Quantum Mathematical Analysis (I)

Guofa Lin

Fujian Minnan Construction Engineering Limited company, Quanzhou
Email: 904507805@qq.com

Received: Jun. 23th, 2019, published: Jun.26th, 2019

Abstract

Academician Wenjun Wu said that non-standard analysis is the real standard analysis. Quantum mathematical analysis is a non-standard analysis, which is different from the non-standard analysis proposed by German mathematician Abraham Robinson and others. In quantum mathematical analysis, infinitesimals and infinitesimals are expressed in the form of numbers, and can be used to calculate four operations in the mathematical world of many singularities. All the calculus formulas involved in them are derived from another definition. The continuous functions in three-dimensional space are both continuous and discrete, and space-time is smooth and discrete at the same time. Quantum mathematical analysis consists of several parts. Quantum mathematical analysis (I) mainly talks about its basic structure.

Keywords

Infinite Circular Integer, Micro-World, Macro-World, Dimension, Space-Time Entanglement

量子数学分析(I)

林国发

福建省闽南建筑工程有限公司，泉州
Email: 904507805@qq.com

收稿日期：2019年6月23日；发布日期：2019年6月26日

摘　要

吴文俊院士说过非标准分析才是真正标准的分析**[1]**，量子数学分析是一种非标准分析，它有别于德国数学家亚伯拉罕・鲁滨逊等人提出的非标准分析。在量子数学分析里无穷大和无穷小都以数的形式表现出来，并利用它们可以对多种奇点内的数学世界进行四则运算等计算，它里面涉及到的微积分公式全部以另一种定义导出来，它三维空间的连续函数同时具有连续性和离散性，时空同时具有光滑性和离散性。

*脚注。

量子数学分析由几部分组成，量子数学分析(I)主要讲的是它的基础构造。

关键词

无限循环整数，微观世界，宏观世界，维度，时空纠缠

1. 引言

本文集与集的初等运算、函数、映射、函数的图像和集合的公理理论基础详见卓里奇数学分析[2]。

时空直角坐标系的定义：由时间和空间构成的维度时空里建立的直角坐标系称为时空直角坐标系。如：在四维时空(三维空间 ＋ 时间)里建立的时空直角坐标系称为四维时空直角坐标系；在五维时空(四维空间 ＋ 时间)里建立的时空直角坐标系称为五维时空直角坐标系等。

规定：$TKS=$ 时空数集；$KS=$ 空数集；$NS=$ 内数集；$YS=$ 原数集；$WS=$ 外数集；$YWS=$ 原外数集。

规定： $0\in TKS;0\in KS;0\in NS;0\in YS;0\in WS;0\in YWS$ 。

x 是 TKS 的元素，由下面的内容我们会得到：

$$TKS=\left\{x\middle|x=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5,x_1\in KS,x_2\in NS,x_3\in WS,x_4\in YS,x_5\in YWS\right\}$$

x 是实数集 R 的元素，由下面的内容我们会得到：

$$R=\left\{x\middle|x=x_1+x_2+x_3,x_1\in KS,x_2\in NS,x_3\in WS\right\}$$

2. 时空数集的定义

定义 1：满足以下四组条件的集 TKS 叫时空数集，它的元素叫时空数，这些条件叫时空数的公理：

2.1. 加法公理

确定了一个映射(加法运算)$+TKS\times TKS\to TKS$，使得对于 TKS 中任意二元 x，y 之序对(x,y)，有某元 $x+y\in TKS$ 与之对应，称 $x+y$ 为 x，y 之和，同时此映射满足一下条件：

① 有中性元 0 存在(叫做加法零元)，使对任何的 $x\in TKS$ ， $x+0=0+x=x$ 。

② 每个元 $x\in TKS$ 有元 $-x\in TKS$ ，叫做 x 的负元，使得 $x+(-x)=(-x)+x=0$ 。

③ 运算 ＋ 是结合的，即 TKS 中任何 x，y，z 满足条件 $x+(y+z)=(x+y)+z$ 。

④ 运算 ＋ 是交换的，即 TKS 中的任何 x，y 满足 $x+y=y+x$ 。

2.2. 乘法公理

确定了一个映射(乘法运算)$\cdot:TKS\times TKS\to TKS$，使得对于 TKS 中任意二元 x,y 之序对(x,y)，有某元 $x\cdot y\in TKS$ 与之对应，称 $x\cdot y$ 为 x 与 y 之积。

① 存在中性元$1\in TKS\setminus 0$ (乘法的中性元叫单位元)使得 $\forall x\in TKS\setminus 0$， $x\cdot 1=1\cdot x=x$ 。

② 每个元 $x\in TKS\setminus 0$ 有元 $x^{-1}\in TKS\setminus 0$，叫做 x 的逆元，满足 $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$ 。

③ 运算 • 是结合的，即任何 $x,y,z\in TKS\setminus 0$ 满足 $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ 。

④ 运算 • 是交换的，即任何 $x,y\in TKS\setminus 0$ 满足 $x\cdot y=y\cdot x$ 。

2.3. 加法与乘法的关联

乘法对加法有分配性，即 $\forall x,y,z\in TKS$ ， $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ 。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

2.4. 序公理

TKS 的元素间有关系 $\le$，即 TKS 的两个元素 x 与 y，或满足 $x \le y$，或不满足。同时应满足以下条件：

① $\forall x \in TKS\left(x \le x\right)$；

② $\left(x \le y\right) \wedge \left(y \le x\right) \Leftarrow \left(x = y\right)$

③ $\left(x \le y\right) \wedge \left(y \le z\right) \Leftarrow \left(x \le z\right)$；

④ $\forall x \in TKS, \forall y \in TKS\left(x \le y\right) \vee \left(y \le x\right)$。

TKS 中的关系 $\le$ 叫做不等关系。

2.5. *TKS* 中的序关系与加法的联系

如果 x, y 是 TKS 的元素，那么，$\left(0 \le x\right) \wedge \left(0 \le y\right) \Rightarrow \left(0 \le x \cdot y\right)$。

2.6. 完备(连续)公理

如果 X 与 Y 是 TKS 的非空子集，且具有性质：对于任何 $x \in X, y \in Y$，有 $x \le y$，那么 $c \in TKS$，使对任何 $x \in X, y \in Y$ 有 $x \le c \le y$。

满足上述公理的任何集合 TKS，都可以被认为是时空数集的具体实现，或通常所说的时空数模型。

对于任何抽象公理系统，至少有两个问题：

第一，这组公理是否相容，即是否存在着满足列出的所有条件的集合，这是公理系统的无矛盾性问题。

第二，这组公理所确定的数学对象是否是唯一的，即这组公理在逻辑上是否完备的。在这里，对唯一性必须作如下理解。比如 A 和 B 两人彼此独立地建立了满足公理的数系模型 TKS_A 和 TKS_B，那么集合 TKS_A 与 TKS_B 间可以建立双射 $f: TKS_A \to TKS_B$，它保持算术运算的序关系，即 $f\left(x+y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right)$，$f\left(x \cdot y\right) = f\left(x\right) \cdot f\left(y\right)$，$x \le y \Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(y\right)$。

这时，从数学的观点来看，TKS_A 与 TKS_B 只是时空数的不同的(完全平等的)实现(模型)(例如 TKS_A 是无穷十进小数，而 TKS_B 是数轴上的点)。这些实现叫做同构实现，而映射 f 则叫做同构。这样，数学研究的结果，就不只适用于个别的实现，而且对所给公理的同构实现的类中每个模型都是适用的。

2.7. 完备公理与数集的上(下)确界的存在性

定义 1：设 $X \subset TKS$ 是一个集合；如果存在一数 $c \in TKS$，使一切 $x \in X$ 都满足 $x \le c\left(c \le x\right)$，就说集合 X 是上(下)有界集。这时，数 c 就叫做 X 的一个上(下)界。

定义 2：既有上界又有下界的集合叫做有界集。

定义 3：元素 $a \in X$ 叫做 $X \subset TKS$ 的最大元或极大元(最小元或极小元)，如果对于一切 $x \in X$ 有 $x \le a$ (或 $a \le x$)。

现在引进极大元与极小元定义的表示法，导出它们的形式写法：

$$\left(a = \max X\right) := \left(a \in X \wedge \forall x \in X\left(x \le a\right)\right), \left(a = \min X\right) := \left(a \in X \wedge \forall x \in X\left(a \le x\right)\right).$$

$\max X$ 读作“X 的极大元”，$\min X$ 读作“X 的极小元”；我们也用 $\max\limits_{x \in X} x$ 和 $\min\limits_{x \in X} x$ 来表示 X 的极大元和极小元。

由序公理 1 得知：如一个数集有极大(极小)元，那么它只能有一个。

但是，并非在任何情况，甚至在有界集的情况下，都一定有极大元(极小元)。

例如，集 $X = \left\{x \in TKS \middle| 0 \le X < 1\right\}$ 有极小元，但没有极大元。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

定义 4：集合 $X \subset TKS$ 的上界中的最小者，叫做 X 的上确界，写作 $\sup X$ 或 $\sup\limits_{x\in X} x$ 。

于是： $s=\sup X := \forall x\in X\left(\left(x\le s\right)\wedge\left(\forall s'<s,\exists x'\in X\left(s'<x'\right)\right)\right)$

对于集合 X 的下确界，同记号 $\inf X$ 一样也可以用记号 $\inf\limits_{x\in X} x$ 于是，我们已经给出了下面的两个定义：

$\sup X := \min\left\{c\in TKS\middle|\forall x\in X\left(x\le c\right)\right\}$， $\inf X := \max\left\{c\in TKS\middle|\forall x\in X\left(c\le x\right)\right\}$ 。

上述采用的数集的上、下确界的定义须要下面引理来证实。

引理(上确界原理) 时空数集的任何非空有上界的子集有唯一的上确界。

前面我们已经知道了数集最小元的唯一性，所以只要证明上确界存在就行。

设 $X\subset TKS$ 是给定的子集， $Y=\left\{y\in TKS\middle|\forall x\in X\left(x\le y\right)\right\}$

是 X 的上界构成的集合，由题设 $X\ne\phi, Y\ne\phi$ ，这时根据完备公理，存在数 $c\in TKS$ ，使得 $\forall x\in X,\forall y\in Y\left(x\le c\le y\right)$，因此数 c 是 Y 中的元素，而作为 Y 的下界，c 是 Y 的极小元，于是 $c=\min Y=\sup X$ 。

同理可证下有界的数集有唯一的下确界。引理(X 下有界)$\Rightarrow$($\exists\inf X$)

现在来看集 $X=\left\{x\in TKS\middle|0\le x<1\right\}$，由所证的引理，它应有上确界，据集 X 的定义及上确界之定义，显然 $\sup X\le 1$ 。

为了证明 $\sup X=1$，必须验证对任何数 $q<1$，能找到数 $x\in X$ 使得 $q<x$，简单地说就是 q 与 1 之间还有数，证明这一点当然很容易，下节中，我们将对这类问题逐步而详细地予以讨论。

至于下确界，则当集合有极小元时，它的下确界必与集合的极小元一致，把刚才的这以判断用到我们的例子里，就得到 $\inf X=0$ 。

归纳集：如果对于集合 $X\subset TKS$ 的每个数 $x\in X$ ，同时有 $x+1\in X$ ，就称 X 为一个归纳集。

例如，TKS 是归纳集，所有正数之集也是归纳集。

任意多个归纳集 X_a 之交 $\bigcap\limits_{a\in A} X_a$ ，如果不空，也是归纳集。

实际上 $\left(x\in X=\bigcap\limits_{a\in A}X_a\right)\Rightarrow\left(\forall a\in A\left(x\in X_a\right)\right)\Rightarrow\left(\forall a\in A\left(\left(x+1\right)\in X_a\right)\right)\Rightarrow\left(\left(x+1\right)\in\bigcap\limits_{a\in A}X_a=X\right)$

3. 空数定义及空数运算

3.1. 三维空间端线的定义

这里的三维空间端线跟我们中学学过的直线的不同点在于三维空间端线左右两边分别有一个端点，端线的左端点对应的数设为-a_1，右端点对应的数设为 a_1， $a_1>0$，且三维空间的端线由相同的基本单元 kt 构成，把这个基本单元 kt 称为 kt 量子，每个 kt 量子都对应着一个不相同的数 x，x 从左往右排列，满足 $x_n<x_{n+1}$，把这些不相同的数称为空数，KS 代表空数集。

3.2. 三维空间平面的定义

这里的三维空间平面跟我们中学学过的平面的不同点在于三维空间平面是一个正方形，且三维空间的平面由相同的基本单元 kt^2 构成，把这个基本单元 kt^2 称为 kt^2 量子。

3.3. 三维空间平面直角坐标系的定义

这里的三维空间平面直角坐标系跟我们中学学过的平面直角坐标系的不同点在于平面直角坐标系里的两条直线分别对应的数轴 x 轴和 y 轴换成了两条三维空间的端线分别对应的 x 轴和 y 轴，原点坐标还是(0,0)。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

3.4. 三维空间的定义

这里的三维空间跟我们中学学过的三维空间的不同点在于这里的三维空间是一个立方体，且三维空间由相同的基本单元 kt^3 构成，把这个基本单元 kt^3 称为 kt^3 量子。

3.5. 三维空间直角坐标系的定义

这里的三维空间直角坐标系跟我们中学学过的空间直角坐标系的不同点在于空间直角坐标系里的三条直线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴换成了三条三维空间的端线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，原点坐标还是(0,0,0)。

3.6. 三维空间自然数集的定义

形如 1，1 + 1，(1 + 1) + 1，等等的数，相应的记作 1，2，3 等等，且这些数都是空数集里的元素，把这些数叫做三维空间自然数。三维空间自然数集用 N^K 表示，它的元素叫三维空间自然数。

3.7. 三维空间整数集的定义

三维空间自然数集、三维空间自然数集的相反数之集与零的并集，叫做三维空间整数集，记住 Z^K 。

3.8. 三维空间端线上 *kt* 量子对应数排列的定义

① 无尽小数的定义：形状如 $\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_n\cdots$

这样的表示被称为无尽小数，这里的 $a_0 \in Z_+$，而 $a_1a_2a_3a_4\cdots a_n\cdots$ 中的每一个都是 $0,1,2,\cdots,9$ 这些数字之一。形状如 $+a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_n\cdots$ 的无尽小数简单地写为 $a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_n\cdots$，约定如 $\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_m0000\cdots$ 这样的无尽小数可以写成 $\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_m$，并可称为有尽小数。[3]约定如 $\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_m1111\cdots$ 这样的无尽小数称为无限循环小数。约定当 $a_1a_2a_3a_4\cdots a_n\cdots$ 无尽不循环时，把 $\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_n\cdots$ 称为无限不循环小数。约定：由于有尽小数表示成 $\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_m0000\cdots$，把有尽小数也归为无限循环小数。

② 三维空间有限循环小数和有限不循环小数等的定义：

约定：在三维空间端线上的任意一个小数在任何时候都有相等的小数位数 A，且 $a_1 = 10^A, 10^A \in Z_+$，把这个整数集里的 10^A 称为三维空间端线上的正整数奇点，把 $-a_1 = -10^A$ 称为三维空间端线上的负整数奇点。

10^A 是一个常数，这个常数到底有多大，我们不需要具体知道，只需要知道如它远远大于 10 的一亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿次方等，10^A 是一个非常庞大的常数，它是三维空间的一个整数奇点。

约定：任意一个无限不循环小数和无限循环小数，在三维空间所能达到的最低小数位数是 10^A 分位，把这些截止在 10^A 分位上的无限不循环小数称为三维空间的有限不循环小数，把这些截止在 10^A 分位上的无限循环小数称为三维空间的有限循环小数。把三维空间的有限不循环小数和有限循环小数统称为三维空间的有限小数，三维空间的有限小数表示成 $\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$，$a_0 \in Z^K$，而 $a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$ 中的每一个都是 $0,1,2,\cdots,9$ 这些数字之一。

三维空间有限循环小数如：$153.141414\cdots14$ 简写成 $153.\dot{1}\dot{4}14$，$153.\dot{1}\dot{4}14$ 表示个位上的数字为 3，十位上的数字为 5，百位上的数字为 1，十分位上的数字为 1，百分位上的数字为 4，千分位上的数字为 1，万分位上的数字为 4，...，10^{A-1} 分位上的数字为 1，10^A 分位上的数字为 4；$0.999\cdots9$ 简写成 $0.\dot{9}9$；$0.888\cdots8$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

简写成$0.\dot{8}8$；$0.111\cdots1$简写成$0.\dot{1}1$。

因为：$0.999\cdots9-0.888\cdots8=0.111\cdots1$成立，所以$0.\dot{9}9-0.\dot{8}8=0.\dot{1}1$成立。

三维空间有限不循环小数如：当无限不循环小数$\pi-3=0.141592\cdots$的小数分位截止在10^A分位上的时候，得到$0.141592\cdots a_A$，a_A为$0,1,2,\cdots,9$这些数字之一，$0.141592\cdots a_A$为有限不循环小数。

③ 三维空间有限循环整数和有限不循环整数的定义：

由于三维空间有限循环小数表示成$\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$，$a_0\in Z^K$，而$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$中的每一个都是$0,1,2,\cdots,9$这些数字之一，约定把它的$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$称为三维空间有限循环整数。三维空间有限循环整数如：$000\cdots0123$简写成123；$256999\cdots9$简写成$256\dot{9}$；$999\cdots9$简写成$\dot{9}$；$888\cdots8$简写成$\dot{8}$；$111\cdots1$简写成$\dot{1}$；因为：$999\cdots9-888\cdots8=111\cdots1$成立，得到等式$\dot{9}-\dot{8}=\dot{1}$成立。

由于三维空间有限不循环小数表示成$\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$，$a_0\in Z^K$，而$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$中的每一个都是$0,1,2,\cdots,9$这些数字之一，约定把它的$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$称为三维空间有限不循环整数。三维空间有限不循环整数如：有限不循环小数$0.141592\cdots a_A$的$141592\cdots a_A$就是三维空间有限不循环整数。

约定：三维空间有限循环整数和有限不循环整数统称为三维空间有限整数。

约定：如$-\dot{0}1$表示为三维空间的一个有限循环整数，简写成-1。

④ 三维空间整数的极大元与极小元

由三维空间有限循环小数和有限不循环小数等的定义可知：三维空间整数的极大元是10^A-1，极小元是$-\left(10^A-1\right)$。

由于三维空间有限循环整数可表示为$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$，当$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$中的每一个都是9数字的时候，得到$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A=\dot{9}9$，由于三维空间有限循环小数可表示为$\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$，$a_0\in Z^K$，当$a_0=0$，$a_1a_2a_3a_4\cdots a_A$中的每一个都是9数字的时候，得到$\pm a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_A=0.\dot{9}9$。

我们知道$\frac{9}{0.9}$，$\frac{99}{0.99}$，$\frac{999}{0.999}$，$\frac{9999}{0.9999}$，…，$\frac{9+9\times10^1+9\times10^2+\cdots+9\times10^n}{9\times10^{-1}+9\times10^{-2}+9\times10^{-3}+\cdots+9\times10^{-(n+1)}}$（$n\in N_+$）对任意的$n$我们都会得到

$$\begin{aligned}&\frac{9+9\times10^1+9\times10^2+\cdots+9\times10^n}{9\times10^{-1}+9\times10^{-2}+9\times10^{-3}+\cdots+9\times10^{-(n+1)}}-\left(9+9\times10^1+9\times10^2+\cdots+9\times10^n\right)\\&=10^{n+1}-\left(9+9\times10^1+9\times10^2+\cdots+9\times10^n\right)\\&=10^{n+1}-\left(10^{n+1}-1\right)\\&=1\end{aligned}$$

所以：$\frac{a_0a_1a_2a_3\cdots a_A}{0.a_0a_1a_2a_3\cdots a_A}=\frac{\dot{9}9}{0.\dot{9}9}=10^A\Rightarrow\frac{0.\dot{9}9}{\dot{9}9}=\frac{1}{10^A}\Rightarrow\dot{9}9+1=10^A\Rightarrow0.\dot{9}9+\frac{1}{10^A}=1$

⑤ 三维空间直线上kt量子对应数排列

约定：$\dot{9}9-1=\dot{9}8;\ \dot{9}9-2=\dot{9}7;\ \dot{9}9-3=\dot{9}6;\ \dot{9}9-4=\dot{9}5;\cdots$以此类推；

$-\dot{9}9+1=-\dot{9}8;\ -\dot{9}9+2=-\dot{9}7;\ -\dot{9}9+3=-\dot{9}6;\ -\dot{9}9+4=-\dot{9}5;\cdots$以此类推；

这里可以参考皮亚诺公理。

约定：三维空间整数集表示为：$Z^K=\left\{-\dot{9}9,-\dot{9}8,-\dot{9}7,\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots,\dot{9}6,\dot{9}7,\dot{9}8,\dot{9}9\right\}$

注：三维空间整数集不含三维空间整数奇点。

由于Z在三维空间端线上的极大元为$10^A-1=\dot{9}9$，极小元为$-\left(10^A-1\right)=-\dot{9}9$，$10^A\in Z_+$，可知$Z^K\subset Z$，且$Z^K$是$Z$的真子集。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

约定：三维空间端线上相邻两个 kt 量子的长度为$\frac{1}{10^A}$，$kt=\frac{1}{10^A}=\frac{0.\dot{9}9}{\dot{9}9}$，零的长度为零，从零为起点，在单位长度 1 内，每个 kt 量子对应的数都是$\frac{1}{10^A}$整数倍或10^A倍，并从小到大依次排列。

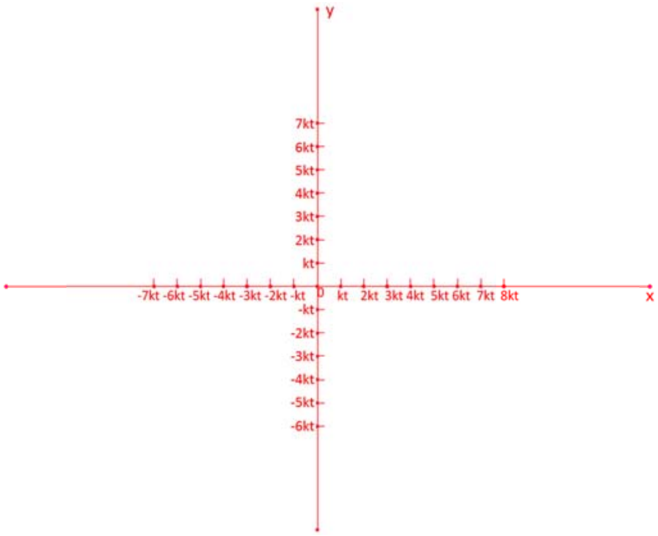
⑥ 空数定义

把三维空间的零、有限循环整数、有限不循环整数、有限循环小数和有限不循环小数统称为空数。KS 表示空数集。$KS=\left\{x \middle| x=n_1+\frac{0.\dot{9}9}{\dot{9}9}n_2, n_1\in Z^K, n_2\in Z^K\right\}$

由完备公里与数集的上(下)确界的存在性的定义 2 可知 N^K、Z^K 和 KS 是上(下)有界集。N^K 的极大元是 $\dot{9}9$，极小元是 $-\dot{9}9$；Z^K 的极大元是 $\dot{9}9$，极小元是 $-\dot{9}9$；当 n_1,n_2 取极大元 $\dot{9}9$ 时得到 KS 的极大元是 $\dot{9}9.\dot{9}9$，当 n_1,n_2 取极小元 $-\dot{9}9$ 时得到 KS 的极小元是 $-\dot{9}9.\dot{9}9$。

约定：$1-0.\dot{9}9=0.\dot{0}1$，$0.\dot{0}1$ 表示整数位都为 0，小数位“$\dot{0}$”表示十分位、百分位、千分位、万分位......到10^{A-1}分位都为 0，小数位上的“1”表示小数位第10^A分位上的数字为“1”；$0.\dot{0}1\times 12=0.\dot{0}12$ 表示整数位都为 0，小数位“$\dot{0}$”表示十分位、百分位、千分位、万分位......到10^{A-2}分位都为 0，小数位上的“1”表示小数位第10^{A-1}分位上的数字为“1”，小数位上的“2”表示小数位第10^A分位上的数字为“2”。

三维空间平面直角坐标系里端线上 kt 量子对应数的排列如下图：



由三维空间端线上 kt 量子对应数的排列可知，在三维空间端线上 0 跟 $0.\dot{0}1$ 是两个相邻的数。

⑦ 定义$|x-y|$为 $x,y\in KS$ 之间的距离

距离是非负的，当且仅当 x 与 y 重合时，它才等于零，从 x 到 y 的距离与从 y 到 x 的距离是一样的，这是因为$|x-y|=|y-x|$。

最后，如果 $z\in KS$，那么$|x-y|\le|x-z|+|z-y|$，即所谓三角形不等式成立。

在上面不等式中，令 $z=0$，及以-y 代 y 即可得到，即对于任何空数 x,y，有不等式成立：$|x+y|\le|x|+|y|$，并且等式成立的条件是 x 与 y 同时非负或同时非正。

利用归纳原理可以验证$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$，并且等式成立的充要条件是所有空数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 同时非负或同时非正。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

4. 内数、原数、外数和原外数的定义及运算

4.1. 四维空间端线的构造

约定：当$\left|\pm\dfrac{0.\dot{9}9}{\dot{9}9}\div 10\right|$时，可知在三维空间端线上找不到该数，构造一个数学空间称为空内，把满足$NS=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{n_1}{10^{A+n_2}},n_1\in Z,n_2\in Z_+,\text{且}10^{n_2}>|n_1|\right\}$这类数归为空内的数，简称内数，引入一个小数点表示三维空间与四维空间(三维空间 + 空内)的奇点，$\dfrac{0.\dot{9}9}{\dot{9}9}\div 10=0.\dot{0}0.1$，以后$0.\dot{0}0.1$简写成$0.\dot{0}.1$，$0.\dot{9}9\div 10=0.0\dot{9}9.9$，$0.0\dot{9}9.9$以后简写成$0.0\dot{9}.9$。

注：$0.\dot{9}9$不可单独简写成$0.\dot{9}$，$0.\dot{9}9$为三维空间的有限循环小数，$0.\dot{9}$为无限循环小数。

这里的四维空间端线跟我们中学学过的直线的不同点在于四维空间直线左右两边分别有一个端点，由于直线没有端点，为了跟原有直线区分开，我们把它叫四维空间端线，端线的左端点(奇点)对应的数为三维空间端线的负整数奇点对应的数-10^A，右端点(奇点)对应的数为三维空间端线的正整数奇点对应的数10^A。四维空间端线上的数集$SKS=\{z|z=x+y,x\in KS,y\in NS\}$，$z$是四维空间端线上的数集的元素。

端线上相邻两个空数之间的内数排列从左到右从小到大排列，如$0.\dot{0}.5$排在$|0.\dot{0}1-0|$长度的中间点位置，$0.\dot{0}.25$在距 0 点$1/4|0.\dot{0}1-0|$长度处等，跟中学直线上的数排列类似，四维空间端线对应数的区间范围为$\left(-\dfrac{\dot{9}}{0.\dot{9}9},\dfrac{\dot{9}}{0.\dot{9}9}\right)$。

由于四维空间端线上的数集$SKS=\{z|z=x+y,x\in KS,y\in NS\}$，$z$是四维空间端线上的数集的元素。可知任何一个无限循环小数或无限不循环小数，只要它们的整数部分绝对值不大于$\dot{9}9$，都可以用四维空间的数集来表示，比如$\dot{9}9.\dot{9}9.\dot{8}=\dot{9}.\dot{9}.\dot{8}$，$\dot{9}.\dot{9}.\dot{8}$表示整数部分为$\dot{9}$，小数部分空数为$0.\dot{9}9$，内数为$0.\dot{0}.\dot{8}$，空数$0.\dot{9}9$为一个有限循环小数，内数$0.\dot{0}.\dot{8}$为一个无限循环小数。

4.2. 四维空间平面

这里的四维空间平面跟我们中学学过的平面的不同点在于四维空间平面是一个正方形，它包含三维空间的平面，且四维空间没有最小的基本单元。

4.3. 四维空间平面直角坐标系

这里的四维空间平面直角坐标系跟我们中学学过的平面直角坐标系的不同点在于平面直角坐标系里的两条直线分别对应的数轴x轴和y轴换成了两条四维空间的端线分别对应的x轴和y轴，原点坐标还是(0,0)。

4.4. 四维空间

这里的四维空间跟我们中学学过的三维空间的不同点在于这里的三维空间是一个立方体，它包含三维空间，且四维空间没有最小的基本单元。

4.5. 四维空间直角坐标系

这里的四维空间直角坐标系跟我们中学学过的空间直角坐标系的不同点在于空间直角坐标系里的三条直线分别对应的数轴x轴、y轴和z轴换成了三条四维空间的端线分别对应的数轴x轴、y轴和z轴，原点坐标还是(0,0,0)。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

4.6. 五维空间端线的构造

引入是一种新思想，一个分数之所以除不尽，是因为它的剩余部分一直除不尽，把这种无限除以又无限剩余产生的纠缠称为无限余纠缠思想。

$1/3 = 0.3 + 0.1/3 = 0.33 + 0.01/3 = 0.333 + 0.001/3 = 0.333\cdots + 余/3$，不管怎么无限次除以都会有一个余/3与它的无限循环小数 $0.333\cdots$ 产生无限余纠缠关系，无限余纠缠还包括开根号开不尽的无限余纠缠等。构造一个数学空间，把该数学空间称为原空，用另外一个小数点表示原空与空内的奇点，把存在于原空的数称为原数。

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{3} = 0.\dot{3}3 + 0.\dot{0}.\dot{3} + 0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\times 3 = 0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{3}\times 3 = 0.\dot{9}.\dot{9}.1 = 1.$$

由上可知 $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{3}$ 是由三维空间的有限循环小数 $0.\dot{3}3$、四维空间的无限循环小数 $0.\dot{0}.\dot{3}$ 和五维空间的原数 $0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{3}$ 共同构成。

由三维空间与四维空间数的定义和无限余纠缠思想可知：三维空间如有限循环小数 $0.\dot{3}3$ 等于它本身，四维空间的无限循环小数 $0.\dot{0}.\dot{3}$ 是一个纠缠数，当它与 $0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{3}$ 产生余纠缠构成 $0.\dot{0}.\dot{3}.\frac{1}{3}$ 的时候，$0.\dot{0}.\dot{3}.\frac{1}{3}$ 等于 $0.\dot{0}.\dot{3}.\frac{1}{3}$。

原数的定义：一类存在于原空里的数，这类数与四维空间里的内数产生余纠缠，把这类原空里的数称为原数。原数集用 YS 表示。

由原数和内数及空数的定义我们可知任意一个绝对值小于 10^A 的分数或无限循环小数或无限不循环小数都可以由一个原数、一个内数和一个空数的一个数表示或两个数或三个数的组成表示。如：

$0.\dot{3}.\dot{3}.0 = 0.\dot{3}.\dot{3} = 0.\dot{3}$；$\frac{1}{2} = 0.5\dot{0}.\dot{0}.0 = 0.5$；$1 = 0.\dot{9}.\dot{9}.1$；$\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}.\dot{6}.\frac{4}{6} = 0.1\dot{6}.\dot{6}.\frac{2}{3}$ 等。

约定：零属于原空里的原数，在原空不考虑零的情况下，任何一个原数的绝对值都大于零，把不含零的原数集用 $YS_{\pm}$ 表示。

约定：本文涉及的原数集 YS 里的元素都与内数能够进行四则运算等计算，原数所处的五维空间与内数所处的四维空间产生纠缠关系。任何两个原数都可以进行四则运算等计算，它们在任何时候都具有相同的内数位数纠缠关系。无限余纠缠是一种用于调节内数位数平衡关系，通过这种调节内数位数平衡关系使计算过程和结果都保持有相等的内数位数，如 $x = 0.\dot{3}, \frac{3+x}{10} = 0.\dot{3}.\dot{3}.03 = 0.\dot{3} + 0.\dot{0}.\dot{0}.03$，$10x = 3.\dot{3}.\dot{3} - 10\times 0.\dot{0}.\dot{0}.03 = 3.\dot{3} - 0.\dot{0}.\dot{0}.3$，$0.0\dot{3}\times 10 + 0.\dot{0}.\dot{0}.3 = 0.\dot{3}$，通过原数来调节内数位数平衡关系。在标准分析里我们忽视了调节内数位数平衡关系的原数的存在，所以在标准分析里我们会得到如 $x = 0.\dot{3}, \frac{3+x}{10} = 0.\dot{3}.\dot{3} = 0.\dot{3}$。

为了增加理解列举如下计算关系：

$$0.\dot{0}.\dot{6} + 0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{3} = 0.\dot{0}.\dot{6}.\frac{1}{3}, \left(0.\dot{3}.\dot{3} + 0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{2}{3} + 0.\dot{6}.\dot{6}.\frac{2}{3} = 1.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{3} + 0.1\dot{6}.\dot{6}.\frac{2}{3} = 0.4\dot{9}.\dot{9}.1 = 0.5.$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

利用原数计算：$1\times 10=?$

解：

$$1\times 10=0.\dot{9}.\dot{9}.1\times 10=\left(0.\dot{9}.\dot{9}+0.\dot{0}.\dot{0}.1\right)\times 10=9.\dot{9}.\dot{9}-0.\dot{0}.\dot{0}.9+0.\dot{0}.\dot{0}.1\times 10$$
$$=9.\dot{9}.\dot{9}-0.\dot{0}.\dot{0}.9+0.\dot{0}.\dot{0}.10=9.\dot{9}.\dot{9}+0.\dot{0}.\dot{0}.1=9.\dot{9}.\dot{9}.1=10$$

我们知道在标准分析里如$\frac{1}{3}$跟$0.333\cdots$是同一个实数，$\frac{1}{9}$跟$0.111\cdots$是同一个实数，1 跟$0.999\cdots$也是同一个实数，1 跟 1 也是同一个实数，因此，我们给定一种判断两个数是否是同一个实数的方法：

对于$-10^A<x<10^A$和$-10^A<y<10^A, x\in R, y\in R$，若$x-y\in YS$，我们就说$x$跟$y$是同一个实数。在标准分析里，当$x$无限趋向于$y$的时候，在量子数学分析里，我们使用$x-y\in YS_{\pm}$表示，在标准分析里，当$x$跟$y$不是极限相等，不带$\lim$，而是直接$x=y$的时候，在量子数学分析里，我们使用$x-y=0$表示。由此可知在标准分析里：$-10^A<x<10^A$和$-10^A<y<10^A, x\in R, y\in R$。

对任意的x和y，只要它们的极限相等，就可得到$x-y$为一个原数。在量子数学分析里，非零原数可以做除数，而 0 不可以做除数，如：可以写成$\frac{1}{0.\dot{0}.\dot{0}.1}=\frac{1}{1-0.\dot{9}.\dot{9}}=\frac{1}{1-0.\dot{9}}$但不可以写成$\frac{1}{0}$，$\frac{1}{0.\dot{0}.\dot{0}.1}$有数学意义，$\frac{1}{0}$无意义。

由上可知，在标准分析里$0.\dot{3}.\dot{3}=0.\dot{3}=0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{6}=0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$。

约定：SKS 不存在极大元和极小元，只有跟五维空间原数产生纠缠下才有$\dot{9}.\dot{9}.\dot{9}$和$-\dot{9}.\dot{9}.\dot{9}$是 SKS 的极大元和极小元。这里我们约定四维空间跟五维空间在不产生纠缠下，任何一个 SKS 里的数都小于$\dot{9}.\dot{9}.\dot{9}$。

注：在没有原数的纠缠下，四维空间的内数位数无法靠近四维空间跟五维空间的奇点位置，只有在原数的纠缠下，内数位数才能被拉到贴近奇点位置。

约定：在不以标准分析考虑问题的时候

有：$0.\dot{3}.\dot{3}<0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$，$0.\dot{3}.\dot{3}<0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{9}<\frac{1}{3}$，$0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{9}<0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{6}$，$0.\dot{0}.\dot{0}.1>0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{2}{3}>0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{3}>0.\dot{0}.\dot{0}.\frac{1}{6}$等，使用余纠缠的计算可以找到无数的介于$0.\dot{3}.\dot{3}$和$\frac{1}{3}$之间的数，如$0.\dot{3}.\dot{3}.\frac{1}{3n}, n\geq 2$且$n\in N$都是介于$0.\dot{3}.\dot{3}$和$\frac{1}{3}$之间的数。

五维空间端线对应的数由四维空间的端线对应的数和这些对应数与原数的组合数构成，也就是四维空间的端线是五维空间端线的一部分，只是在四维空间端线的基础上增加了四维空间端线对应数与原数的组合数。如在四维空间端线上的$0.\dot{1}$与$\frac{1}{9}$之间还均匀地分布着从小到大的$0.\dot{1}$与原数的组合数，且这些组合数小于$\frac{1}{9}$。

五维空间端线上的数的集合用 WKS 表示，x 是 WKS 的元素，

$$WKS=\left\{x\middle|x=x_1+x_2+x_3, x_1\in KS, x_2\in NS, x_3\in YS\right\}$$

无穷小的数的定义：由上我们可知$1=0.\dot{9}.\dot{9}.1=0.\dot{9}.\dot{9}+0.\dot{0}.\dot{0}.1=0.\dot{9}+0.\dot{0}.\dot{0}.1$，在标准分析里$0.\dot{0}.\dot{0}.1$这个原数在实数集里找不到该数，我们约定把所有的非零原数都归为无穷小的数。由于原数对应的原空和内数对应的空内存在奇点，因此，我们可知标准分析的极限思想的极限只能到达奇点，而无法对奇点内进行准确数学计算，而量子数学分析可以对奇点内的无穷小的数(非零原数)进行准确数学计算。由于非零

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

原数都在奇点内，且奇点内的数都不是实数，后面我们将使用非零原数来定义“极限”

4.7. 五维空间平面直角坐标系

这里的五维空间直角坐标系跟我们中学学过的空间直角坐标系的不同点在于空间直角坐标系里的三条直线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴换成了三条五维空间的端线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，原点坐标还是(0,0,0)。

4.8. 五维空间直角坐标系

这里的五维空间直角坐标系跟我们中学学过的空间直角坐标系的不同点在于空间直角坐标系里的三条直线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴换成了三条五维空间的端线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，原点坐标还是(0,0,0)。

4.9. 四维空间直角坐标系

约定：由前面五维空间端线可知，10^A 是五维空间的整数奇点，构造一个数学空间称为空外，把满足 $YS=\left\{x \middle| x=10^A\cdot n, n\in Z\right\}$ 这类数归为空外的数，简称外数，外数集用 YS 表示，引入一个小数 Δ 表示五维空间与六维空间的奇点，10^A 用 1Δ 表示，有：$1\Delta+\dot{9}=1\Delta\dot{9}$，$9\times10^A=9\Delta$，$3\Delta+\dot{8}+0.\dot{7}.\dot{1}.\frac{1}{3}=3\Delta\dot{8}.\dot{7}.\dot{1}.\frac{1}{3}$，$n\times1\Delta=n\Delta$，$0\Delta\dot{0}=0\Delta=0$。

由 $YS=\left\{x \middle| x=10^A\cdot n, n\in Z\right\}$ 可知 YS 没有极大元和极小元。

约定：五维空间端线是六维空间直线的一部分，在六维空间直线上，两个相邻整数奇点之间的数排列类似于五维空间端线的排列，如：整数奇点 $n\Delta$ 和 $(n+1)\Delta$，$n\in Z_+$ 为相邻的两个整数奇点，它们之间的数排列为从左到右依次从小到大排列，每个数都为 $n\Delta$ 加五维空间端线上的正数等。

由我们中学学过的直线，可知六维空间直线在不考虑原数的情况下，它与我们中学学过的直线等价。

六维空间直线上对应的数的集合用 LKS 表示，x 是 LKS 的元素，

$$LKS=\left\{x \middle| x=x_1+x_2+x_3+x_4, x_1\in KS, x_2\in NS, x_3\in YS, x_4\in WS\right\}$$

无限循环整数的定义：一个整数从空外的某位整数位起进行整数位上数字的重复循环，形如 $\cdots121212a_n\cdots a_4a_3a_2a_1\Delta$，$a_n\in z_+$ 中的每一个都是 $0,1,2,\cdots,9$ 这些数字之一，从第 a_{n+3} 位开始进行整数位上数字的重复循环，把这类时空数称为无限循环整数。任何一个有限循环整数和有限不循环整数都可以写成 $\pm\cdots000\Delta a_A\cdots a_4a_3a_2a_1$，$a_A\cdots a_4a_3a_2a_1$ 中的每一个都是 $0,1,2,\cdots,9$ 这些数字之一，因此，我们把有限循环整数和有限不循环整数都归为无限循环整数。

无限不循环整数的定义：在整数 Z 里，不能用无限循环整数表示的整数，把它们归为无限不循环整数。

4.10. 六维空间平面直角坐标系

这里的六维空间直角坐标系跟我们中学学过的空间直角坐标系的不同点在于空间直角坐标系里的三条直线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴换成了三条六维空间的直线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，原点坐标还是(0,0,0)。

4.11. 六维空间直角坐标系

这里的六维空间直角坐标系跟我们中学学过的空间直角坐标系的不同点在于空间直角坐标系里的三

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

条直线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴换成了三条六维空间的直线分别对应的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，原点坐标还是(0,0,0)。

4.12. 七维空间直线的构造

原外数的定义：$0.0.0.\frac{1}{3}$ 是个原数，当这个原数关于三维空间的小数点对称时，它的对称数在六维空间的直线上无法找到该数，为此，构造一个空间，把该空间称为原空外，原空外里存在的数称为原外数，原外数集用 YWS 表示。引入一个“Δ”表示空外与原空外的奇点，这里与 $0.0.0.\frac{1}{3}$ 关于三维空间小数点对称的原外数写成 $\frac{1}{3}\Delta\dot{0}\Delta$。所以原外数是由一类以原数关于三维空间的小数点对称得来的数。

约定：一个原外数与一个外数能够进行四则运算等计算，则该原外数所处的空间必与该外数所处的六维空间产生纠缠关系。

如：$\frac{1}{3}\Delta\dot{0}\Delta+\dot{1}\dot{2}\Delta\dot{5}=\frac{1}{3}\Delta\dot{1}\dot{2}\Delta\dot{5}$ 由于原数具有无限余纠缠作用，我们约定：原外数具有无限纠缠作用，原外数的无限纠缠是一种用于调节外数位数平衡关系，通过这种调节外数位数平衡关系使计算过程和结果都保持有相等的外数位数

约定：LKS 不存在极大元和极小元，只有跟原数和原外数产生纠缠下才有 $\dot{9}\Delta\dot{9}.\dot{9}.\dot{9}$ 和 $-\dot{9}\Delta\dot{9}.\dot{9}.\dot{9}$ 是 LKS 的极大元和极小元。这里我们约定六维空间跟原外数在不产生纠缠下，任何一个 LKS 里的数都小于 $\dot{9}\Delta\dot{9}.\dot{9}.\dot{9}$。

注：在没有原外数的纠缠下，六维空间的外数位数无法靠近六维空间跟七维空间的奇点位置，只有在原外数的纠缠下，外数位数才能被拉到贴近奇点位置。

无穷大的数的定义：

由上我们可知 $1\Delta\dot{0}\Delta$ 是一个由无穷小的数 $0.\dot{0}.\dot{0}.1$ 关于三维空间小数点对称得来的原外数，在标准分析里 $1\Delta\dot{0}\Delta$ 这个原外数在实数集里找不到该数，我们约定把所有的非零原外数都归为无穷大的数。由于原外数对应的原空外和外数对应的空外存在奇点，因此，我们可知标准分析的极限思想的极限只能到达奇点，而无法对奇点内进行准确数学计算，而量子数学分析可以对奇点内的无穷大的数(非零原外数)进行准确数学计算。由于非零原外数都在奇点内，且奇点内的数都不是实数，后面我们将使用非零原外数来定义极限。

为了便于理解，无穷大还是使用 ∞ 表示，$+\infty$ 表示正无穷大，即正原外数，$-\infty$ 表示负无穷大，即负原外数。

约定：七维空间由六维空间和空外组成，六维空间直线是七维空间直线的一部分，七维空间直线是在六维空间直线的基础上增加原外数分布的线。

七维空间直线上对应的数的集合为时空数学集，用 TKS 表示，x 是 TKS 的元素，

$$TKS=\left\{x \middle| x=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5, x_1\in KS, x_2\in NS, x_3\in WS, x_4\in YS, x_5\in YWS\right\}$$

4.13. 维度时空的定义

四维时空 ＝ 三维空间 ＋ 时间；五维时空 ＝ 四维时空 ＋ 空内；六维时空 ＝ 五维时空 ＋ 原空；七维时空 ＝ 六维时空 ＋ 空外；八维时空 ＝ 七维时空 ＋ 原空外；只由零构成的维度空间称为零维空间，零维空间存在于任何一个维度空间里；N 维时空 $=(N-1)$维空间 ＋ 时间。如：四维时空 ＝ 三维空间 ＋

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

时间；三维时空 = 二维平面 + 时间；二维时空 = 一维直线 + 时间；一维时空 = 零维空间 + 时间。

5. 三维空间的收敛与发散

5.1. 三维空间级数的收敛与发散

无穷级数 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots$

在极限思想里我们可知 S_n 发散，在量子数学分析里认为在三维空间 a_n 受到三维空间数轴上数的限制，最大只能取 $\dot{9}9 = \dot{9}$ 这个整数，有 $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + \dot{9}8 + \dot{9}9 = \dfrac{(1+\dot{9})\times\dot{9}}{2} = 5\dot{0}0\times\dot{9} = 5\dot{0}\times\dot{9}$，有 $5\dot{0}\times\dot{9}$ 为常数，$5\dot{0}\times\dot{9}$ 为 S_n 在三维空间收敛后的数，这里的三维空间收敛表示 S_n 在三维空间要受到三维空间数轴上数的限制，S_n 里的 a_n 最大只能取 $\dot{9}$ 这个整数。

$5\dot{0}$ 表示整数位 10^{A-1} 位上的数字为“5”其余整数位上的数字都为“0”。

无穷级数 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots = 9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$

在量子数学分析的三维空间由于级数的构造规则 a_n 最大只能取 $9\dot{0}$ 这个常数，$9\dot{0}$ 表示整数位 10^{A-1} 位上的数字为“9”其余整数位上的数字都为“0”，a_n 如果取 $9\dot{0}\times 10$，会导致 $a_n > \dot{9}$，a_n 超越三维空间数轴上数的限制。

有在三维空间 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots = 9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots + 9\times 10^{A-2} + 9\dot{0}$

得到 $S_n = \dot{9}$，

同理可得 $S_n = (1-0.1) + (0.1-0.01) + (0.01-0.001) + (0.001-0.0001) + \cdots$ 在三维空间收敛后 $S_n = 0.\dot{9}9$

同理可得 $S_n = 1 + (0.1-0.1) + (0.01-0.01) + (0.001-0.001) + (0.0001-0.0001) + \cdots$

在三维空间收敛后 $S_n = 1$

当 $S_n = 1 - 0.1 + 0.1 - 0.01 + 0.01 - 0.001 + 0.001 - 0.0001 + \cdots$ 时，由于 S_n 没有给出无穷级数里 a_n 在三维空间的明确构造规则，会得到 S_n 在三维空间是个发散级数。

同理可得到 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$，由于 S_n 没有给出无穷级数里 a_n 在三维空间的明确构造规则，得到 S_n 也是个三维空间发散级数。

5.2. 数学的宏观世界与微观世界的定义

数学宏观世界的定义：由空数、内数和外数构成的数学世界，把该世界称为数学宏观世界。

数学微观世界的定义：由原数和原外数构成的数学世界(原空和原空外)，把该世界称为数学微观世界。

由上可知标准分析里的直线等价于数学宏观世界里的直线，因此，标准分析只能适用于数学宏观世界，下面我们将使用数学微观世界来定义时空纠缠数的概念。

6. 数列的实数收敛与发散

注：下面的函数没说明都是指建立在六维空间直角坐标系上的函数。

定义 1：设 $\{x_n\}$ 为一实数数列，如果存在实数 a，总能找到非零原数 β 和整数 N，使得当 $n \ge N$ 时，等式 $|x_n - a| = \beta$ 都成立，那么就称原数 β 是数列 $\{x_n\}$ 的时空余纠缠数，实数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的时空纠缠数，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a。记作：$|x_n = a$

如果不存在这样的实数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 没有时空纠缠数，或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的。

证明数列 $2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}\cdots, \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$ 的时空纠缠数是 1。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

证明：$\left|x_n-a\right|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}=\frac{0.\dot{9}.\dot{9}.1}{n}$。

引入前面的原外数和原数分别调节外数位数和内数位数：

由原外数的定义可知原外数可以把无限循环整数如$\dot{9}\Delta\dot{9}$拉到贴靠七维空间与六维空间的奇点，由原数的定义可知原数可以把无限循环小数如$0.\dot{9}=0.\dot{9}.\dot{9}$拉到贴靠六维空间与五维空间的奇点，当$n\geq 1\Delta\dot{0}\Delta=\dot{9}\Delta\dot{9}+1$时，可知$\dot{9}\Delta\dot{9}+1$的整数位数个数比$0.\dot{9}$小数位数个数多 1 位，得到$\frac{0.\dot{9}.\dot{9}.1}{\dot{9}\Delta\dot{9}+1}=0.\dot{0}.\dot{0}.1$，得到$\frac{0.\dot{9}.\dot{9}.1}{n}\leq 0.\dot{0}.\dot{0}.1$。

因为$0.\dot{0}.\dot{0}.1$为原数，所以数列$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$的时空纠缠数是 1。

同理当$x\Delta\dot{9}\Delta\dot{9},1>x>0$时，数列$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$的时空纠缠数是 1。

定义 2：设函数$f(x)$在点x_0的某一去心领域内有定义，如果存在实数A，总能找到原数β_1和β_2，使得当x满足$\left|x-x_0\right|=\beta_2$，对应的函数值$f(x)$满足等式$\left|f(x)-A\right|=\beta_1$，那么实数$A$就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的时空纠缠数，记作$\left|f(x)=A\right.$或$f(x)\to A$（当$x\to x_0$）。

求证：$x\to 1\left|\frac{x^2-1}{x-1}=2\right.$；证明：$x\to 1\left|\frac{x^2-1}{x-1}=x\to 1\right|x+1$。

因为当$x=1+\beta$时，满足$\left|x+1-2\right|=\beta$，所以$x\to 1\left|\frac{x^2-1}{x-1}=2\right.$。

定义 3 设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在实数A，总能找到原数β和正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，对应的函数值$f(x)$都满足等式$\left|f(x)-A\right|=\beta$

那么实数A就叫做函数$f(x)$的时空纠缠数，记作$x\in YWS\left|f(x)=A\right.$或$f(x)\to A(x\in YWS)$

证明$x\in YKS\left|\frac{1}{x}=0\right.$

因为当$x\in YWS_-$时$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\beta_1$成立，当$x\in YWS_+$时$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\beta_2$成立，所以$x\in YKS\left|\frac{1}{x}=0\right.$

定理 1：有限个原数的和也是原数。定理 2：有限个原数的乘积也是原数。

定理 3：有限个原外数的和也是原外数。定理 4：有限个原外数的乘积也是原外数。

定理 5：(复合函数的极点运算法则)设函数$y=f\left[g(x)\right]$是由函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成，$f\left[g(x)\right]$在点x_0的某去心领域内有定义，若$x\to x_0\left|g(x)=u_0\right.,u\to u_0\left|f(u)=A\right.$时，有$x\to x_0\left|f\left[g(x)\right]=u\to u_0\right|f(u)=A$。

7. 函数的连续性和间断点及量子导数与微分

定义：设函数$y=f(x)$在点x_0的某一领域内有定义，如果$\Delta x\in YS\left|\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=\beta,\beta\in YS\right.$，那么就称函数$y=f(x)$在点$x_0$连续。

在区间上每一点都连续的函数，叫做该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续。

函数的间断点

设函数$f(x)$在点x_0的某去心领域内有定义，在此前提下，如果函数$f(x)$有下列三种情形之一：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

在 $x=x_0$ 没有定义；虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $x\to x_0|f(x)$ 不存在；

虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $x\to x_0|f(x)$ 存在，但 $x\to x_0|f(x)\neq f(x_0)$；

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 成为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点。

定理 1：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续。

定理 2：设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$\mathring{U}(x)\subset D_{f\circ g}$，若 $x\to x_0|g(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则 $x\to x_0|f[g(x)]=u\to u_0|f(u)=f(u_0)$

定理 3：设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$U(x)\subset D_{f\circ g}$。若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $g(x_0)=u_0$ 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续。

在三维空间，设某点沿端线运动，在端线上引入原点和单位点(即表示实数 1 的点)，使端线成为数轴。此外，再取定一个时刻作为测量时间的零点。设动点于时刻 t 在端线上的位置的坐标为 s(简称位置 s)。这样，运动完全由某个函数 $s=f(t)$ 所确定。这函数对运动过程中所出现的 t 值有定义，称为位置函数。

首先取从时刻 $t_。$ 到 t 这样一个时间间隔($t_。<t$)，在这段时间内，动点从位置 $s_。=f(t_。)$ 移动到 $s=f(t)$。这时由 $\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}}$ 算得的比值 $\frac{s-s_。}{t-t_。}=\frac{f(t)-f(t_。)}{t-t_。}$ 取 $t-t_。=kt$，设 $v=\frac{s-s_。}{t-t_。}=\frac{f(t)-f(t_。)}{t-t_。}$

有 $v=\frac{f(t)-f(t_。)}{kt}$ 这时就把这个 v 称为动点在时刻 $t_。$ 的速度。

同理可求的在三维空间曲线 C 为函数 $y=f(x)$ 的图形上的一个点 $M(x_。,y_。)$ 处切线的斜率 k

$$k=\frac{f(x)-f(x_。)}{kt}\ (x_。<x)\text{或}\ k=\frac{f(x)-f(x_。)}{kt}\ (x_。>x)$$

由上可看出非匀速端线运动的速度和切线的斜率都归结为如下：

$$\frac{f(x)-f(x_。)}{kt}\ (x_。<x)\text{或}\ \frac{f(x)-f(x_。)}{kt}\ (x_。>x)$$

定义：设连续函数 $y=f(x)$ 在点 $x_。$ 的某个领域内有定义，当自变量 x(x 是 kt 整数倍)在 $x_。$ 处取得增量 kt(点 $x_。+kt$ 仍在该领域内)时，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_。$ 处可量子导，相应地函数取得增量 $\Delta y=f(x_。+kt)-f(x_。)$，$\Delta y$ 与 kt 之比称这个函数 $y=f(x)$ 在点 $x_。$ 处的量子导数，记为 $f'(x_。)$，即

$$f'(x_。)=\frac{\Delta y}{kt}=\frac{f(x_。+kt)-f(x_。)}{kt}$$

上面讲的是函数在一点处可量子导。由上可知连续函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内除了 x 最大值不可量子导其它点都可量子导。这时，对于任一 $x\in I$ (x 最大值除外)，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的量子导数值。这样就构成了一个新的函数，这个函数叫做原来函数 $y=f(x)$ 的量子导函数，记作 y'，$f'(x)$，$\frac{kf(x)}{kt}$，或 $\frac{ky}{kt}$。

在标准分析里 $y=f(x)$ 在点 x 可导，则函数在该点必连续，因此，连续也必定可量子导。

定义：如果一个连续函数 $f(x)$ 其定义域 $x\in[a,b]$，当 x 取 $[a,b]$ 内所有空数构成空区间 $[a_0,b_0]$ 时，有连续函数 $f(x)$ 变成一个处处不连续处处不可导但可量子导的函数 $f(x_1)$，$x_1\in$ 空区间 $[a_0,b_0]$，把这类由连续函数 $f(x)$ 取其定义域的空区间构成的新函数 $f(x_1)$ 称为三维空间的连续函数。由于三维空间的连续函数都是一些处处不连续处处不可导函数，在四维空间看来它是个离散型函数，因此，把这类函数又

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

称为连续离散型函数。

求量子导数举例

例 1 求函数 $f(x)=C$ (C 为常数)的量子导数。

解 $f'(x)=\dfrac{f(x+kt)-f(x)}{kt}=\dfrac{C-C}{kt}=0$ 即常数的量子导数等于零。

例 2 求函数 $f(x)=x^3$ 在 $x=a$ 处的量子导数。

解 $f'(a)=\dfrac{f(a+kt)-f(a)}{kt}=\dfrac{(a+kt)^3-a^3}{kt}=3a^2+3akt+kt^2$。

$3a^2+3akt+kt^2$ 与 $3a^2$ 近似相等。同理可得知其它连续函数求导和求量子导结果近似相等。

定义：如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$，那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，当 $f(x)$ 在其定义域里取所有空数得到函数 $f(x_1)$ 时，我们称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x_1)$ 的量子原函数。

定义：在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)kt$)在区间 I 上的量子不定积分，记作 $\int f(x)kt$，其中记号 $\int$ 称为量子积分号，$f(x)$ 称为量子被积函数，$f(x)kt$ 称为量子被积表达式，x 称为量子积分变量。

量子不定积分的性质 1 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则 $\int[f(x)+g(x)]kt=\int f(x)kt+\int g(x)kt$

量子不定积分的性质 2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，a 为非零常数，则 $\int af(x)kt=a\int f(x)kt$。

定义：设连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中插了 $n-1$ 个点($n-1\geq 0$ 且 n 为整数)，每相邻两个点之间的距离都等于 kt，有 $a+n\times kt=b=a+nkt$，作函数值 $f(a+kt\times i)$ 与相邻两点距离 kt 的乘积 $f(a+kt\times i)\times kt$ ($i=1,2,3,\cdots,n$)，并作出和 $S=\sum_{i=1}^{n}f(a+kt\times i)\times kt$，$S$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的量子定积分(简称量子积分)，记作 $\int_a^b f(x)kt$，其中 $f(x)$ 叫做量子被积函数，$f(x)kt$ 称为量子被积表达式，x 称为量子积分变量，a 叫做量子积分下限，b 叫做量子积分上限，$[a,b]$ 叫做量子积分区间。

注：实际的取值中 a,b 都是远远大于 kt 的常数。

量子面积公式

定理：如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)kt=F(b)-F(a)$

因为 $\int_a^b f(x)kt=[f(a)+f(a+kt)+f(a+2kt)+\cdots+f(b-3kt)+f(b-2kt)+f(b-kt)]\times kt$ 又因为函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数所以 $F'(x)=f(x)=\dfrac{F(x+kt)-F(x)}{kt}$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)kt=&\Bigg[\frac{F(a+kt)-F(a)}{kt}+\frac{F(a+2kt)-F(a+kt)}{kt}+\frac{F(a+3kt)-F(a+2kt)}{kt}+\cdots\\&+\frac{F(b-2kt)-F(b-3kt)}{kt}+\frac{F(b-kt)-F(b-2kt)}{kt}+\frac{F(b)-F(b-kt)}{kt}\Bigg]\times kt\\&=F(a+kt)-F(a)+F(a+2kt)-F(a+kt)+F(a+3kt)-F(a+2kt)+\cdots\\&+F(b-2kt)-F(b-3kt)+F(b-kt)-F(b-2kt)+F(b)-F(b-kt)\\&=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

所$\int_a^b f(x)kt = F(b) - F(a)$，把$\int_a^b f(x)kt = F(b) - F(a)$称为量子面积公式

量子反常积分

定义：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，去$t > a$，如果时空纠缠数$\int_a^{+\infty} f(x)kt$存在，则称此时空纠缠数为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的量子反常积分。

设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，如果反常积分$\int_{-\infty}^{0} f(x)kt$和$\int_0^{+\infty} f(x)kt$都收敛，则称上述两反常积分之和为函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty,+\infty)$上的量子反常积分，记作$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)kt$，即

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)kt = \int_{-\infty}^{0} f(x)kt + \int_0^{+\infty} f(x)kt$

如下图$y = f(x)$在区间$[a,b]$上连续，求$y = f(x)$的弧长

解：我们把$y = f(x)$弧长分割成无数个小直角三角形的斜边，所有小直角三角形的底边都为kt，可求得小直角三角形的高为：$f(x+kt) - f(x)$，小直角三角形的斜边长为：

$$\sqrt{\left[f(x+kt) - f(x)\right]^2 + kt^2} = kt\sqrt{\frac{\left[f(x+kt) - f(x)\right]^2}{kt^2} + 1} = kt\sqrt{\left[f'(x)\right]^2 + 1}$$

$\therefore$ $f(x)$在区间$[a,b]$的弧长为$C = \int_a^b \sqrt{\left[f'(x)\right]^2 + 1}kt$

把$C = \int_a^b \sqrt{\left[f'(x)\right]^2 + 1}kt$称为量子弧长公式

举例求$y = x$，$x \in [0,2]$的弧长。解：$C = \int_a^b \sqrt{\left[f'(x)\right]^2 + 1}kt = \int_0^2 \sqrt{1^2 + 1}kt = \left[\sqrt{2}x\right]_0^2 = 2\sqrt{2}$

多元函数的连续性

定义：设二元函数$f(P) = f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$为D的聚点，且$P_0 \in D$，如果$x - x_0 = \beta_1$(原数)，$y - y_0 = \beta_2$(原数)，有$(x,y) \to (x_0,y_0) \mid f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续。如果函数$f(x,y)$在$D$的每一点都连续，那么就称函数$f(x,y)$在$D$上连续，或者称$f(x,y)$是$D$上的连续函数。以上关于二元函数的连续性概念，可相应地推广到n元函数$f(P)$上去。

求隐函数的量子导数

例如：求由方程$e^y + xy - e = 0$所确定的隐函数的量子导数$\frac{ky}{kt}$

解：我们把方程两边分别对x求量子导数，注意$y = y(x)$方程左边对x求量子导得

$$\frac{k\left(e^y + xy - e\right)}{kt} = e^y\frac{ky}{kt} + y + x\frac{ky}{kt},$$

方程右边对x求量子导得$(0)' = 0$。

由于等式两边对x的量子导数相等，所以$e^y\frac{ky}{kt} + y + x\frac{ky}{kt} = 0$，从而得到$\frac{ky}{kt} = -\frac{y}{x + e^y}$（$x + e^y \neq 0$）。

在这个结果中，分式中的$y = y(x)$是由方程$e^y + xy - e = 0$所确定的隐函数。

量子偏导数

以二元函数$z = f(x,y)$为例，如果只有自变量x变化，而自变量y固定(即看作常量)，这时它就是x的一元函数，这函数对x的量子导数，就称为二元函数$z = f(x,y)$对于x的量子偏导数，即有如下定义：

定义：设函数$z = f(x,y)$在点$(x_\circ,y_\circ)$的某一领域内有定义，当y固定在$y_\circ$而x在$x_\circ$处有增量Δx时，

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 23 June 2019, publ: 26 June 2019

相应地函数有增量 $f(x_。+\Delta x,y_。)-f(x_。,y_。)$，如果 $\Delta x\to 0\left|\dfrac{f(x_。+\Delta x,y_。)-f(x_。,y_。)}{\Delta x}\right.$ 存在，则我们取 $\Delta x=kt^2$，$\dfrac{f(x_。+kt^2,y_。)-f(x_。,y_。)}{kt^2}$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_。,y_。)$ 处对 x 的量子偏导数，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_。\\y=y_。}}$，$\left.z_x\right|_{\substack{x=x_。\\y=y_。}}$ 或 $f_x(x_。,y_。)$。

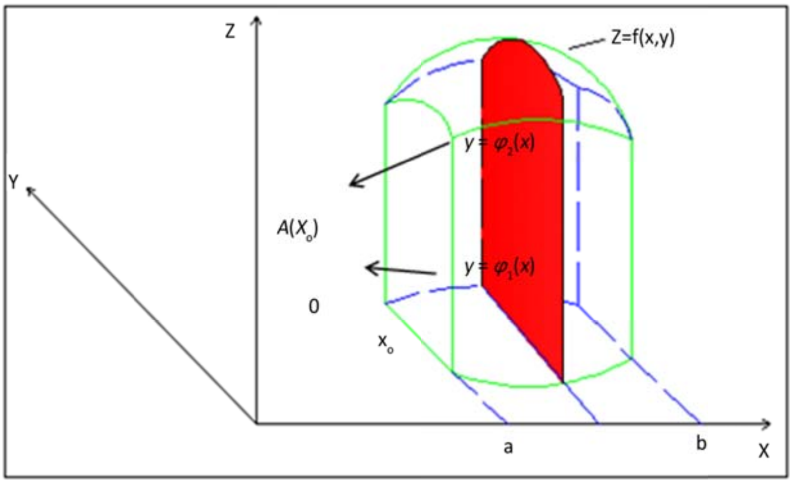
类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_。,y_。)$ 处对 y 的量子偏导数定义为 $f_y(x_。,y_。)=\dfrac{f(x_。,y_。+kt^2)-f(x_。,y_。)}{kt^2}$，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_。\\y=y_。}}$，$\left.z_y\right|_{\substack{x=x_。\\y=y_。}}$ 或 $f_y(x_。,y_。)$。

量子偏导数的概念还可以推广到二元以上的函数，例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为 $f_x(x,y,z)=\dfrac{f(x+kt^3,y,z)-f(x,y,z)}{kt^3}$，其中点 (x,y,z) 是函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域的内点。

量子二重积分的概念

定义：设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 分割成 n 个小闭区域，每个小闭区域都是面积 $\Delta x=kt^2$ 的小正方形，在每个小正方形里任取一点 (x_i,y_i)，作乘积 $f(x_i,y_i)kt^2$，并作和 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)kt^2$，若和的时空纠缠数存在，则称 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)kt^2$ 为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的量子二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)kt^2$ 其中 $f(x,y)$ 叫做量子被积函数，$f(x,y)kt^2$ 叫做量子被积表达式，kt^2 叫做量子面积元素，x 与 y 叫做量子积分变量，D 叫做量子积分区域，$\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)kt^2$ 叫做量子积分和。

截面面积的计算，如图：



在区间 $[a,b]$ 上任意取定一点 $x_。$，作平行于 $y0z$ 面的平面 $x=x_。$。这平面曲顶柱体所得的截面是一个以区间 $[\varphi_1(x_。),\varphi_2(x_。)]$ 为底、曲线 $z=f(x_。,y)$ 为曲边的曲边梯形，所以这截面的面积为 $A(x_。)=\int_{\varphi_2(x_。)}^{\varphi_1(x_。)}f(x_。,y)kt$，一般地，过区间 $[a,b]$ 上任一点 x 且平行于 $y0z$ 面的平面截曲顶柱体所得截面的

面积为 $A(x)=\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)kt$，于是，得到曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b A(x)kt=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)kt\right]kt=\int_a^b kt\int_{\varphi_2}^{\varphi_2} f(x,y)kt=\iint_D f(x,y)kt^2$$

例题：计算 $\iint_D xyd\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域，σ 是 D 的面积。

解：

$$\begin{aligned}\iint_D xyd\sigma &=\iint_D xykt^2=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xykt\right]kt=\int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2}^{y+2}kt\\ &=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left[y(y+2)^2-y^5\right]kt\\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right]_{-1}^{2}=5\frac{5}{8}\end{aligned}$$

。

量子三重积分的概念

定义：设 $f(x,y,z)$ 是空间有限闭区域 Ω 上的有界函数，将 Ω 分割成 n 个小闭区域，每个小闭区域都是体积 $\Delta v=kt^3$ 的小正方体，在每个小正方体里任取一点 (x_i,y_i,z_i)，作乘积 $f(x_i,y_i,z_i)kt^3$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)kt^3$，若和的时空纠缠数存在，则称此时空纠缠数为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的量子三重积分，记作 $\iiint_\Omega f(x,y,z)kt^3$，其中 kt^3 叫做量子体积元素。

例题：计算量子三重积分 $\iiint_\Omega xkt^3$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

解：将 Ω 投影到 $x0y$ 面上，得投影区域 D_{xy} 为三角形闭区域 0AB。直线 0A、0B、及 AB 的方程依次为 $y=0$、$x=0$ 及 $x+2y=1$，所以 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,0\le y\le\frac{1-x}{2},0\le x\le 1\right\}$

有：$\iiint_\Omega xkt^3=\int_0^1 kt\int_0^{\frac{1-x}{2}} kt\int_0^{1-x-2y} xkt=\int_0^1 xkt\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)kt=\frac{1}{4}\int_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)kt=\frac{1}{48}$。

8. 结束语

广义相对论所用的几何是黎曼几何，在量子数学分析里，三维空间的所有函数全部被量子化。量子偏导数等之所以能够进行计算是因为它们以高纬度空间为基础，即三维空间的黎曼几何等是由高纬度空间导出来的，三维空间的连续函数在高纬度空间看来它们都是离散型函数。

参考文献

[1] 《非标准分析创始人》，道本周著，科学出版社.
[2] 《数学分析》第一册，卓里奇，P5-P37,P38-P49.
[3] 《数学分析新讲》第一册，北京大学出版社，P23-P24.
[4] 《高等数学》上下册，同济大学出版社.