Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 80-87
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121011

极大交换子在分层Lie群中的有界性

常娇娇

牡丹江师范学院数学系，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2021年12月6日；录用日期：2022年1月11日；发布日期：2022年1月18日

摘　要

本文借助于Orlicz空间的相关理论与工具，在分层Lie群 $\mathbb{G}$ 中考虑了由Lipschitz函数和Hardy-Littlewood极大算子生成的交换子 M_b 和 $[b,M]$ 的有界性。

关键词

极大函数，交换子，Lipschitz函数，Orlicz空间，分层Lie群

Boundedness of Maximal Commutators on Stratified Lie Groups

Jiaojiao Chang

Department of Mathematics, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Dec. 6th, 2021; accepted: Jan. 11th, 2022; published: Jan. 18th, 2022

Abstract

In this paper, the authors consider the boundedness of commutators M_b and $[b,M]$ generated by Lipschitz function and Hardy-Littlewood maximal operator on stratified Lie groups $\mathbb{G}$ with the help of relevant theories and tools of Orlicz space.

Keywords

Maximal Function, Commutator, Lipschitz Function, Orlicz Space, Stratified Lie Group

文章引用: 常娇娇. 极大交换子在分层 Lie 群中的有界性[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 80-87.
DOI: 10.12677/pm.2022.121011

1. 引言

交换子估计在调和分析和偏微分方程的许多应用中起着重要的作用，见[1] [2] [3] [4]。设 T 为经典奇异积分，由 T 生成的交换子 $[b,T]$ 可定义为

$$[b,T](f)(x)=b(x)T(f)(x)-T(bf)(x). \tag{1}$$

1976 年，Coifman，Rochberg 和 Weiss [1]给出了 BMO 空间的一种等价刻画，证明了当 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 时，交换子 $[b,T]$ 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1<p<\infty$ 有界性。1978 年，Janson [5]利用交换子 $[b,T]$ 对 Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 进行了一些描述，证明了 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 的充要条件是交换子 $[b,T]$ 从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 有界，其中 $0<\beta<1$，$1<p<\frac{n}{\beta}$，$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}$ (同见[6])。

设 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{G})$，定义极大算子 M 为

$$M(f)(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{G}$ 中包含 x 的所有球 B。$|B|$ 表示球 B 的 Haar 测度。

对于局部可积函数 b，定义 M 和 b 生成的交换子 M_b 为

$$M_b(f)(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{G}$ 中包含 x 的所有球 B。令 b 属于适当的函数，定义 M 和 b 生成的交换子 $[b,M]$ 为

$$[b,M](f)(x)=b(x)M(f)(x)-M(bf)(x).$$

不难注意到交换子 M_b 和 $[b,M]$ 有本质的不同，其中 M_b 是正次线性的，而 $[b,M]$ 既不是正的也不是次线性的。

交换子 M_b 和 $[b,M]$ 已经被许多学者研究过，例如见[7] [8] [9] [10] [11]等。2000 年 Bastero [8]等人证明了 Hardy-Littlewood 极大算子的交换子 $[b,M]$ 的 L^p 有界性。2017 年张[10]通过 Hardy-Littlewood 极大交换子 M_b 在 Lebesgue 空间和 Morrey 空间中的有界性刻画了 Lipschitz 函数空间；同时借助极大算子的交换子 $[b,M]$ 在 Lebesgue 空间和 Morrey 空间中的有界性，刻画了当 $b\geq 0$ 时的 Lipschitz 空间。

受[10]的启发，本文在分层 Lie 群中考虑 Orlicz 空间中一些类似的结果，研究当 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$ 时，交换子 M_b 和 $[b,M]$ 的有界性。

在本文中，对任意的 $x\in\mathbb{G}$，和所有的 $r>0$，令 $B(x,r)$ 是以 x 为中心 r 为半径的球，记 $B=B(x,r)$，$\lambda B=B(x,\lambda r)$。字母 C 表示一个与主要参数无关的正常数，但在不同的位置可以不同。用 $A\lesssim B$ 表示 $A\leq CB$；若 $A\lesssim B$ 且 $B\lesssim A$，则记为 $A\approx B$，表示 A 与 B 等价。

2. 预备知识

下面介绍分层 Lie 群的相关记号和概念，更详细的信息参见[4] [12] [13]。

设 $\mathbb{G}$ 是一个有限维，连通且单连通 Lie 群，$\mathcal{G}$ 是它的李代数。如果 $X,Y\in\mathcal{G}$，那么它们的李括号积

$[X,Y]=XY-YX\in\mathcal{G}$ 将被称为一阶换位运算。令 $\mathcal{G}$ 是有限维分层幂零 Lie 代数，即存在向量空间分解的直和

$$\mathcal{G}=V_1\oplus\cdots\oplus V_m, \tag{2}$$

其中 $V_j\,(2\le j\le m)$ 中的每个元素都是 V_1 元素的 $(j-1)$ 阶 Lie 积。同样的(2)式是一个分层，当 $i+j\le m$ 时，$[V_i,V_j]=V_{i+j}$；否则，$[V_i,V_j]=0$。设 $X=\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是 V_1 的基，V_j 中的 X_{ij} 是由长度为 j 的换位运算组成的，$1\le i\le k_j$。令 $X_{i1}=X_i, i=1,\cdots,n$ 且 $k_1=n$，则称 X_{i1} 是长度为 1 的 Lie 积。如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是 V_1 的基，那么假设 $\|X_j\|=1, j=1,\cdots,n$。

若 $\mathbb{G}$ 是与 $\mathcal{G}$ 相关的单连通 Lie 群，则指数映射是一个从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathbb{G}$ 的整体微分同胚。因此对于每个 $g\in\mathbb{G}$，有 $x=(x_{ij})\in\mathbb{R}^N$，$1\le i\le k_j$，$1\le j\le m$，$N=\sum_{j=1}^{m}k_j$，使得 $g=\exp\left(\sum x_{ij}X_{ij}\right)$。在 $\mathbb{G}$ 上的齐次范数函数 $|\cdot|$ 可由定义得 $|g|=\left(\sum|x_{ij}|^{2\cdot m!/j}\right)^{1/(2\cdot m!)}$，而 $Q=\sum_{j=1}^{m}jk_j$ 是 $\mathbb{G}$ 上的齐次维数，因此 $d(\delta_r x)=r^Q dx, r>0$。$\delta_r$ 在 $\mathbb{G}$ 上的扩张被定义为

$$\delta_r(g)=\exp\left(\sum r^j x_{ij}X_{ij}\right), g=\exp\left(\sum x_{ij}X_{ij}\right).$$

由于 $\mathbb{G}$ 是幂零的，指数映射是 $\mathbb{G}$ 到 $\mathbb{G}$ 的微分同构，它将 $\mathbb{G}$ 上的 Lebesgue 测度取为 $\mathbb{G}$ 上的双不变 Haar 测度 dx。将群 $\mathbb{G}$ 的恒等式称为原点，用 e 表示。

群 $\mathbb{G}$ 上的齐次范数是一个从 $\mathbb{G}$ 到 $[0,\infty)$ 的连续函数 $x\to\rho(x)$，它在 $\mathbb{G}\setminus\{0\}$ 上是 C^∞，满足

$$\begin{cases}\rho(x^{-1})=\rho(x)\\ \rho(\delta_t x)=t\rho(x) \qquad \forall x\in\mathbb{G}, t>0.\\ \rho(e)=0\end{cases}$$

在[13]中表明，$\mathbb{G}$ 上至少存在一个齐次范数，而 $\mathbb{G}$ 上的任意两个齐次范数都是等价的。由此确定了 $\mathbb{G}$ 上的齐次范数，它满足三角不等式：对 $\forall x,y\in\mathbb{G}$，存在一个常数 $c_0\ge 1$，使得 $\rho(xy)\le c_0(\rho(x)+\rho(y))$ (见[14])。利用这个范数定义了以 x 为中心，r 为半径的球为 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{G}:\rho(y^{-1}x)<r\}$，用 $B_r=B(e,r)=\{y\in\mathbb{G}:\rho(y)<r\}$ 表示以 $\mathbb{G}$ 的恒等元素 e 为中心，r 为半径的开球，${}^{\complement}B(x,r)=\mathbb{G}\setminus B(x,r)$ 表示球 $B(x,r)$ 的补。易知存在 $c_1=c_1(\mathbb{G})$，使得

$$|B(x,r)|=c_1 r^Q \qquad x\in\mathbb{G}, r>0.$$

因此 $\mathbb{G}$ 满足体积加倍条件，即存在一个常数 C，对任意的 $x\in\mathbb{G}$ 和 $r>0$，有

$$|B(x,2r)|\le C|B(x,r)|.$$

分层 Lie 群中最基本的偏微分算子是与 X 相关的拉普拉斯算子 $\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 给出的 $\mathbb{G}$ 上的二阶偏微分算子。

为了说明结果，给出如下一些定义。

定义 2.1 [15] 若函数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是凸的，左连续的，且满足 $\lim_{r\to+0}\Phi(r)=\Phi(0)=0$ 和 $\lim_{x\to\infty}\Phi(r)=\infty$，则称函数 Φ 为 Young 函数。

用 $\mathcal{Y}$ 表示 Young 函数集，即

$$0<\Phi(r)<\infty, 0<r<\infty .$$

对于 Young 函数 Φ 和 $0\le s\le\infty$，设 $\Phi^{-1}(s)=\inf\{r\ge 0:\Phi(r)>s\}$，如果 $\Phi\in\mathcal{Y}$，那么 Φ^{-1} 是 Φ 的反函数。

已知

$$r\le\Phi^{-1}(r)\tilde{\Phi}^{-1}(r)\le 2r \quad r\ge 0\text{，} \tag{3}$$

其中 $\tilde{\Phi}(r)$ 被定义为

$$\tilde{\Phi}(r)=\begin{cases}\sup\{rs-\Phi(s):s\in[0,\infty)\}, r\in[0,\infty)\\ \infty, & r=\infty\end{cases}.$$

对任意的 $r\ge 0$，存在常数 $C>1$，使得

$$\Phi(r)\le\frac{1}{2C}\Phi(Cr)$$

成立，则称 Young 函数 Φ 满足 ∇_2-条件，用 $\Phi\in\nabla_2$ 表示。

根据文[16]下面给出 Lie 群上的 Orlicz 空间和弱 Orlicz 空间的定义。

定义 2.2 对于 Young 函数 Φ，集合

$$L^{\Phi}(\mathbb{G})=\left\{f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G}):\int_{\mathbb{G}}\Phi(k|f(x)|)\mathrm{d}x<\infty, k>0\right\},$$

和

$$WL^{\Phi}(\mathbb{G})=\left\{f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G}):\sup_{t>0}\Phi(t)m(t,kf)<\infty, k>0\right\}.$$

被称为 Lie 群上的 Orlicz 空间和弱 Orlicz 空间。对于所有的球 $B\subset\mathbb{G}$，使得 $f\chi_B\in L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 成立，则称空间 $L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{G})$ 为所有函数 f 的集合。

Orlicz 空间 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 是 Banach 空间，范数为

$$\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{G}}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}x\le 1\right\},$$

$$\|f\|_{WL^{\Phi}(\mathbb{G})}=\inf\left\{\lambda>0:\sup_{t>0}\Phi(t)m\left(\frac{f}{\lambda},t\right)\le 1\right\}.$$

如果 $\Phi(r)=r^p, 1\le p<\infty$，则 $L^{\Phi}(\mathbb{G})=L^p(\mathbb{G})$。如果 $\Phi(r)=0, 0\le r\le 1$，且 $\Phi(r)=\infty, r>1$，则 $L^{\Phi}(\mathbb{G})=L^{\infty}(\mathbb{G})$。

文中所需要的最主要的例子是 $\Phi(t)=t(1+\log^+ t)$，并且由 $\tilde{\Phi}(t)\approx\exp t$ 给出 Young 函数的补。

定义 2.3 **[17]**设 $0<\beta<1$，令 b 属于 $\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$ 空间，用 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$ 表示，若存在一个常数 $C>0$，对任意的 $x,y\in\mathbb{G}$，有

$$|b(x)-b(y)|\le C\rho(x,y)^{\beta}\text{，}$$

则最小的这个常数 C 称为 b 的 $\dot{\Lambda}_\beta$ 范数，用 $\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}$ 表示。

为了证明定理 3.1 和定理 3.2，需要以下引理。

引理 2.1 [18]设 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 是一个可测集合，函数 f 和 g 在 Ω 上可测，对于 Young 函数 Φ 及其补函数 $\tilde{\Phi}$，以下不等式成立

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le 2\|f\|_{L^\Phi(\Omega)}\|g\|_{L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)}.$$

引理 2.2 设 Φ 是 Young 函数，D 是 $\mathbb{G}$ 中具有有限 Haar 测度的集合，有

$$\|\chi_D\|_{L^\Phi(\mathbb{G})} = \|\chi_D\|_{WL^\Phi(\mathbb{G})} = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|D|^{-1}\right)}.$$

证明 已知 D 是 $\mathbb{G}$ 中具有有限 Haar 测度的集合，因此有

$$\begin{aligned}\|\chi_D\|_{L^\Phi(\mathbb{G})} &= \inf\left\{\lambda>0:\int_D \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{d}x \le 1\right\}\\ &= \inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{\lambda}\le \Phi^{-1}\left(|D|^{-1}\right)\right\}\\ &= \inf\left\{\lambda>0:\lambda \ge \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|D|^{-1}\right)}\right\},\\ &= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|D|^{-1}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\chi_D\|_{WL^\Phi(\mathbb{G})} &= \inf\left\{\lambda>0:\sup_{t>0}\Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right)\left|\left\{x\in\mathbb{G}:|\chi_D(x)|>t\right\}\right|\le 1\right\}\\ &= \inf\left\{\lambda>0:\sup_{0<t<1}\Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right)\left|\left\{x\in\mathbb{G}:|\chi_D(x)|>t\right\}\right|\le 1\right\}\\ &= \inf\left\{\lambda>0:\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\le |D|^{-1}\right\}.\\ &= \inf\left\{\lambda>0:\lambda\ge \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|D|^{-1}\right)}\right\}\\ &= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|D|^{-1}\right)}\end{aligned}$$

由引理 2.1，引理 2.2 和(3)式，可以得到以下估计。

引理 2.3 设 Φ 是 Young 函数，对任意的球 B，有

$$\int_B |f(y)|\mathrm{d}y \le 2|B|\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)\|f\|_{L^\Phi(B)}$$

成立。

引理 2.4 [19]设 Φ 是一个 Young 函数，

1) 算子 M 从 $L^\Phi(\mathbb{G})$ 到 $WL^\Phi(\mathbb{G})$ 有界，即

$$\|Mf\|_{WL^\Phi(\mathbb{G})} \le C_0\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{G})},$$

其中常数 C_0 与 f 无关。

2) 算子 M 在 $L^\Phi(\mathbb{G})$ 上有界，即存在不依赖于 f 的常数 C_0，使得

$$\|Mf\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})} \le C_0 \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}$$

成立，当且仅当 $\Phi \in \nabla_2$。

3. 定理及其证明

定理 3.1 令 $0<\beta<1$，且 $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G})$，若 Φ,Ψ 是 Young 函数且 $\Phi \in \mathcal{Y} \cap \nabla_2$，对所有的 $r>0$，存在不依赖于 r 的 $C>0$，使得

$$r^{\beta}\Phi^{-1}\left(r^{-Q}\right) \le C\Psi^{-1}\left(r^{-Q}\right), \tag{4}$$

则当 $b \in \dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})$ 时，有 M_b 从 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 到 $L^{\Psi}(\mathbb{G})$ 有界。

证明 由 $b \in \dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})$，可得

$$\begin{aligned} M_b f(x) &= \sup_{B\ni x} |B|^{-1} \int_B |b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y \\ &\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})} \sup_{B\ni x} |B|^{-1+\frac{\beta}{Q}} \int_B |f(y)|\mathrm{d}y \\ &= C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})} M_{\beta} f(x) \end{aligned} \tag{5}$$

下面证明 M_{β} 从 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 到 $L^{\Psi}(\mathbb{G})$ 有界。对任意的 $x \in \mathbb{G}$，和所有的 $r>0$，设 $B=B(x,r)$。令 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1(y)=f(y)\chi_{2c_0B}(y), f_2(y)=f(y)\chi_{\complement(2c_0B)}(y), c_0 \ge 1$，则有

$$M_{\beta} f(x) \le M_{\beta} f_1(x) + M_{\beta} f_2(x).$$

设 y 为 B 中任意一点，若 $B(y,t)\cap^{\complement}\left(B(x,2c_0r)\right) \ne \varnothing$，则 $t>r$。事实上，若 $z \in B(y,t)\cap^{\complement}\left(B(x,2c_0r)\right)$，则

$$t > \rho\left(y^{-1}z\right) \ge \frac{1}{c_0}\rho\left(x^{-1}z\right) - \rho\left(x^{-1}y\right) > 2r - r = r.$$

另一方面，$B(y,t)\cap^{\complement}\left(B(x,2c_0r)\right) \subset B(x,2c_0t)$。实际上，若 $z \in B(y,t)\cap^{\complement}\left(B(x,2c_0r)\right)$，则

$$\rho\left(x^{-1}z\right) \le c_0\rho\left(y^{-1}z\right) + c_0\rho\left(x^{-1}y\right) < c_0t + c_0r < 2c_0t.$$

于是，由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned} M_{\beta} f_2(y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|^{1-\frac{\beta}{Q}}} \int_{B(y,t)} \left| f(z)\chi_{\complement(2c_0B)}(z) \right| \mathrm{d}z \\ &\le C \sup_{t>r} \frac{1}{|B(x,2c_0t)|^{1-\frac{\beta}{Q}}} \int_{B(x,2c_0t)} |f(z)|\mathrm{d}z \\ &= C \sup_{t>2c_0r} \frac{1}{|B(x,2c_0t)|^{1-\frac{\beta}{Q}}} \int_{B(x,t)} |f(z)|\mathrm{d}z \\ &\le C\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})} \sup_{r<t<\infty} t^{\beta}\Phi^{-1}\left(|B(x,t)|^{-1}\right) \end{aligned}. \tag{6}$$

由 Hedberg’s 的技巧(见[20])和(6)式，可得

$$M_{\beta} f(y) \le C\left(r^{\beta}Mf(y) + \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})} \sup_{r<t<\infty} t^{\beta}\Phi^{-1}\left(t^{-Q}\right)\right).$$

因此由(4)式得

$$\left|M_{\beta}f(x)\right| \le C\left(Mf(x)\frac{\Psi^{-1}\left(r^{-Q}\right)}{\Phi^{-1}\left(r^{-Q}\right)}+\|f\|_{L^{\Phi}}\Psi^{-1}\left(r^{-Q}\right)\right).$$

取 $r>0$，令 $\Phi^{-1}\left(r^{-Q}\right)=\dfrac{Mf(x)}{C_0\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}}$，其中 C_0 与引理 2.4 中一致，则有

$$\frac{\Psi^{-1}\left(r^{-Q}\right)}{\Phi^{-1}\left(r^{-Q}\right)}=\frac{\left(\Psi^{-1}\circ\Phi\right)\left(\dfrac{Mf(x)}{C_0\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}}\right)}{\dfrac{Mf(x)}{C_0\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}}},$$

可得

$$\left|M_{\beta}f(x)\right| \le C_1\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}\left(\Psi^{-1}\circ\Phi\right)\left(\frac{Mf(x)}{C_0\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}}\right).$$

由于 $\Phi\in\nabla_2$，根据引理 2.4(2)有

$$\int_B\Psi\left(\frac{\left|M_{\beta}f(x)\right|}{C_1\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}}\right)\mathrm{d}x\le\int_B\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}}\right)\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{G}}\Phi\left(\frac{Mf(x)}{\|Mf\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}}\right)\mathrm{d}x\le 1,$$

即

$$\left\|M_{\beta}f\right\|_{L^{\Psi}(B)}\le C\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})} \tag{7}$$

在(7)式中取遍 B 的上确界可得

$$\left\|M_{\beta}f\right\|_{L^{\Psi}(\mathbb{G})}\le C\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}. \tag{8}$$

从而 M_{β} 从 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 到 $L^{\Psi}(\mathbb{G})$ 有界。故结合(5)式和(8)式定理得证。

定理 3.2 令 $0<\beta<1$，且 $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$，若 Φ 和 Ψ 是 Young 函数且 $\Phi\in\mathcal{Y}\cap\nabla_2$，对所有的 $r>0$，存在不依赖于 r 的 $C>0$，使得

$$\Psi^{-1}\left(r^{-Q}\right)\approx r^{\beta}\Phi^{-1}\left(r^{-Q}\right),$$

则当 $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{G})$ 且 $b\ge 0$ 时，有 $[b,M]$ 从 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 到 $L^{\Psi}(\mathbb{G})$ 有界。

证明 设 b 是非负局部可积函数，对任意的 $x\in\mathbb{G}$，由[10]中定理 1.4 的证明思想，可得点态估计

$$\begin{aligned}\left|[b,M]f(x)\right|&=\left|b(x)Mf(x)-M(bf)(x)\right|\\&=\left|\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B b(x)\left|f(y)\right|\mathrm{d}y-\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B b(y)\left|f(y)\right|\mathrm{d}y\right|\\&\le\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B\left|b(x)-b(y)\right|\left|f(y)\right|\mathrm{d}y\\&=M_b(f)(x)\end{aligned}. \tag{9}$$

又因为 $\Psi^{-1}\left(r^{-Q}\right)\approx r^{\beta}\Phi^{-1}\left(r^{-Q}\right)$，所以 $r^{\beta}\Phi^{-1}\left(r^{-Q}\right)\le C\Psi^{-1}\left(r^{-Q}\right)$，且 Young 函数 Φ 和 Ψ，又满足

$\Phi\in\mathcal{Y}\cap\nabla_2$，则对任意 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$，由定理 3.1 和(9)式可得当 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$ 时，$[b,M]$ 从 $L^\Phi(\mathbb{G})$ 到 $L^\Psi(\mathbb{G})$ 有界。

基金项目

省属高校基本科研业务费备案项目(No. 2019-KYYWF-0909, 1355ZD010, 1354MSYTD006)；
中央财政支持地方高校发展专项资金优秀青年项目(2020YQ07)。

参考文献

[1] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. *Annals of Mathematics*, **103**, 611-635. https://doi.org/10.2307/1970954

[2] Grafakos, L. (2009) Modern Fourier Analysis. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09434-2

[3] Segovia, C. and Torrea, J.L. (1991) Weighted Inequalities for Commutators of Fractional and Singular Integrals. *Publicacions Matematiques*, **35**, 209-235. https://doi.org/10.5565/PUBLMAT_35191_09

[4] Stein, E.M. (1993) Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400883929

[5] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[6] Paluszyński, M. (1995) Characterization of the Besov Spaces via the Commutator Operator of Coifman, Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-17. https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976

[7] Agcayazi, M., Gogatishvili, A., Koca, K., *et al*. (2015) A Note on Maximal Commutators and Commutators of Maximal Functions. J*ournal of the Mathematical Society of Japan*, **67**, 581-593. https://doi.org/10.2969/jmsj/06720581

[8] Bastero, J., Milman, M. and Ruiz, F. (2000) Commutators for the Maximal and Sharp Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **128**, 3329-3334. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05763-4

[9] García-Cuerva, J., Harboure, E., Segovia, C., *et al*. (1991) Weighted Norm Inequalities for Commutators of Strongly Singular Integrals. *Indiana University Mathematics Journal*, **40**, 1397-1420. https://doi.org/10.1512/iumj.1991.40.40063

[10] Zhang, P. (2017) Characterization of Lipschitz Spaces via Commutators of the Hardy-Littlewood Maximal Function. *Comptes Rendus Mathematique*, **355**, 336-344. https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.01.022

[11] Zhang, P. and Wu, J. (2014) Commutators of the Fractional Maximal Function on Variable Exponent Lebesgue Spaces. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **64**, 183-197. https://doi.org/10.1007/s10587-014-0093-x

[12] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E. and Uguzzoni, F. (2007) Stratified Lie Groups and Potential Theory for Their Sub-Laplacians. Springer-Verlag, Berlin.

[13] Folland, G.B. and Stein, E.M. (2020) Hardy Spaces on Homogeneous Groups (MN-28), Volume 28. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.2307/j.ctv17db3q0

[14] Hu, G. (2019) Littlewood-Paley Characterization of Hölder-Zygmund Spaces on Stratified Lie Groups. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **69**, 131-159. https://doi.org/10.21136/CMJ.2018.0197-17

[15] Zhang, P., Wu, J. and Sun, J. (2018) Commutators of Some Maximal Functions with Lipschitz Function on Orlicz Spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15**, 1-13. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1263-0

[16] Deringoz, F., Dorak, K. and Guliyev, V.S. (2021) Characterization of the Boundedness of Fractional Maximal Operator and Its Commutators in Orlicz and Generalized Orlicz-Morrey Spaces on Spaces of Homogeneous Type. *Analysis and Mathematical Physics*, **11**, 1-30. https://doi.org/10.1007/s13324-021-00497-1

[17] Fan, D. and Xu, Z. (1995) Characterization of Lipschitz Spaces on Compact Lie Groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **58**, 200-209. https://doi.org/10.1017/S1446788700038234

[18] Rao, M.M. and Ren, Z.D. (1991) Theory of Orlicz Spaces. Marcel Dekker, New York.

[19] Krbec, M. (1991) Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces. World Scientific, Singapore.

[20] Hedberg, L.I. (1972) On Certain Convolution Inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **36**, 505-510. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1972-0312232-4