $m \times n$ 的四元矩阵集合, $Mat\,(m, \mathbb{H})$ 为 $m \times m$ 的四元矩阵集合。对于 $\forall \boldsymbol{M} \in Mat\,(m \times n, \mathbb{H})$, $\boldsymbol{M}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^S + j\boldsymbol{M}^P$$

这里 $\boldsymbol{M}^S, \boldsymbol{M}^P \in Mat\,(m \times n, \mathbb{C})$.

定义 2.3. (见 [15])

$$\psi : Mat\,(m \times n, \mathbb{H}) \to Mat\,(2m \times 2n, \mathbb{C})$$

$$\boldsymbol{M} \mapsto \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}^S & -\overline{\boldsymbol{M}^P} \\ \boldsymbol{M}^P & \overline{\boldsymbol{M}^S} \end{bmatrix}$$

这里 $\overline{\boldsymbol{M}}$ 表示复矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的共轭矩阵， ψ 为 $\mathbb{R}$ 上的线性映射.

引理 2.4. (见 [15]) ψ 为 $Mat\,(m \times n, \mathbb{H})$ 到 $Mat\,(2m \times 2n, \mathbb{C})$ 的线性映射， 对于任意矩阵 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in Mat\,(m \times n, \mathbb{H})$ 则:

$$\psi\,(\boldsymbol{MN}) = \psi\,(\boldsymbol{M})\,\psi\,(\boldsymbol{N})\,.$$

引理 2.5. (见 [16]) $\boldsymbol{J}$ 是一个定义如下的 $2n \times 2n$ 的矩阵:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

则:

$$\psi\,(\boldsymbol{M}) = \left\{\boldsymbol{N} \in Mat\,\left(2n, \mathbb{C}\right) \mid \boldsymbol{JN} = \overline{\boldsymbol{N}}J\right)\right\},\ \boldsymbol{M} \in Mat\,(n, \mathbb{H})\,.$$

定义 2.4. (见 [12]) 定义:

$$Sdet(\boldsymbol{M}) = det(\psi\,(\boldsymbol{M})).$$

这里的 det 是一个普通行列式， $Sdet$ 被称作 $Study$ 行列式.

定义 2.5. (见 [15]) 令 $\psi_t\,(t) = t$， 将把 ψ 转化成从 $Mat\,(n, \mathbb{H})\,[[t]]$ 到 $Mat\,(2n, \mathbb{C})$ 的 $\mathbb{R}$ 代数单同态映射的 ψ_t. 用相同的方式把 $det : Mat\,(2n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 变成 $det_t : Mat\,(2n, \mathbb{C})\,[[t]] \to \mathbb{C}\,[[t]]$. 因此:

$$det \cdot \psi_t : Mat\,(n, \mathbb{H})\,[[t]] \to \mathbb{C}\,[[t]]$$

称 $det \cdot \psi_t$ 为 $Mat\,(n, \mathbb{H})\,[[t]]$ 的 $Study$ 行列式， 记作 $Sdet_t$.

定义 2.6. 令 $\alpha = \sum_{k\geq 0} \alpha_k t^k$，$\alpha_k \in \mathbb{H}$. 这里的 t 是一个对 $\mathbb{H}$ 可移动的量，对于任意 $h \in \mathbb{H}$, 满足 $th = ht$. 让 $\alpha_k = \alpha_k^s + j\alpha_k^p$. 则将 α 记为：

$$\alpha = \sum_{k\geq 0} \alpha_k t^k = \sum_{k\geq 0} \alpha_k^s t^k + j \sum_{k\geq 0} \alpha_k^P t^k = \alpha^S + j\alpha^P.$$

引理 2.6. (见 [15]) J 是一个定义如下的 $2n \times 2n$ 的矩阵：

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

ψ_t 为 $Mat\,(n, \mathbb{H})\,[[t]]$ 到 $Mat\,(2n, \mathbb{C})\,[[t]]$ 的 $\mathbb{R}$ 代数单同态映射，则：

$$\psi_t\left(Mat\left(n, \mathbb{H}\left[[t]\right]\right)\right) = \left\{\boldsymbol{N} \in Mat\left(2n, \mathbb{C}\left[[t]\right]\right) \mid \boldsymbol{J}\boldsymbol{N} = \overline{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{J}\right\}$$

引理 2.7. (见 [15]) 若 $\alpha = \sum_{k\geq 0} \alpha_k t^k \in \mathbb{H}\,[[t]]$, 则 $\alpha = \alpha^S + j\alpha^P$, 其中 $\alpha^S, \alpha^P \in \mathbb{C}\,[[t]]$ α^* 为 α 在 $\mathbb{H}$ 中的共轭, 则有 $\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha = \alpha^s\bar{\alpha^s} + \alpha^p\bar{\alpha^p} \in \mathbb{C}\,[[t]]$。

引理 2.8. (见 [17]) 如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 是相同阶数的复数空间矩阵且 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$，则：

$$det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = det\,(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB})$$

.

引理 2.9. (见 [15]) (1) 矩阵 $\boldsymbol{M} \in Mat\,(n, \mathbb{H}\,[[t]])$, 则 $Sdet_t\,(\boldsymbol{M}) \in \mathbb{R}\,[[t]]$,

(2) 当 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in Mat\,(n, \mathbb{H}\,[[t]])$ 时, $Sdet_t\,(\boldsymbol{MN}) = Sdet_t\,(\boldsymbol{M})\,Sdet_t\,(\boldsymbol{N})$,

(3) 如果 $\boldsymbol{M} \in Mat\,(n, \mathbb{H}\,[[t]])$, 且 $\boldsymbol{M}$ 是上三角矩阵，或者下三角矩阵：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

这时 $Sdet_t\,(\boldsymbol{M}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_i^*$,

(4) 若 $\boldsymbol{A} \in Mat\,(m \times n, \mathbb{H}\,[[t]])$, $B \in Mat\,(n \times m, \mathbb{H}\,[[t]])$, 则：

$$Sdet_t\,(\boldsymbol{I}_{2m} - \boldsymbol{AB}) = Sdet_t\,(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})$$

3. 有向图的顶点加权 zeta 函数

$G = (V\,(G)\,, E\,(G))$ 为一个有向图， $V\,(G)$ 为图的顶点集合, $E\,(G)$ 为图的无向边集合. 我们假设图 G 既没有重边又没有环. $D\,(G) = \{(u, v)\,, (v, u) \mid uv \in E\,(G)\}$ 为有向边的集合. 对于边

$e = (u, v) \in D(G)$, 我们称 $o(e) = u$ 为边 e 的起点， $t(e) = v$ 为边 e 的终点. 边 $e = (u, v) \in D(G)$ 的逆我们用 $e^{-1} = (v, u)$ 来表示. 图 G 的一条长度为 t 的路径用序列 $P = (e_1, ..., e_t)$ 表示， 其中 $e_i \in D(G)$, $t(e_i) = o(e_{i+1})$. 这里 $i \in \{1, ..., t-1\}$. $|P|$ 表示路径 P 的长度. 对于 $i \in \{1, ..., t-1\}$, 如果有 $e_{i+1} = e_i^{-1}$， 则称路径 P 有返回 (*backtracing*). 如果 $t(P) = o(P)$, 则称路径 P 为圈或者闭路径. 如果存在 k, 使圈 $C_1 = (e_1, ..., e_l)$ 和圈 $C_2 = (f_1, ..., f_l)$ 满足 $f_j = e_{j+k}$, 这里 $j \in \{1, ..., l\}$, 则称圈 C_1 和圈 C_2 被称为等价的. 圈 C 的所有等价类记作 $[C]$. 圈 B^r 是指圈 B 循环 r 次. 如果圈 C 和 C^2 都没有返回， 则这个圈 C 称作可约 (*reduced*) 的. 若对于任意 r 和圈 D, 都有 $C \neq D^r$， 则称圈 C 是素的 (*prime*).

图 G 的 $Ihara\ zeta$ 函数是一个关于充分小的复数 t 的函数, 定义如下：

$$\mathbf{Z}(G, t) = \mathbf{Z}_G(t) = \prod_{[C]} \left(1 - t^{|C|}\right)^{-1}. \tag{3.1}$$

这里 $[C]$ 遍历图 G 的所有素可约等价类.

$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ef})\, e, f \in D(G)$ 和 $\mathbf{J}_0 = (J_{ef})\, e, f \in D(G)$ 是定义如下的 $2m \times 2m$ 矩阵:

$$\mathbf{B}_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{其它.} \end{cases} \quad \mathbf{J}_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } f = e^{-1}, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

矩阵 $\mathbf{B} - \mathbf{J}_0$ 被称为图 G 的边矩阵.

定理 3.1. (见 [4] [5]) *图 G 为 n 个顶点, m 个边的连通图, 则图 G 的 $Ihara\ zeta$ 函数的倒数的表达式为：*

$$\boldsymbol{Z}(G, u)^{-1} = det\left(\boldsymbol{I}_{2m} - u\left(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}_0\right)\right) = \left(1 - u^2\right)^{m-n} det\left(\boldsymbol{I}_n - u\boldsymbol{A}(G) + u^2\left(\boldsymbol{D}_G - \boldsymbol{I}_n\right)\right),$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 表示图 G 的邻接矩阵, $\boldsymbol{D}_G = (d_{ii})$ 表示图 G 的度矩阵, 这里 $d_{ii} = deg_G\ v_i$. $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$.

G 是一个连通图, 接下来我们考虑图 G 的加权矩阵 $\mathbf{W}(G)$. 我们让 $\omega : V(G) \to \mathbb{C}$, 让 $\mathbf{W}_{n\times n} = (\omega_{uv})_{u,v\in V(G)}$ 为一个对角矩阵， 这里：

$$\omega_{uv} = \begin{cases} \omega(u) & \text{如果 } u = v; \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$\mathbf{W}$ 被称为图 G 的加权矩阵.

两个 $2m \times 2m$ 矩阵 $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}(G) = (\mathbf{B}_{e,f})_{e,f\in D(G)}$ 和 $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}(G) = (\mathbf{J}_{e,f})_{e,f\in J(G)}$ 定义如下：

$$\mathbf{B}_{e,f} = \begin{cases} \omega(t(e))^2 & \text{如果 } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{其它,} \end{cases} \quad \mathbf{J}_{e,f} = \begin{cases} \omega(t(e))^2 & \text{如果 } f = e^{-1}, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

对于路径 $P = (e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_d})$, $\omega(P) = \omega(t(e_{i_1}))^2\, \omega(t(e_{i_2}))^2 \cdots \omega(t(e_{i_d}))^2$. 则顶点加权 zeta 函数

被定义为：

$$\mathbf{Z}(G,w,t)=\prod_{[C]}\left(1-\omega(C)t^{|C|}\right)^{-1}. \tag{3.2}$$

Mizuno 和 Sato 在 [10] 中将函数 $\tilde{\mathbf{B}}$ 运用到函数表达式得到一个新的顶点加权 zeta 函数：

$$\zeta_\omega(G,u)=det\left(\mathbf{I}_{2m}-u\left(\widetilde{\mathbf{B}}-\widetilde{\mathbf{J}}\right)\right)^{-1}.$$

4. 四元数上图的顶点加权 zeta 函数

接下来，我们在四元数上讨论图的顶点加权 zeta 函数，我们把 $\omega(e)$ 的值扩充到四元数上，我们让 $\omega: V(G)\to\mathbb{H}$. 对于路径 $P=(e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_d}),\omega(P)=\omega(t(e_{i_1}))^2\omega(t(e_{i_2}))^2\cdots\omega(t(e_{i_d}))^2$. 让 $\mathbf{W}_{n\times n}=(\omega_{uv})_{u,v\in V(G)}$ 为一个对角矩阵， 称它为图的顶点加权矩阵， 这里：

$$\omega_{uv}=\begin{cases}\omega(v)^2 & \text{如果 } (u,v)\in D(G);\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

我们称 $\omega(v)$ 为四元数上的权重, 这里 $v\in V(G)$, $\mathbf{W}$ 被称为图 G 在四元数上的顶点加权矩阵. 接下来我们定义图 G 四元数上顶点加权的 zeta 函数:

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,t)=\prod_{C}\left\{\left(1-\omega(C)t^{|C|}\right)\left(1-\omega(C)t^{|C|}\right)^*\right\}^{-1}. \tag{4.1}$$

这里 $C=(e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_r})$ 遍历所有的素可约圈, 其中 $i_1i_2...i_r\in L_{[2m]}$.

注 4.1. (1) 因为 $i_1i_2...i_r\in L_{[2m]}$, 所以圈 $C=(e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_r})$ 是素的是可以保证的.

(2) $\omega(C)\in\mathbb{H}$, 所以 $1-\omega(C)t^{|C|}\in\mathbb{H}[[t]]$， 由引理 *3.5* 知，$\left(1-\omega(C)t^{|C|}\right)\left(1-\omega(C)t^{|C|}\right)^*\in\mathbb{C}[[t]]$.

(3)

$$\begin{aligned}\left(1-\omega(C)t^{|C|}\right)\left(1-\omega(C)t^{|C|}\right)^* &=1+\omega(C)\omega(C)^*t^{2|C|}-\omega(C)t^{|C|}-\omega(C)^*t^{|C|}\\ &=1+|\omega(C)|^2t^{2|C|}-2Re(\omega(C))t^{|C|}.\end{aligned}$$

所以我们有：

$$\boldsymbol{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,t)=\prod_{C}\left\{1+|\omega(C)|^2t^{2|C|}-2Re(\omega(C))t^{|C|}\right\}^{-1}. \tag{4.2}$$

接下来我们考虑在四元数上图的顶点加权矩阵 $\mathbf{W}$， 我们定义两个四元数 $2m\times 2m$ 矩阵 $\mathbf{B}_\omega=\left(\mathbf{B}_{ef}^{(\omega)}\right)_{e,f\in D(G)}$ 和 $\mathbf{J}_\omega=\left(\mathbf{J}_{ef}^{(\omega)}\right)_{e,f\in D(G)}$.

$$\mathbf{B}_{(w)}^{ef}=\begin{cases}\omega(t(e))^2 & t(e)=o(f)\\ 0 & t(e)\neq o(f),\end{cases}\quad \mathbf{J}_{(w)}^{ef}=\begin{cases}\omega(t(e))^2 & f=e^{-1}\\ 0 & f\neq e^{-1}.\end{cases}$$

我们利用 $\mathbf{B}_\omega = \left(\mathbf{B}_{ef}^{(\omega)}\right)_{e,f\in D(G)}$ 和 $\mathbf{J}_\omega = \left(\mathbf{J}_{ef}^{(\omega)}\right)_{e,f\in D(G)}$ 的矩阵来表示四元数上图的顶点加权 zeta 函数.

定理 4.1. 令 G 是连通图， 则四元数上图 G 顶点加权的 *zeta* 函数的倒数可以表示为：

$$\boldsymbol{Z}_{\mathbb{H}}(G,W,t)^{-1} = Sdet_t\left(\boldsymbol{I}_{2m} - (\boldsymbol{B}_\omega - \boldsymbol{J}_\omega)\, t\right)$$

Proof. 由引理 2.2 可知，

$$\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{A}t = \prod^{<}_{\substack{(i_1,j_1)\dots(i_r,j_r)\in L_{[2m]\times[2m]}\\ j_k = i_{k+1}\,(k=1,\dots,r-1)}} \left(\mathbf{I}_{2m} - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_rj_r}E_{i_1j_r}t^r\right)$$

$$\begin{aligned} Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{A}t\right) =& Sdet_t\left(\prod^{<}_{\substack{(i_1,j_1)\dots(i_r,j_r)\in L_{[2m]\times[2m]}\\ j_k = i_{k+1}\,(k=1,\dots,r-1)}} \left(\mathbf{I}_{2m} - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_rj_r}E_{i_1j_r}t^r\right)\right) \\ =& \prod_{\substack{(i_1,j_1)\dots(i_r,j_r)\in L_{[2m]\times[2m]}\\ j_k = i_{k+1}\,(k=1,\dots,r-1)}} Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m} - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_rj_r}E_{i_1j_r}t^r\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

最后一个等式不需要顺序，由引理 3.7 (1) 知任意 $\mathbf{M}\in Mat\left(n,\mathbb{H}\left[[t]\right]\right)$, $Sdet_t\left(M\right)\in\mathbb{R}\left[[t]\right]$，不在乎顺序.

如果 $j_r = i_1$， 则矩阵 $\mathbf{I}_{2m} - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}\mathbf{E}_{i_1i_1}t^r$ 为对角矩阵, 是一个除了第 r 行元素为 $1 - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}t^r$, 其余元素全为 1 的对角矩阵. 由引理 2.9 (3) 知：

$$\begin{aligned} & Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m} - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}E_{i_1i_1}t^r\right) \\ &= \left(1 - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}t^r\right)\left(1 - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}t^r\right)^*. \end{aligned} \tag{4.4}$$

如果 $j_r \neq i_1$, 则矩阵 $\mathbf{I}_{2m} - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_rj_r}\mathbf{E}_{i_1j_r}t^r$ 为对角线元素全为 1，第 i_1 行，第 j_r 列元素为 $1 - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}t^r$, 由引理 2.9 (3) 知:

$$Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m} - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_rj_r}\mathbf{E}_{i_1j_r}t^r\right) = 1.$$

综上所说：

$$\begin{aligned} & Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{A}t\right) \\ &= \prod_{(i_1,i_2)\dots(i_r,i_1)\in L_{[2m]\times[2m]}} \left(1 - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}t^r\right)\left(1 - a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_ri_1}t^r\right)^* \end{aligned} \tag{4.5}$$

这里让 $\mathbf{A}=\mathbf{B}_\omega-\mathbf{J}_\omega$, 则：

$$a_{ij}=a_{e_ie_j}=\begin{cases}\omega\left(t\left(e_i\right)\right)^2 & \text{如果 } t\left(e_i\right)=o\left(e_j\right),\ e_j\neq e_i^{-1}\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

则带入 (4.5) 得：

$$\begin{aligned}&Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m}-\mathbf{A}t\right)=Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m}-\left(\mathbf{B}_\omega-\mathbf{J}_\omega\right)t\right)\\ &=\prod_{\substack{(i_1,j_1)\ldots(i_r,j_r)\in L_{[2m]\times[2m]}\\ (e_{i_1},e_{i_2},\ldots e_{i_r}:\,reduced\ cycle)}}\left(1-\omega\left(t\left(e_{i_1}\right)\right)^2\ldots\omega\left(t\left(e_{i_r}\right)\right)^2t^r\right)\left(1-\omega\left(t\left(e_{i_1}\right)\right)^2\ldots\omega\left(t\left(e_{i_r}\right)\right)^2t^r\right)^*\\ &=\prod_{\substack{i_1i_2\ldots i_r\in L_{[2m\ ]}\\ (e_{i_1},e_{i_2},\ldots e_{i_r}:\,reduced\ cycle)}}\left(1-\omega\left(t\left(e_{i_1}\right)\right)^2\ldots\omega\left(t\left(e_{i_r}\right)\right)^2t^r\right)\left(1-\omega\left(t\left(e_{i_1}\right)\right)^2\ldots\omega\left(t\left(e_{i_r}\right)\right)^2t^r\right)^*.\end{aligned} \tag{4.6}$$

这里我们要注意因为当 $j_r\neq i_1$ 时， $Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m}-a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\ldots a_{i_{r-1}i_r}a_{i_rj_r}\mathbf{E}_{i_1j_r}t^r\right)=1$， 所以当我们在计算 $Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m}-\left(\mathbf{B}_\omega-\mathbf{J}_\omega\right)t\right)$ 可忽略当 $j_r\neq i_1$ 的情况. 当 $j_r=i_1$ 时，$(e_{i_1},e_{i_2},\ldots e_{i_r})$ 构成一个圈，如果圈有返回，即存在 $i,j\in\{1,2,\cdots r\}$, 使得 $t\left(e_i\right)=o\left(e_j\right)$， 且 $e_j=e_i^{-1}$. 由 $B_\omega-J_\omega$ 的定义知 $a_{ij}=a_{e_ie_j}=0$， 所以圈有返回的这种情况也可以不考虑. 又因为 $(i_r,j_r)\in L_{[2m]\times[2m]}$, 由 Lyndon words 具有本原性，即若 $\omega\in L$， ω 在它的共轭类中最小. 所以圈的平方也不含返回，所以我们只需要考虑可约圈.

由 $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}\left(G,\omega,t\right)$ 的定义， 我们可以得到 $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}\left(G,W,t\right)^{-1}=Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m}-\left(\mathbf{B}_\omega-\mathbf{J}_\omega\right)t\right)$. □

接下来我们定义 $\tilde{\mathbf{W}}=\left(\tilde{\mathbf{W}}_{uv}\right)_{u,v\in V(G)}$ 和 $\tilde{\mathbf{D}}=\left(\tilde{\mathbf{D}}_{uv}\right)_{u,v\in V(G)}$:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{uv}=\begin{cases}\left(1-\omega\left(v\right)^2\omega\left(u\right)^2t^2\right)^{-1}\omega\left(v\right)^2 & \text{如果 } (u,v)\in D\left(G\right)\\ 0 & \text{其它,}\end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{uv}=\begin{cases}\sum_{o(e)=u}\left(1-\omega\left(t\left(e\right)\right)^2\omega\left(u\right)^2t^2\right)^{-1}\omega\left(t\left(e\right)\right)^2\omega\left(u\right)^2 & \text{如果 } u=v\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

引理 4.1. $\boldsymbol{X}(e)$ 为 2×2 矩阵定义为：

$$\boldsymbol{X}\left(e\right)=\begin{pmatrix}1 & \omega\left(t\left(e\right)\right)^2t\\ \omega\left(o\left(e\right)\right)^2t & 1\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{X}(e)$ 的逆为：

$$\boldsymbol{X}(e)^{-1}=\begin{pmatrix} \left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1} & -\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(t(e))^2t \\ -\left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(o(e))^2t & \left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Proof. 设

$$\mathbf{Y}(e)=\begin{pmatrix} \left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1} & -\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(t(e))^2t \\ -\left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(o(e))^2t & \left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

容易验证 $\mathbf{Y}(e)\mathbf{X}(e)=I_2$, 接下来证明 $\mathbf{X}(e)\mathbf{Y}(e)=\mathbf{I}_2$. 当 $\omega(t(e))=0$, 容易验证 $\mathbf{X}(e)\mathbf{Y}(e)=\mathbf{I}_2$. 当 $\omega(o(e))=0$, 容易验证 $\mathbf{X}(e)\mathbf{Y}(e)=\mathbf{I}_2$.

当 $\omega(t(e))$ 和 $\omega(o(e))=0$ 都不为 0 时，

$$\begin{aligned}\left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(o(e))^2t=&t\left\{\omega(o(e))^{-2}\left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)\right\}^{-1}\\ =&t\left\{\omega(o(e))^{-2}-\omega(t(e))^2t^2\right\}^{-1}\\ =&t\left\{\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)\omega(o(e))^{-2}\right\}^{-1}\\ =&\omega(o(e))^2t\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1}.\end{aligned}$$

同理， 我们也能得到

$$\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(t(e))^2t=\omega(t(e))^2t\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1}.$$

因此：

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}(e)\mathbf{Y}(e)=\begin{bmatrix}1 & \omega(t(e))^2t\\ \omega(o(e))^2 & 1\end{bmatrix}\\ &\times\begin{bmatrix} \left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1} & -\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(t(e))^2t \\ -\left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1}\omega(o(e))^2t & \left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1} \end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix}1 & \omega(t(e))^2t\\ \omega(o(e))^2 & 1\end{bmatrix}\\ &\times\begin{bmatrix} \left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1} & -\omega(t(e))^2t\left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1} \\ -\omega(o(e))^2t\left(1-\omega(t(e))^2\omega(o(e))^2t^2\right)^{-1} & \left(1-\omega(o(e))^2\omega(t(e))^2t^2\right)^{-1} \end{bmatrix}\\ =&\mathbf{I}_2.\end{aligned}$$

□

定理 4.2. G 是连通图，则四元数上图 G 的顶点加权的 $zeta$ 函数的倒数可以表示为：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Z}_{\mathbb{H}}(G,\omega,t)^{-1}\\&=Sdet_t\left(\boldsymbol{I}_n-t\tilde{\boldsymbol{W}}+t^2\tilde{\boldsymbol{D}}\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)^*.\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}&Sdet_t(\mathbf{I}_{2m}-(\mathbf{B}_\omega-\mathbf{J}_\omega)t)\\&=Sdet_t(\mathbf{I}_{2m}-t\,\mathbf{B}_\omega+t\,\mathbf{J}_\omega)\\&=Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m}-t\,\mathbf{B}_\omega(\mathbf{I}_{2m}+t\,\mathbf{J}_\omega)^{-1}\right)\times Sdet_t(\mathbf{I}_{2m}+t\,\mathbf{J}_\omega).\end{aligned}\tag{4.7}$$

定义两个 $2m\times n$ 的矩阵 $\mathbf{S}=(\mathbf{S}_{ev})_{e\in D(G),v\in V(G)}$ 和 $\mathbf{T}=(\mathbf{T}_{ev})_{e\in D(G),v\in V(G)}$ 如下：

$$\mathbf{S}_{ev}=\begin{cases}\omega(v)^2 & \text{如果 } t(e)=v\\ 0 & \text{其它},\end{cases}\quad \mathbf{T}_{ev}=\begin{cases}1 & \text{如果 } o(e)=v\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

我们能得到 $\mathbf{S}\,\mathbf{T}^T=\mathbf{B}_\omega$. 由引理 2.9 (4) 知：$Sdet_t(\mathbf{I}_m-\mathbf{A}\,\mathbf{B})=Sdet_t(\mathbf{I}_n-\mathbf{B}\,\mathbf{A})$, 将上式应用到 (4.7):

$$\begin{aligned}&Sdet_t(\mathbf{I}_{2m}-(\mathbf{B}_\omega-\mathbf{J}_\omega)t)\\&=Sdet_t\left(\mathbf{I}_{2m}-t\mathbf{S}\,\mathbf{T}^T(\mathbf{I}_{2m}+t\,\mathbf{J}_\omega)^{-1}\right)\times Sdet_t(\mathbf{I}_{2m}+t\,\mathbf{J}_\omega)\\&=Sdet_t\left(\mathbf{I}_n-t\,\mathbf{T}^T(\mathbf{I}_{2m}+t\,\mathbf{J}_\omega)^{-1}\mathbf{S}\right)\times Sdet_t(\mathbf{I}_{2m}+t\,\mathbf{J}_\omega).\end{aligned}$$

我们让 $D(G)=\{e_1,e_1^{-1},...,e_m,e_m^{-1}\}$, 由引理 2.9 (3) 可得：

$$\begin{aligned}&Sdet_t(\mathbf{I}_{2m}+t\,\mathbf{J}_\omega)\\&=Sdet_t\begin{bmatrix}1&\omega(t(e_1))^2t&0&0&\cdots\\\omega(o(e_1))^2t&1&0&0&\cdots\\0&0&1&\omega(t(e_2))^2t&\cdots\\0&0&\omega(o(e_2))^2t&1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&0&\ddots\end{bmatrix}\\&=Sdet_t\begin{bmatrix}1&\omega(t(e_1))^2t&0&0&\cdots\\0&1-\omega(t(e_1))^2\omega(o(e_1))^2t^2&0&0&\cdots\\0&0&1&\omega(t(e_2))^2t&\cdots\\0&0&0&1-\omega(t(e_2))^2\omega(o(e_2))^2t^2&0\\\vdots&\vdots&\vdots&0&\ddots\end{bmatrix}\\&=\prod_{i=1}^{m}\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)^*.\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.134081

由 $\mathbf{X}(e)$ 的定义，可得：

$$\mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(e_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{X}(e_2) & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{X}(e_m)\end{bmatrix},$$

$$(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(e_1)^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{X}(e_2)^{-1} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{X}(e_m)^{-1}\end{bmatrix}.$$

接下来考虑 $\mathbf{T}^T(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}\ \mathbf{S}$.

如果 $e=(u,v)\in D(G)$, 由之前对这些矩阵的定义， 若使下式有意义， 即 $f=f'$ 我们可以得到：

$$\begin{aligned}\left(\ \mathbf{T}^T(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}\ \mathbf{S}\right)_{uv}&=\sum_{f,f'\in D(G)}(\ \mathbf{T}^T)_{uf}(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}_{ff'}\ \mathbf{S}_{f'v}\\&=\left(1-\omega(v)^2\omega(u)^2t^2\right)^{-1}\omega(v)^2.\end{aligned}$$

如果 $u=v$ 时, 由之前对这些矩阵的定义，若使下式有意义， 即 $f^{-1}=f'$ 我们可以得到

$$\begin{aligned}\left(\ \mathbf{T}^T(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}\ \mathbf{S}\right)_{uu}&=\sum_{f,f'\in D(G)}(\ \mathbf{T}^T)_{uf}(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}_{ff'}\ \mathbf{S}_{f'u}\\&=\sum_{o(e)=u}(\ \mathbf{T}^T)_{ue}(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}_{ee^{-1}}\ \mathbf{S}_{e^{-1}u}\\&=-\sum_{o(e)=u}\left(1-\omega(t(e))^2\omega(u)^2t^2\right)^{-1}\omega(t(e))^2\omega(u)^2t.\end{aligned}$$

如果 $u\neq v$, 且 $u\ v$ 构不成一条边, 满足 $o(u)=f$, $t(v)=f'$, f 与 f' 既不互逆， 也不相等, 则 $(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})_{ff'}=0$.

因此 $\mathbf{T}^T(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}\ \mathbf{S}=\ \tilde{\mathbf{W}}-t\ \tilde{\mathbf{D}}$. 所以：

$$\begin{aligned}&Sdet_t(\ \mathbf{I}_{2m}-t(\ \mathbf{B}_{\omega}-\ \mathbf{J}_{\omega}))\\&=Sdet_t\left(\ \mathbf{I}_{2m}-t\ \mathbf{T}^T(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})^{-1}\ \mathbf{S}\right)\times Sdet_t(\ \mathbf{I}_{2m}+t\ \mathbf{J}_{\omega})\\&=Sdet_t\left(\ \mathbf{I}_n-t\ \tilde{\mathbf{W}}+t^2\ \tilde{\mathbf{D}}\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)^*.\end{aligned}$$

□

5. 例子

考虑 4 个顶点，4 条边，8 条有向边的有向图 G, 令 G 的顶点是 x_1, x_2, x_3, x_4, 且 ω 是图 G 的四元数上的顶点加权，$\omega(x_i) = \omega_i, i = 1, 2, 3, 4$. 则有：

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & \left(1-\omega_2^2\omega_1^2t^2\right)^{-1}\omega_2^2 & 0 & \left(1-\omega_4^2\omega_1^2t^2\right)^{-1}\omega_4^2 \\ \left(1-\omega_1^2\omega_2^2t^2\right)^{-1}\omega_1^2 & 0 & \left(1-\omega_3^2\omega_2^2t^2\right)^{-1}\omega_3^2 & 0 \\ 0 & \left(1-\omega_2^2\omega_3^2t^2\right)^{-1}\omega_2^2 & 0 & \left(1-\omega_4^2\omega_3^2t^2\right)^{-1}\omega_4^2 \\ \left(1-\omega_1^2\omega_4^2t^2\right)^{-1}\omega_1^2 & 0 & \left(1-\omega_3^2\omega_4^2t^2\right)^{-1}\omega_3^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{D}}$ 为对角元素依次为 $\left(1-\omega_2^2\omega_1^2\right)^{-1}\omega_2^2\omega_1^2 + \left(1-\omega_4^2\omega_1^2\right)^{-1}\omega_4^2\omega_1^2$，
$\left(1-\omega_3^2\omega_2^2\right)^{-1}\omega_3^2\omega_2^2 + \left(1-\omega_1^2\omega_2^2\right)^{-1}\omega_1^2\omega_2^2$,
$\left(1-\omega_4^2\omega_3^2\right)^{-1}\omega_4^2\omega_3^2 + \left(1-\omega_2^2\omega_3^2\right)^{-1}\omega_2^2\omega_3^2$ $\left(1-\omega_1^2\omega_4^2\right)^{-1}\omega_1^2\omega_4^2 + \left(1-\omega_3^2\omega_4^2\right)^{-1}\omega_3^2\omega_4^2$, 其余元素为 0 的 4×4 矩阵. 则由定理 4.2 得：

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,\omega,t)^{-1} \\ &= Sdet_t\left(\mathbf{I}_n - t\tilde{\mathbf{W}} + t^2\tilde{\mathbf{D}}\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)\left(1-\omega(t(e_i))^2\omega(o(e_i))^2t^2\right)^* \\ &= \left\{\left(1-t^2\omega_1^2\omega_4^2\right)\left(1-t^2\omega_1^2\omega_4^2\right)^*\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

参考文献

[1] Ihara, Y. (1966) On Discrete Subgroups of the Two Projective Linear Group over p-Adic Fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **18**, 219-235. https://doi.org/10.2969/jmsj/01830219

[2] Sunada, T. (1986) L-Functions in Geometry and Some Applications. In: Shiohama, K., Sakai, T. and Sunada, T., Eds., *Curvature and Topology of Riemannian Manifolds. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1201, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 266-284. https://doi.org/10.1007/BFb0075662

[3] Sunada, T. (1996) Fundamental Groups and Laplacians. *Mathematical Society of Japan. Sūgaku (Mathematics)*, **39**, 193-203.

[4] Hashimoto, K. (1989) Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p-Adic Groups. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **15**, 211-280. https://doi.org/10.2969/aspm/01510211

[5] Bass, H. (1992) The Ihara-Selberg Zeta Function of a Tree Lattice. *International Journal of Mathematics*, **3**, 717-797. https://doi.org/10.1142/S0129167X92000357

[6] Stark, H.M. and Terras, A.A. (1996) Zeta Functions of Finite Graphs and Coverings. *Advances in Mathematics*, **121**, 124-165. https://doi.org/10.1006/aima.1996.0050

[7] Foata, D. and Zeliberger, D. (1999) A Combinatorial Proof of Bass's Evaluations of the Ihara-Selberg Zeta Function for Graphs. *Transactions of the AMS*, **351**, 2257-2274. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02234-5

[8] Kotani, M. and Sunada, T. (1996) Zeta Functions of Finite Graphs and Coverings. *Advances in Mathematics*, **121**, 124-165. https://doi.org/10.1006/aima.1996.0050

[9] Hashimoto, K. (1990) On Zeta and L-Functions of Finite Graphs. *International Journal of Mathematics*, **1**, 381-396. https://doi.org/10.1142/S0129167X90000204

[10] Mizuno, H. and Sato, I. (2004) Weighted Zeta Functions of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **91**, 169-183. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.003

[11] Konno, N., Mitsuhashi, H., Morit, A.H., *et al.* (2019) A New Weighted Ihara Zeta Function for a Graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **571**, 154-179. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.02.022

[12] Study, E. (1920) Zur theorie der lineare gleichungen. *Acta Mathematica*, **42**, 1-61. https://doi.org/10.1007/BF02404401

[13] Reutenauer, C. and Schutzenberger, M.P. (1987) A Formula for the Determinant of a Sum of Matrices. *Letters in Mathematical Physics*, **13**, 299-302. https://doi.org/10.1007/BF00401158

[14] Berstel, J. and Retutenauer, C. (2011) Noncommutative Rational Series with Applications. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760860

[15] Konno, N., Mitsuhashi, H. and Sato, I. (2016) The Quaternionic Weighted Zeta Function of a Graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **44**, 729-755. https://doi.org/10.1007/s10801-016-0686-6

[16] Aslaksen, H. (1996) Quaternionic Determinants. *The Mathematical Intelligencer*, **18**, 57-65. https://doi.org/10.1007/BF03024312

[17] Zhang, F. (2011) Matrix Theory. 2nd Edition, Springer, New York.