Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(11), 3330-3336
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.1111489

Hans汉斯

基于CPFS结构理论的初中数学教学探究

——以“三角形”单元为例

江一雄，肖加清

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2023年7月15日；录用日期：2023年10月30日；发布日期：2023年11月9日

摘 要

CPFS结构是数学学习特有的认知结构，是在认知发展理论基础上发展而来的更为实用的结构理论，对初中生的数学各方面能力都能提升，用它来研究数学知识教学是十分有必要的。三角形知识作为初中阶段十分重要的知识板块，由于教材编排方式和本身抽象性、逻辑性强等特点，导致学生对三角形这块的知识掌握不太理想，从数学学习的本质和教学的根本任务上来看，形成一个良好的数学认知结构是解决三角形数学知识内化问题的关键。本文将从课标、三角形的知识结构与分布特点及CPFS结构理论的优势结合提出利用CPFS理论在三角形教学中的实际应用的对策，如采用变式教学、引导式教学、分层教学等。

关键词

初中三角形，CPFS结构理论，教学对策

Research on Junior Middle School Mathematics Teaching Based on CPFS Structure Theory

—Taking “Triangle” Unit as an Example

Yixiong Jiang, Jiaqing Xiao

School of Mathmatics and Statistics, Huanggang Normal College, Huanggang Hubei

Received: Jul. 15th, 2023; accepted: Oct. 30th, 2023; published: Nov. 9th, 2023

Abstract

CPFS structure is a unique cognitive structure of mathematics learning, and it is a more practical

文章引用: 江一雄, 肖加清. 基于 CPFS 结构理论的初中数学教学探究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(11): 3330-3336.
DOI: 10.12677/ces.2023.1111489

structural theory developed on the basis of cognitive development theory. It can improve the mathematical ability of junior high school students in all aspects, and it is very necessary to use it to study mathematical knowledge teaching. As a very important knowledge block in junior high school, triangular knowledge is not well mastered by students due to the arrangement of teaching materials and its strong abstract and logical characteristics. From the perspective of the essence of mathematics learning and the fundamental task of mathematics teaching, forming a good mathematical cognitive structure is the key to solving the problem of triangular mathematical knowledge teaching. This paper will combine the characteristics of curriculum standard, triangle knowledge structure and distribution, and the advantages of CPFS structure theory to put forward the practical application of CPFS theory in triangle teaching, such as variable teaching, guided teaching, hierarchical teaching and so on.

Keywords

Junior High School Triangle, CPFS Structure Theory, Teaching Strategy

1. 引言

皮亚杰的认知发展理论把建构过程大致分为图式、同化、顺应及平衡四个过程。大致概括为，新知识与原有知识产生冲突后，学生在原有图示上进行同化、顺应后，将新知识融入自身认知结构中，再达到平衡[1]。学习是自我建构，并在此过程中不断丰富、提高、完善的过程。

而 CPFS 结构理论是一个完善的数学认知结构，它可以把数学知识点的内部逻辑更好地呈现出来，在学生学会解题的同时，拓宽他们的知识广度和深度，而教师通过多种类型的教学方式使学生建构一个 CPFS 结构，将数学知识按照自己的认知结构进行内化和顺应，进而形成具有内部规律的知识网络。因此可以说 CPFS 结构属于认知结构主义，它和建构主义都归属于认知心理学，强调学习的主动建构性。

《义务教育数学课程标准(2022 版)》(以下简称课标)在初中阶段是属于图形与几何的内容，集中在初二、初三两个阶段[2]，不仅与实际生活相关联，还为后面学习其他数学知识奠定基础。在实际的三角形教学中，从八上到九下都涉及到三角形知识点，学习战线较长，且其他知识点的考查也会涉及到一些三角形知识，内容错杂交错、关联性差，导致学生学习困难，针对复杂的三角形知识体系，需要提出一个更有效的教学方法。结合当下三角形教学存在的问题，通过分析理论优势和知识结构层次，有针对性地提出关于 CPFS 理论的实际应用建议。

2. CPFS 结构理论的内涵

2.1. CPFS 理论发展现状

喻平教授在 2003 年首次提出了一种数学特有的认知结构——CPFS 结构，随后周大众在《CPFS 结构理论视域下的初中数学教学》中通过强调变式教学、注重开放性教学等教学策略以促进学生形成良好的 CPFS 结构[3]。吕有杰在《例谈如何在解题教学中发展完善学生的 CPFS 结构》中提出 CPFS 结构可以更好的提高学生的数学解题能力，并分析了如何建构这种模式[4]。随后 CPFS 理论经过一系列的发展，但仍然有很多不足之处，尤其是在初中三角形教学方面的研究。

2.2. CPFS 结构理论的定义

CPFS 结构包含概念域、概念系、命题域以及命题系[5]，一个数学概念能进行不同的定义，如平行四边形的概念为两组对边分别平行的四边形是平行四边形，或一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，概念域便是这些定义的组合，如图 1 所示。

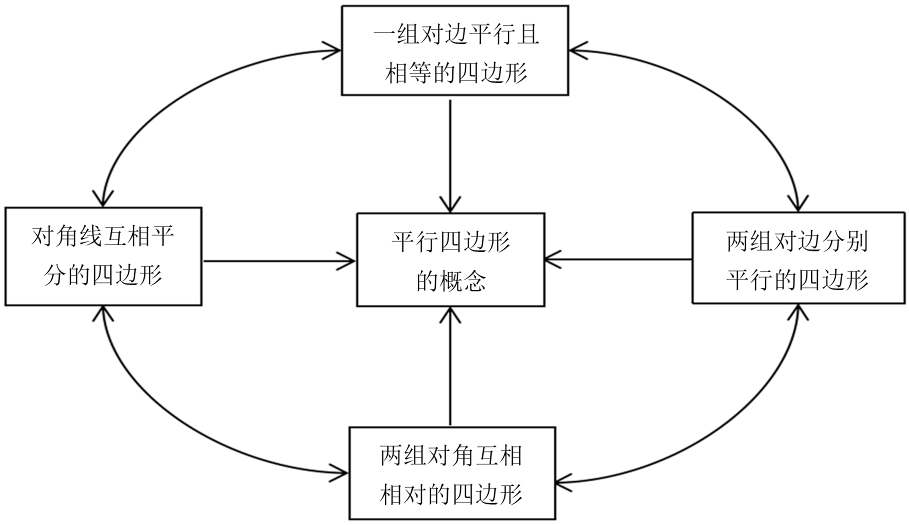

Figure 1. Schematic diagram of parallelogram concept domain
图 1. 平行四边形概念域示意图

“概念系”是指学生在脑海中形成的概念域，且清晰地知道各个概念之间的关系，如强抽象、弱抽象、广义抽象。例如三角形的概念系可以在学生的脑海中形成，学生在脑海中形成管旭三角形概念之间关系的网络图，如图 2 所示。A 为边；B 为三角形；C 为角；D 为直角三角形；E 为等边三角形；F 为钝角三角形；G 为全等三角形；H 为相似三角形；I 为解三角形。如下图 2 所示。

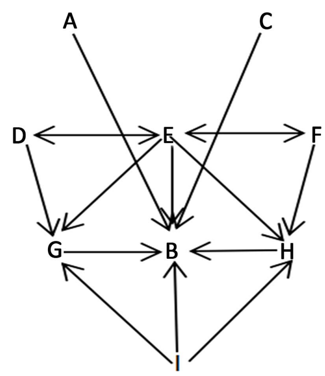

Figure 2. Schematic diagram of triangle concept system
图 2. 三角形概念系示意图

“命题域”指学习其中一个命题后脑海中形成一组等价命题。如垂直平分线上任一点到两边的距离相等的三角形等价于等腰三角形顶角与其对边的连线是对边的垂直平分线。“命题系”是指头脑中的命题之间存在的关系，存在推导关系。

在概念学习中，要从不同角度去理解、运用它，即掌握它的同组等价定义，才能形成概念体系，同

样在命题学习中处理命题时，需要选用合适的方法，选出合适的命题去解决相同的问题，因此个体的 CPFS 结构与数学学习间有直接的关系。

3. CPFS 结构在数学学习中的应用优势

3.1. CPFS 结构有助于帮助数学理解

数学理解是指学生能对数学知识做出合适、准确的表征，了解知识间的关系并形成图示[6]。CPFS 结构准确描述了这种综合图示，从各个知识单元到形成知识网络的过程。以“三角形”概念域和概念系为例进行分析，首先，从纵向上看，三角形的上位(弱抽象)概念是全等三角形、相似三角形，下位概念(强抽象)是三角形性质及应用；从横向上看，三角形的性质、锐角三角函数等概念之间有丰富的联系；其次，理解三角形与图形的关系，三角形的概念进行表象表征，得出完整图式。这个图式含有变量(如包含许多形式不同的三角形的某些特征：全等、等腰、等边、相似等)，按层级组织，而且能促进推论(如全等三角形的特征、相似三角形的特征、等腰及等边三角形的特征等性质)，进而形成三角形的概念域和概念系。

3.2. CPFS 结构有助于学习迁移

常见的迁移是指一种学习对另一种学习的影响，而实际上不只是某一种，可能是多种其他学习。一个完善的 CPFS 结构代表着既储存了大量的知识，另一方面又把知识定位在合适的某个区域，且对于知识间的联系十分清晰，当学习者需要提取信息时，可以通过知识网络中的重要结点来搜寻，因此为迁移的产生提供了更为合适的通道。

3.3. CPFS 结构有助于发展能力

当学习者在解决探究性问题时，问题间存在一些逻辑关系，那么储存的逻辑关系越清晰就越容易被提取，且 CPFS 结构本身蕴含着数学思想方法，更有利于解题问题。喻平教授在通过一系列实证研究发现：个体 CPFS 结构与探究问题能力之间存在显著性相关[6]。优良 CPFS 结构的学生能够更好的理解问题本身，而不良的则不能从多角度、多层面去观察和解决问题，对于学业成绩优良 CPFS 结构的学生也比不良的要更好[7]。

4. 三角形知识分布和知识结构的教学分析

数学知识中的概念、命题、法则等在一定的范围内会存在某种关系将其联结，形成可外显的知识网络[8]。本文主要是对三角形的内容进行研究，因此整理了初中阶段三角形知识点，如下表 1 所示。

Table 1. Triangular knowledge distribution table
表 1. 三角形知识分布表

年级	知识点分布
八年级	与三角形有关的线段、有关的角
	全等三角形及其判定
	等腰、等边三角形
	勾股定理及其逆定理
九年级	相似三角形及其判定
	锐角三角函数、解直角三角形及应用

通过构建三角形 CPFS 结构并将之用至教学当中有利于更好地呈现知识点，有助于学生理解，将初

中所有三角形知识进行整合，如上表 1 中主要包括三角形概念形成的概念域以及概念系；三角形判断以及各个判定之间关系的命题域与命题系。对于三角形之间的概念系采取抽象度分析法来描述三角形概念之间的关系，如下图 3 所表示的直角三角形概念系。

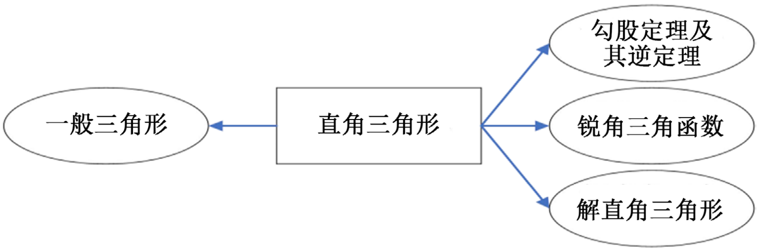

Figure 3. Conceptual system of acute triangle
图 3. 锐角三角形概念系

而且，全等三角形之间的关系错综复杂，存在大量的命题，如果学生可以充分了解全等三角形各个命题之间的关系，便更有助于学生学习，因此构建关于全等三角形的命题域，如图 4 所示。

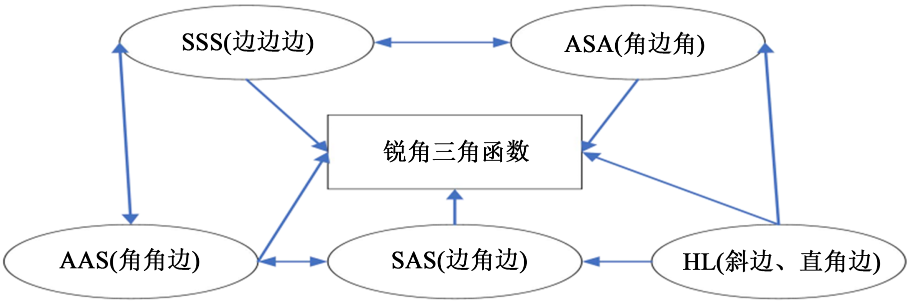

Figure 4. Proposition field of identical triangles
图 4. 全等三角形命题域

通过上图可以发现全等三角形的各个判定之间是互相关联，可以相互推导的，学生通常死记硬背不理解根本原因，如果教师将其应用，学生掌握三角形 CPFS 结构下全等三角形的命题域，学生在遇到此类问题便会熟记于心。同样的方法，构建相似三角形命题域，等腰三角形的判定、直角三角形的判断等，将它们之间的关系呈现，便是 CPFS 结构下三角形的命题系，便如同知识网络一般环环相扣，但又不杂乱。

从八年级上册到九年级下册，基本上每个学期都会涵盖三角形相关线段、相关角及三角形相关性质、定理等，它们是层层递进的，与之前七年级学习的几何图形初步和之后学习的勾股定理之间有着广义上抽象关系；与平行四边形、轴对称图形中的某些概念之间存在着弱抽象和强抽象。从三角形知识分布可以了解教材对于其知识的编排，下面以研究初中三角形知识结构为目的对初中三角形知识顺序和知识进行整体把握后，得到的分布顺序图如图 5 所示。

通过建立关系图更直观的对三角形之间的知识点进行把握，更有利于教师教学，学生在这个过程中构建三角形知识网络图，逐渐形成概念域与概念系，对知识不断进行同化与顺应，因此形成自己的图式，这个形成概念域的过程与皮亚杰认知主义理论不谋而合。

总之，学生如果能建立一个良好的 CPFS 结构，把三角形相关概念、命题作为重要结点，以它们间的抽象关系作为纽带，以数学思想方法作为工具，然后按照自己的思维方式进行建构，生成具有内部规律的知识网络，那么学生成绩的提升是必然的。

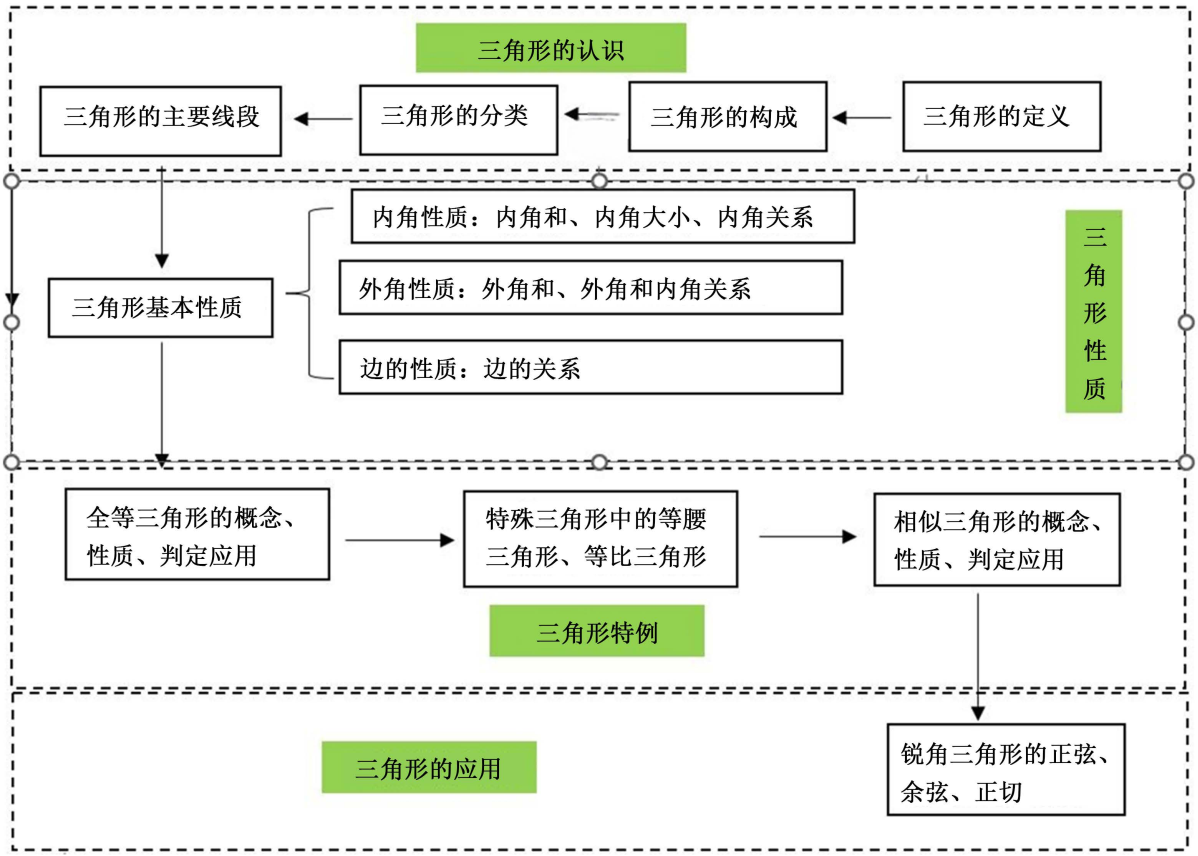

Figure 5. Triangle knowledge sequence diagram
图 5. 初中三角形知识顺序图

5. CPFS 结构理论在三角形实际教学中的应用建议

5.1. 变式教学深化知识理解，打破思维定势

当前考试越来越注重学生对于探究性、创新性题型的解答，因此只掌握基础知识和技能是不够的，而通过变式训练让学生的思维更加多变是极其需要的，教师以教学理论为基础，通过设计多样化的问题串或问题组，来引导学生由浅入深、循序渐进的思考，从问题的由来、发展、到结构的变化，乃至解决问题，这一整个思维的过程，都能帮助学生建构知识系统并拓宽其思维。

在概念教学中，可以从多维度去学习来把握概念的内涵和外延。例如在讲解三角形的高的过程中，可以通过做出不同三角形的高，再变化它们的大小或位置，可以发现不管如何变化，它的高都是从顶点出发，作该点对边的垂线，其他的因素不会改变三角形高的本质。在命题教学中通过对命题进行换位推理变化来加深理解。在学习三角形内角和定理时，可以这样变式来达到目的：首先，已知两个内角的度数，求剩下一个内角的度数；其次，已知一个外角的度数和一个与该角不相邻的一个内角的度数，求与外角不相邻的另一个内角的度数；最后，再加入角平分线来进行变式，求一个变化后的三角形的内角。这样通过一系列变换，让学生亲自体会自主、分析对比，会更加加深对三角形内角和的理解。

5.2. 注重引导式教学，构建良好认知结构

学生的 CPFS 结构越成熟，所表现出来的成绩也越优秀，因此建立一个良好的数学认知结构，可以按以下方式尝试。

首先，在实际教学中教师应该自身对三角形相关知识结构熟记于心，在讲解时注重方法的多样性，注重让学生归纳其中知识点间的联系，建立知识网络；其次，常见的类比、模型、数形结合思想等数学思想方法要注重渗透，例如从一般三角形到等腰、等边三角形就是从一般到特殊的思想；最后，可以帮助学生建立知识图谱或思维导图来联系所有知识点，保证知识点在头脑中是脉络清晰的。

5.3. 分层教学改善认知结构，强化学习动机

影响学习效果的因素有很多，如学生的已有知识储备、学习兴趣、习惯等，从整体教学来说，教师面对全体学生，因此要做到因材施教也就是分层教学，对学生的学习情况、心理状态等各方面进行一定了解，并结合最近发展区理论制订有目的性的计划，增强学生的学习兴趣，强化他们的学习动机。从三角形知识结构来看，内容比较多、编排较复杂，在解决问题过程中易出现知识点混乱的情况，因此教师要从多层次、多维度进行针对不同水平学生的教学。

在三角形实际教学中，对于三角形概念、性质及其简单应用，包括全等三角形、相似三角形的简单证明可以对基础薄弱的学生设置，避免引起学生的负面情绪，而涉及到全等三角形结合三角形基础知识或相似三角形结合基础知识的题型设置给基础较好的学生，最后把解三角形的实际应用包括一些扩展题型布置给水平较高的学生，通过这样的布置方式让学生都能学有所得，并提升其数学能力。

6. 结语

本文针对当前初中三角形的教学现状，根据课标、三角形的知识结构和分布、学生特点等，结合 CPFS 结构理论提出了一些实际教学对策并进行举例分析，重点还是帮助学生加强对知识的内化，构建完善的认知结构，进而提升数学思维、增强核心素养。

参考文献

[1] 楚伶. 支架式教学在对数函数解题教学中的应用研究[J]. 教育教学论坛, 2021(38): 123-127.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[3] 周大众. CPFS 结构理论视域下的初中数学教学[J]. 中学数学教学, 2012(5): 17-20.

[4] 吕有杰. 例谈如何在解题教学中发展完善学生的 CPFS 结构[J]. 中学数学研究, 2014(10): 7-9.

[5] 张鹏. 基于 CPFS 结构理论的初中数学教学探究[J]. 数学学习与研究, 2022(34): 119-121.

[6] 喻平. CPFS 结构与数学命题教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2016(2): 5-10.

[7] 傅赢芳, 喻平. CPFS 结构理论及其对数学概念教学的启示[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2020(6): 28-33.

[8] 张金花. 初中生三角形 CPFS 结构研究[D]: [硕士学位论文]. 漳州: 闽南师范大学, 2022.