Applied Physics 应用物理, 2019, 9(10), 410-415
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2019.910050

Why Don't Ordinary Rays and Extraordinary Rays Depart from Each Other in Wave Plate

Yijian Zhao

School of Optics and Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing
Email: zhao_yi_jian@126.com

Received: Oct. 9th, 2019; accepted: Oct. 21st, 2019; published: Oct. 28th, 2019

Abstract

The phenomenon of ordinary rays and extraordinary rays not departing from each other is explained by Huygens construction and theoretical calculation, respectively. The calculation methods and results for angle of refraction of extraordinary rays in different references are compared and discussed.

Keywords

Wave Plate, Ordinary Rays, Extraordinary Rays, Angle of Refraction, Huygens Construction

波片中的*o*光和*e*光为什么不分开

赵一鉴

北京理工大学光电学院，北京
Email: zhao_yi_jian@126.com

收稿日期：2019年10月9日；录用日期：2019年10月21日；发布日期：2019年10月28日

摘 要

本文应用惠更斯作图法和理论计算法对波片中*o*光和*e*光不分开现象进行了解释，并对不同文献中*e*光折射角的计算方法和结果进行了比较。

文章引用: 赵一鉴. 波片中的 *o* 光和 *e* 光为什么不分开[J]. 应用物理, 2019, 9(10): 410-415.
DOI: 10.12677/app.2019.910050

关键词

波片，寻常光，非寻常光，折射角，惠更斯作图

1. 引言

一束自然光通过各向异性晶体后会分为两束线偏振光，这是晶体的双折射现象。观察双折射现象最简单的方法是把一个方解石晶体放在书本上，透过晶体会发现字体出现重影。在晶体中，存在一个特殊方向，称为光轴，当光沿此方向射入晶体时，不发生双折射。可是当光通过波片时，出射光也只有一束。波片是切得很薄的晶体，并且光轴与晶体表面平行。因此当光垂直射入波片时，入射光与光轴是垂直的。既然仅当光沿晶体光轴方向传播时才不出现双折射，为什么入射光垂直光轴时出射光也只有一束？

对于这个问题，一般的大学物理教材限于篇幅[1] [2] [3]，没有讨论，只有物理光学教材和部分的大学物理教材才对这种情形用惠更斯作图法进行了描述[4] [5] [6]，但并未指明具体的应用场合(即未指明这正是波片的应用场合)，而光在晶体内传播的解析解只在专业文献中进行过研究[7] [8] [9]，导致许多人对这个问题感到困惑。波片是一种常用的光学元件，在光的偏振状态转换中起着重要作用，如半波片能把水平偏振和垂直偏振互换，1/4 波片能把线偏振和圆偏振互换，所以解答这个问题对于理解波片工作原理和使用操作很有必要。显然如果不对光在晶体内的传播过程有所了解的话，是无法回答这个问题的。下面应用惠更斯作图法和解析计算法对这个现象进行解释。

2. 光在晶体内的传播规律分析

o 光是寻常光，它在晶体内的传播规律比较简单，遵守斯涅尔折射定律，所以我们要重点了解 *e* 光在晶体内的传播规律，以负单轴晶体为例，即有 $n_o > n_e$，在晶体内 *e* 光的传播速度大于 *o* 光的传播速度。

2.1. 惠更斯作图法

根据惠更斯作图法，可以画出光在晶体内的传播过程，如图 1 所示。鉴于很多教材对作图方法讲得不是很明白，尤其是 A 点的选取与圆和椭圆参数的关系以及椭圆空间方位的确定。下面分步骤详细讲解惠更斯作图方法。为了方便作图，设入射面与主截面重合，即入射线、法线、光轴在同一平面，这时 *o* 光和 *e* 光也在这个平面内，问题可以大大简化。

惠更斯作图法步骤：

(1) 在界面上任取一点 A，作平行于入射线的直线 AB。

(2) 过入射点 O 作垂直于 AB 的垂线，垂足为 B，$\Delta t = \overline{AB}/c$。

(3) 以 O 为中心，$v_o\Delta t$ 为半径作圆；以 O 为中心，以 $v_o\Delta t$ 为半短轴、$v_e\Delta t$ 为半长轴作椭圆，其中 v_o 和 v_e 分别对应晶体主折射率 n_o 和 n_e 的光速，即 $v_o = c/n_o$，$v_e = c/n_e$，使椭圆的短轴与光轴重合，长轴与光轴垂直。圆和椭圆在光轴处相切。

(4) 过 A 点分别作圆和椭圆的切线，切点分别为 C 和 D。

(5) 分别连接 OC 和 OD，即为 *o* 光和 *e* 光在晶体内的传播方向。

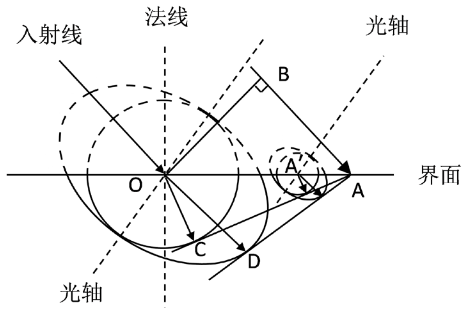

Figure 1. The propagation of light in negative refraction crystal using Huygens' construction
图 1. 光在负晶体内传播的惠更斯作图法

几点说明：

(1) 为了清晰地表示圆和椭圆与光轴的相对位置关系，图 1 中把整个圆和椭圆都画了出来，这一点不同于教材中的画法。很多教材为了表示光在晶体内的传播，只画出了波面在晶体内的半圆和椭圆部分，界面以上的部分略去，使读者不易看出光在晶体内传播的球面波和椭球面波，此外，也不容易看出椭圆的方位与光轴之间的关系。

(2) A 点的选取是任意的，但 A 点一旦确定下来，则圆的半径和椭圆的两个半轴也随之确定。从图中可以看出，圆的半径和椭圆的半短轴为 $v_o\Delta t = c/n_o \times \overline{\mathrm{AB}}/c = \overline{\mathrm{AB}}/n_o$，椭圆的半长轴 $v_e\Delta t = c/n_e \times \overline{\mathrm{AB}}/c = \overline{\mathrm{AB}}/n_e$。

(3) 仅有椭圆的半长轴和半短轴还不足确定椭圆的方位。在光轴方向，*o* 光和 *e* 光传播方向一致，速度相同。同时，光轴方向也是 *e* 光传播速度最小的方向(对负晶体而言)，所以光轴方向就是椭圆的短轴方向。

(4) 对于同一波面上的入射光而言，A 点的入射光到达界面上的时间比 O 点的入射光晚了 Δt 时间，也就是说，在 Δt 时间内，O 点发出的次波面是以 $v_o\Delta t$ 为半径的半圆面，这样 A 点处发出的 *o* 光与 C 点的 *o* 光光波是同相位的。OA 之间所有面元形成的次波面都是以界面上一点为圆心、以相应长度为半径的半圆面，如图中以 A′为圆心的小圆所示，这些次波叠加后形成的包络面就是包含直线 AC 在内的平面。这个平面与 O 点发出的次波面相切于 C 点，根据惠更斯原理，连接 OA 的方向就是入射点 O 处的 *o* 光传播的方向。同样 OD 方向是 *e* 光传播方向。

现在回到本文提出的问题：波片中的 *o* 光和 *e* 光为什么不分开？现在的情形与图 1 的情形稍有不同，现在入射光是垂直界面入射，O 点和 A 点的入射波不存在时间延迟，它们在波片中发出相同的次波面。同时，由于光轴平行于界面，椭圆的短轴也平行于界面，椭圆的长轴在法线方向，所以椭圆是个正椭圆，如图 2 所示。*o* 光和 *e* 光形成的次波包络面都是与界面平行的平面，它们与 O 点发出的次波波面相切于 B、D 两点，与 A 点发出的次波波面相切于 C、E 两点。对于入射点 O 处的入射光而言，*o* 光沿 OB 方向，*e* 光沿 OD 方向，可见它们同方向，都在法线方向上，即 *o* 光和 *e* 光的折射角都为零，故 *o* 光和 *e* 光不分开。A 点的入射光亦是如此。

以上用惠更斯作图法简单演示了光线在晶体内的传播过程。如果要定量地给出 *o* 光和 *e* 光在晶体内的折射角度，上述方法就无能为力了，需要采用数学解析方法。

2.2. 晶体内光传播的解析计算方法

在用公式求解光线在晶体内的一般传播规律时，输入参数是：入射角 i、光轴与晶体表面的夹角 θ、

入射面与主截面(晶体表面的法线与光轴组成的平面)所成的角 φ_1、晶体的主折射率 n_o 和 n_e。这里之所以需要 φ_1，是因为根据三维空间的几何关系，仅由 i 和 θ 尚不足以确定 φ_1。需要计算的参数是：o 光折射角 α、e 光折射角 β、e 光折射面与入射面之间的角 γ 或者折射面与主截面之间的夹角 φ_2。由于 o 光折射服从斯涅尔定律，计算较为简单，下面主要介绍 e 光折射角和折射面的计算。

当光轴在入射面内，即入射面与主截面重合时，有 $\varphi_1 = 0$，这时 e 光折射面与入射面一致，即有 $\gamma = 0$，计算过程可大大简化，只需计算 α、β 即可，根据图 1 的几何关系，问题转化为一个平面解析几何问题。为简化计算，取光轴方向为 X 轴，椭圆的长轴方向为 Y 轴，入射光以输入角 i 从空气射向晶体表面，如图 3 所示。令线段 $\overline{\text{AB}} = 1$，则椭圆的半长轴和半短轴分别为 $1/n_e$ 和 $1/n_o$。

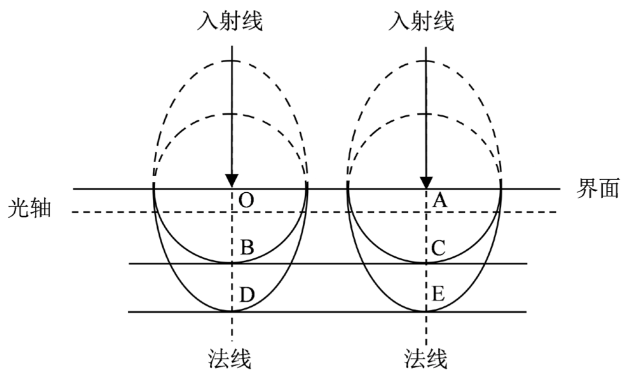

Figure 2. Huygens' construction in the case of a beam of light normally incident on a wave plate

图 2. 入射光垂直入射波片时的惠更斯作图法

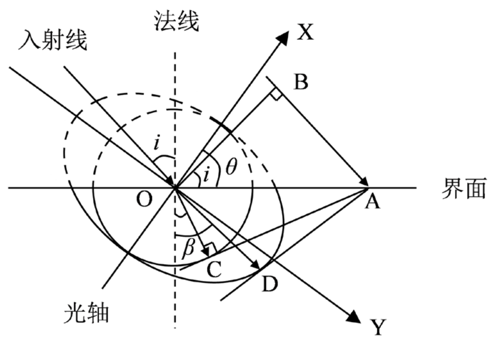

Figure 3. Refraction angle calculation for negative refraction crystal

图 3. 负折射晶体中折射角的计算

从图中可以看出，OA 的长度为 $\overline{\text{AB}}/\sin i$，它与 X 轴的夹角为 θ，故 A 点坐标为 $\text{A}(\cos\theta/\sin i, \sin\theta/\sin i)$。在直角三角形 OCA 中，$\angle\text{OAC} = \alpha$，OC 长度为 $1/n_o$，我们有 $\sin\alpha = \text{OC}/\text{OA} = \sin i/n_o$，这正是斯涅尔定律，即 o 光是遵守折射定律的。求 e 光的折射角时，如果知道 D 点的坐标 $\text{D}(m,n)$，从图中可以看出 $\angle\text{AOD} = \pi/2 - \beta$，直线 OD 与 X 轴的夹角为 $\theta + \angle\text{AOD}$，故而对于 D 点有 $\tan(\theta + \pi/2 - \beta) = n/m$，即有 $\tan(\theta - \beta) = -m/n$，此时问题转化为从椭圆外一点作椭圆的切线，求切点坐标问题。

先在一般情况下求这个问题的解。设椭圆方程为 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$，过椭圆外一点 (x_0, y_0) 作椭圆的切线，要求切点坐标 (m,n)。椭圆上一点 (m,n) 处的切线斜率为 $-b^2m/a^2n$。又切线过 (m,n) 和 (x_0, y_0) 两

点，故切线斜率为$(y_0-n)/(x_0-m)$，令两者相等，并联合椭圆方程，得到关于 m、n 的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{y_0-n}{x_0-m}=-\dfrac{b^2m}{a^2n}\end{cases} \tag{1}$$

从以上方程组中消去 n，经整理后得到关于 m 的一元二次方程

$$\left(a^2y_0^2+b^2x_0^2\right)m^2-2a^2b^2x_0m+a^4\left(b^2-y_0^2\right)=0 \tag{2}$$

得到 m 的两个解为

$$m=\frac{a^2b^2x_0\pm a^2y_0\sqrt{\Delta}}{a^2y_0^2+b^2x_0^2} \tag{3}$$

其中，$\Delta=a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2$，它是大于 0 的，证明如下：

$$\Delta=a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right) \tag{4}$$

对于椭圆外一点(x_0,y_0)，显然有$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$，故$\Delta>0$。方程(3)的两个根分别对应从椭圆外一点向椭圆作切线的两个切点的横坐标。但在图 3 的情形下，我们只需要求界面下面的切点坐标。由于 A 点位于第一象限，x_0 和 y_0 都大于 0，而 D 点位于第二象限，应有$m<0$，故而式(3)只能取减号，即

$$m=\frac{a^2b^2x_0-a^2y_0\sqrt{\Delta}}{a^2y_0^2+b^2x_0^2} \tag{5}$$

由方程组(1)还可得到

$$n=\frac{a^2b^2-b^2x_0m}{a^2y_0} \tag{6}$$

把 m 的值代入上式，得到

$$n=\frac{a^2b^2y_0+b^2x_0\sqrt{\Delta}}{a^2y_0^2+b^2x_0^2} \tag{7}$$

由$\tan(\theta-\beta)=-m/n$，得

$$\frac{\tan\theta-\tan\beta}{1+\tan\theta\tan\beta}=-\frac{m}{n} \tag{8}$$

化简后得到

$$\tan\beta=\frac{\tan\theta+m/n}{1-\tan\theta\, m/n}=\frac{\left(a^2b^2y_0+b^2x_0\sqrt{\Delta}\right)\tan\theta+a^2\left(b^2x_0-y_0\sqrt{\Delta}\right)}{a^2b^2y_0+b^2x_0\sqrt{\Delta}-a^2\left(b^2x_0-y_0\sqrt{\Delta}\right)\tan\theta} \tag{9}$$

把$a=1/n_o$，$b=1/n_e$，$x_0=\cos\theta/\sin i$，$y_0=\sin\theta/\sin i$ 代入上式，整理后得到

$$\tan\beta=\frac{1}{n_o^2\cos^2\theta+n_e^2\sin^2\theta}\left[\left(n_o^2-n_e^2\right)\cos\theta\sin\theta+\frac{n_on_e\sin i}{\sqrt{n_o^2\cos^2\theta+n_e^2\sin^2\theta-\sin^2 i}}\right] \tag{10}$$

对于光垂直波片入射情形，入射角$i=0$，光轴平行界面，$\theta=0$，代入上式，得到$\tan\beta=0$，因而 e

光折射角为 0。同时，o 光遵守折射定律，折射角也为 0，因而 o 光和 e 光同向传播而不分开。

从式(10)可以看出，当入射角 $i=0$，而 $\theta \neq 0$ 时，e 光折射角不为 0。这和 o 光情形截然不同。对于 o 光来说，当 $i=0$ 时，不论介质折射率多大，折射角始终为 0。可见，e 光不走寻常路线，非寻常光的名称名副其实。

文献[7]用费马原理计算了光轴在入射面内时 e 光的折射规律，文献[8]也是结合惠更斯作图法进行计算，但方法与本文不同，中间参数较多，计算过程较为繁琐。相比之下，本文的方法比较简洁，并且得到了折射角的完整表达式。

文献[9]针对一般情况下 e 光在晶体内的传播规律进行了研究，即当光轴不在入射面内的情况下给出了理论计算结果。当光从折射率为 n_i 的各向同性介质中射入晶体时，折射面与主截面之间的夹角 φ_2 及折射角 β 如下：

$$\cot\varphi_2 = \frac{n_e^2}{n_o^2\cos^2\theta + n_e^2\sin^2\theta}\left[\cot\varphi_1 + \frac{\left(n_o^2 - n_e^2\right)\sin\theta\cos\theta}{n_i n_0 n_e \sin i \sin\varphi_1}\Omega\right] \tag{11}$$

$$\tan\beta = \frac{n_o n_e}{\Omega} \times \sqrt{\frac{n_i^2\sin^2 i \sin^2\varphi_2}{n_e^4} + \left[\frac{n_i n_o n_e \sin i \cos\varphi_1 + \Omega\left(n_o^2 - n_e^2\right)\sin\theta\cos\theta}{n_o n_e\left(n_o^2\cos^2\theta + n_e^2\sin^2\theta\right)}\right]^2} \tag{12}$$

其中

$$\Omega = \sqrt{\left(n_o^2\cos^2\theta + n_e^2\sin^2\theta\right)\left(1 - \frac{n_i^2\sin^2 i\sin^2\varphi_1}{n_e^2}\right) - n_i^2\sin^2 i\cos^2\varphi_1} \tag{13}$$

可以验证，当 $\varphi_1 = 0$ 时，$\varphi_2 = 0$，式(12)与式(10)相同。由于当光轴不在入射面内时，各线和面之间的空间几何关系较为复杂，具体推导和计算过程参见文献[9]。

3. 结束语

波片是一种重要的光学元件，一般用于转换输入光的偏振状态。它是利用了 o 光和 e 光在波片中传播方向一致且速度不同的特点，在两种偏振光之间引入相位差，从而改变原入射光的偏振状态，所以理解 o 光和 e 光在波片中为什么不分开具有重要意义。通过本文以上的分析和计算可知，o 光和 e 光在波片中不分开仅仅是双折射现象的一种特例，只有在光垂直入射晶体表面，且光轴与晶体表面平行这种特殊情况下才发生。而当光沿光轴传播时，o 光和 e 光不但传播方向一致，传播速度也相同，光沿光轴传播相当于在各向同性介质中的传播，不改变原入射光的偏振状态。这是两种光传播情形的重要区别。

参考文献

[1] 徐红霞，陈光龙，张修丽，汪丽莉，刘烨. 大学物理(下) [M]. 北京：清华大学出版社, 2013.

[2] 梁荫中，张琳，汤钧民. 大学物理(下) [M]. 武汉：华中科技大学出版社, 2006.

[3] 王秀敏. 新编大学物理(下) [M]. 北京：北京邮电大学出版社, 2012.

[4] 郑少波，李英兰. 大学物理(第二卷)波动与光学[M]. 北京：高等教育出版社, 2017.

[5] 刘娟，胡滨，周雅. 物理光学基础教程[M]. 北京：北京理工大学出版社, 2017.

[6] 梁铨廷. 物理光学(第四版) [M]. 北京：电子工业出版社, 2012.

[7] 许方官. 非寻常光的折射规律[J]. 大学物理, 1996, 15(5): 21-24.

[8] 张智，周群益，陈曙光，周期. 单轴晶体主截面内 e 光折射角和阵面角的计算和作图[J]. 大学物理，2006，25(1): 19-22.

[9] 刘才明. 单轴晶体光轴任意取向时非寻常光的折射规律[J]. 光学技术, 2002, 28(6): 559-563.