Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2424-2435
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135230

保险模型中的 Stackelberg 博弈

孙少迪，梁晓青*

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2024年4月29日；录用日期：2024年5月22日；发布日期：2024年5月31日

摘 要

本文研究保险问题中的单期 **Stackelberg** 博弈的均衡解。假设再保险公司的保费原则是 $\Pi(R) = \mathbb{E}[P(X-R)]$，本文使用的目标函数包括最小化风险的凸度量，最大化期末财富的预期效用，最大化期末财富的二次效用。通过对变量函数进行 **Taylor** 展开，得到保险公司留存函数以及再保费价格的最优近似解。

关键词

Stackelberg 博弈，效用准则，风险度量，近似解

Stackelberg Game in Insurance Models

Shaodi Sun, Xiaoqing Liang*

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Apr. 29th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

We consider the equilibrium solution to the single-period Stackelberg game in the

* 通讯作者。

文章引用: 孙少迪, 梁晓青. 保险模型中的 Stackelberg 博弈[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2424-2435.
DOI: 10.12677/aam.2024.135230

insurance problem. Assuming that the premium principle is $\Pi(R) = \mathbb{E}[P(X-R)]$, we use objective functions that include minimizing the convex measure of risk, maximizing the expected utility of terminal wealth, and maximizing the quadratic utility of terminal wealth. By applying Taylor expansions to the variables, we obtain optimal approximate solutions for the insurer retention function as well as the premium price.

Keywords

Stackelberg Game, Utility Criteria, Risk Measure, Approximate Solution

1. 引言

风险理论是金融和保险的重要组成，为了更好地应对风险，保险公司始终将最优再保险问题放在重要的位置。大量文献在三个准则下研究最优再保险的问题。1. 保险公司终端财富效用最大化准则；2. 保险公司破产概率最小化准则；3. 均值-方差准则。在效用最大化准则下，常用的效用函数有指数函数，对数函数以及二次效用函数。Cao 和 Wan [1] 关注终端财富效用最大化的最优问题，考虑了指数效用和幂效用下的投资策略。如文献 [2, 3], 均是在指数效用函数下研究的投资再保险问题。

随着金融保险的发展，对最优再保险的研究不仅仅从效用理论方面，利用风险度量来研究最优再保险问题的文章也很多。它与经典的预期效用模型不同，采用的是风险测度来量化风险。Barrieu 和 Loubergé [4] 使用一种凸风险度量来量化三个代理人的风险。文献 [5, 6] 详细介绍了凸风险度量的一些性质。具有各种风险测度和保费原则的经典最优再保险问题被广泛研究，Cai 等 [7] 通过最小化再保险公司总留存损失的风险价值 (VaR) 和尾部条件期望 (CTE) 优化问题，建立了最优再保险设计的条件。Cui 等 [8] 采用失真风险度量来对最优再保险建立模型，使用期望保费原则和 Wang's 保费原则，得到了再保险策略的显示解。Zhuang 等 [9] 在一般的失真风险测度下，采用失真保费原则来研究最优再保险的模型。Lo [10] 利用假设检验中的 Neyman-Pearson 引理，解决了一类广泛的约束最优再保险问题。Liu 等 [11] 介绍了一类凸风险函数，并应用于保险公司的最优再保险设计上。

以上文章均是从保险公司的角度来考虑问题，如果将再保险公司的因素考虑进来，所得到的策略不一定是最优的。Borch [12] 指出同时考虑保险双方的利益是重要的。Chan 和 Gerber [13] 通

过最大化保险公司和再保险公司终端财富的期望效用函数，考虑效用函数为指数型，二次型和线性函数时，分别得到了再保险价格和留存损失的近似解。Cheung 等 [14] 在一般保费原理和失真风险度量下扩展了 Chan 和 Gerber [13] 的工作，第一步先确定保险公司的最优分让损失函数，第二步确定再保险公司的最优定价函数。Cai [15] 使保险公司和再保险公司的利益作为约束条件，来最小化保险公司和再保险公司损失的 VaR 风险度量的凸组合。在期望保费原则下推导出了一类最优再保险形式。Cai [16] 指出，当保险公司和再保险公司的损失都用尾部价值风险 (TVaR) 风险度量来衡量时，得到了在期望保费原则下的 Pareto 最优再保险合同的明确形式。另外，在效用最大化准则下，Chen 和 Shen [17] 分别研究了具有一般效用和指数效用的 Stackelberg 博弈问题。

在以上文献的研究基础上，我们分别采用效用最大化准则和风险度量建立模型。对保险公司和再保险公司，结合凸风险度量和效用函数考虑四组决策下的最优解。我们使用 Stackelberg 博弈的方法求解最优均衡解，对随机变量进行 Taylor 展开，通过比较参数的系数得到再保费最优价格和最优留存的显示表达。

本文余下内容安排如下：第 2 节给出模型与假设。第 3 节对保险公司和再保险公司的四组最优问题进行求解，给出了保险公司最优留存的显示解以及再保费价格的显式解。第 4 节对本文进行总结。

2. 模型与假设

假设本文所用的随机变量都定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上，我们的保险模型有两个时间点，$T = 0, 1$。假设在 $T = 1$ 时保险公司面临的损失大小为 X，R 是保险公司的留存风险损失，$I = X - R$ 是保险公司购买保险后获得的赔偿。假设以上变量均是非负的。

根据以下设定建立 Stackelberg 博弈模型，结合凸风险度量和效用函数，求解保险公司的最优留存函数以及再保费的最优价格。

1. 假设再保险公司根据以下保费原则对再保险费进行计算：

$$\Pi(R) = \mathbb{E}[P(X - R)]. \tag{1}$$

其中，P 表示再保费价格，满足 $P > 0$ 且 $\mathbb{E}(P) = 1$。

2. 假设保险公司和再保险公司的初始财富分别为 w_i 和 w_r，均代表常数。期末财富分别为 W_i 和 W_r，

$$W_i = w_i - \Pi(R) - R, \tag{2}$$

$$W_r = w_r - X + R + \Pi(R). \tag{3}$$

3. 根据文献 [4] 使用的熵风险度量来最小化保险公司和再保险公司的风险测度，

$$\rho_a(W_a) = \gamma_a ln\mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_a}W_a)].$$

其中，a 表示保险公司和再保险公司，W_a 表示终端财富，$\gamma_a > 0$ 表示损失厌恶系数。

下面，我们给定四组目标决策，分析这四组决策下最优解的情况。

1. 给定再保费的价格 P，保险公司的目标是选择最优的保险留存 R^* 来最小化他的风险测度，

$$\min_R \gamma_i ln\mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_i}W_i)]. \tag{4}$$

给定保险公司问题中求得的最优解 R^*，再保险公司选择一个最优的再保费价格来最小化他的凸风险测度，

$$\min_P \gamma_r ln\mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_r}W_r)]. \tag{5}$$

2. 最小化保险公司的凸风险测度以及最大化再保险公司的终端财富效用，

$$\min_R \gamma_i ln\mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_i}W_i)] \qquad \max_P \mathbb{E}(W_r). \tag{6}$$

3. 考虑使用二次函数来评估保险公司的决策问题，以及最大化再保险公司的终端财富效用，

$$\max_R \mathbb{E}(W_i - \frac{c}{2}W_i^2) \qquad \max_P \mathbb{E}(W_r). \tag{7}$$

4. 最大化保险公司终端财富的二次函数以及最小化再保险公司的凸风险测度，

$$\max_R \mathbb{E}(W_i - \frac{c}{2}W_i^2) \qquad \min_P \gamma_r ln\mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_r}W_r)]. \tag{8}$$

3. 模型求解

Stackelberg 博弈是按一定顺序来行动的非合作博弈。给定再保费的价格，我们计算保险公司最优的留存损失，以最大化保险公司的财富效用或最小化保险公司的风险。然后，我们计算再保险公司最优的再保费价格，使得再保险公司的目标决策达到最优。

第一组目标决策

定理1. 保险公司和再保险公司在风险度量的框架下，最优均衡解满足以下公式，

$$P \approx 1 + \frac{1+q}{2+q}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu) + \frac{3}{4}\frac{(1+q)^2}{(2+q)^2}\frac{1}{\gamma_i^2}[(X-\mu)^2 - \sigma^2], \tag{9}$$

$$R = \frac{1+q}{2+q}(X-\mu) + \frac{1}{4}\frac{(1+q)^2}{(2+q)^2}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu)^2 - \frac{3}{4}\frac{(1+q)^2}{(2+q)^2}\frac{1}{\gamma_i}\sigma^2. \tag{10}$$

证明 由风险测度的平移不变性，结合 (2)，我们将公式 (4) 重新写作 $\min_R \mathbb{E}[exp(\frac{1}{\gamma_i}(R+\Pi(R)))]$。

假设 R 最大化上述目标函数，引入随机变量 Q_1。设 $R_t = R + tQ_1$，其中 t 表示实数，将得到的函数定义为 $g(t)$

$$g(t) = \mathbb{E}[exp(\frac{1}{\gamma_i}(R_t + \Pi(R_t)))].$$

该函数的一阶导为

$$g'(t) = \frac{1}{\gamma_i}\mathbb{E}[exp(\frac{1}{\gamma_i}(R_t + \Pi(R_t)))(Q_1 - \mathbb{E}(PQ_1))].$$

由于 $g(t)$ 在 $t = 0$ 时取得最大值，即 $g'(0) = 0$。可以得到，

$$\mathbb{E}\big\{Q_1[exp(\frac{1}{\gamma_i}(R + \Pi)) - P\mathbb{E}(exp(\frac{1}{\gamma_i}(R + \Pi)))]\big\} = 0.$$

因为 Q_1 是任意的一个随机变量，那么中括号内的值为 0，

$$P\mathbb{E}(exp(\frac{1}{\gamma_i}(R + \Pi))) = exp(\frac{1}{\gamma_i}(R + \Pi)).$$

整理后得到，

$$R = \gamma_i ln(P) + k. \tag{11}$$

其中，k 表示常数。

对于再保险公司的问题，由风险测度的平移不变性，根据 (3)，目标函数 (5) 重新写为 $\min\limits_{P}\mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_r}(\Pi(R) - (X - R)))]$。结合公式 (1) 和 (11)，再保险公司的目标函数为，

$$\min_{P} exp[-\frac{1}{\gamma_r}\mathbb{E}(P(X - \gamma_i lnP))]\mathbb{E}[exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP))].$$

为了解上述优化问题，我们同样引入一个随机变量 Q_2，满足 $\mathbb{E}(Q_2) = 0$。设 $P_t = P + tQ_2$，设目标函数为 $g(t)$，

$$g(t) = exp[-\frac{1}{\gamma_r}\mathbb{E}(P_t(X - \gamma_i lnP_t))]\mathbb{E}[exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP_t))].$$

由于 $g(t)$ 在 $t = 0$ 时取得最大值，即 $g'(0) = 0$。计算得到，

$$\mathbb{E}\big\{Q_2[(X - \gamma_i lnP - \gamma_i)\mathbb{E}(exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP))) + \gamma_i\frac{1}{P}(exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP)))]\big\} = 0. \tag{12}$$

用 V 来表示 (12) 的中括号内的值，设 $Q_2 = V - \mathbb{E}(V)$，由于

$$Var(V) = \mathbb{E}(V^2) - (\mathbb{E}(V))^2 = \mathbb{E}[(V - \mathbb{E}(V))V] = 0.$$

那么，设 $V = c$，其中，c 表示常数。

$$(X - \gamma_i lnP - \gamma_i)\mathbb{E}(exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP))) + \gamma_i\frac{1}{P}(exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP))) = c. \tag{13}$$

设 $q = \frac{\frac{1}{\gamma_r}}{\frac{1}{\gamma_i}}$ 是一个定值，其中，$\frac{1}{\gamma_r}$ 和 $\frac{1}{\gamma_i}$ 都是足够小的数。那么，将 P 写作 $P = 1 + \frac{1}{\gamma_i}F_1 + \frac{1}{\gamma_i^2}F_2 + \cdots$，$F_1$ 和 F_2 都是关于 X 的函数且 $\mathbb{E}(F) = 0$。由 Taylor 展开公式，

$$
\begin{aligned}
lnP =& (P-1) - \frac{1}{2}(P-1)^2 + \cdots \\
\approx& \frac{1}{\gamma_i}F_1 + \frac{1}{\gamma_i^2}F_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_i^2}F_1^2, \\
\frac{1}{P} =& 1 - (P-1) + (P-1)^2 + \cdots \\
\approx& 1 - \frac{1}{\gamma_i}F_1 - \frac{1}{\gamma_i^2}F_2 + \frac{1}{\gamma_i^2}F_1^2, \\
P^{-q} =& 1 - q(P-1) + \frac{q(q+1)}{2}(P-1)^2 + \cdots \\
\approx& 1 - \frac{1}{\gamma_r}F_1 - \frac{1}{\gamma_r\gamma_i}F_2 + \frac{1}{2\gamma_r^2}F_1^2 + \frac{1}{2\gamma_i\gamma_r}F_1^2.
\end{aligned}
$$

由以上 Taylor 展开式得到，

$$
\begin{aligned}
&X - \gamma_i lnP - \gamma_i \approx X - F_1 - \frac{1}{\gamma_i}F_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_i}F_1^2 - \gamma_i \\
&\mathbb{E}(exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP))) \approx 1 + \frac{1}{2\gamma_r^2}\mathbb{E}(F_1^2) + \frac{1}{2\gamma_i\gamma_r}\mathbb{E}(F_1^2) + \frac{1}{\gamma_r}\mathbb{E}(X) - \frac{1}{\gamma_r^2}\mathbb{E}(XF_1) \\
&\gamma_i\frac{1}{P} \approx \gamma_i - F_1 - \frac{1}{\gamma_i}F_2 + \frac{1}{\gamma_i}F_1^2 \\
&exp(\frac{1}{\gamma_r}(X - \gamma_i lnP)) \approx 1 - \frac{1}{\gamma_r}F_1 - \frac{1}{\gamma_i\gamma_r}F_2 + \frac{1}{2\gamma_r^2}F_1^2 + \frac{1}{\gamma_i\gamma_r}F_1^2 + \frac{1}{\gamma_r}X - \frac{1}{\gamma_r^2}XF_1.
\end{aligned}
$$

那么，公式 (13) 近似为，

$$
X - F_1 - \frac{1}{\gamma_i}F_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_i}F_1^2 - qF_1 - \frac{1}{\gamma_r}F_2 + \frac{q}{2\gamma_r}F_1^2 + qX - \frac{q}{\gamma_r}XF_1 - F_1 + \frac{1}{\gamma_r}F_1^2 - \frac{1}{\gamma_i}F_2 + \frac{1}{\gamma_i}F_1^2 = c. \quad (14)
$$

对公式 (14) 取期望，比较 $(\frac{1}{\gamma_i})^0$ 和 $(\frac{1}{\gamma_i})^1$ 的系数，

$$
F_1 = \frac{1+q}{2+q}(X-\mu). \quad (15)
$$

$$
F_2 = \frac{3}{4}\frac{(1+q)^2}{(2+q)^2}[(X-\mu)^2 - \sigma^2]. \quad (16)
$$

由公式 (15) 和 (16)，计算保费价格和保险公司留存函数的近似解：

$$
P \approx 1 + \frac{1+q}{2+q}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu) + \frac{3}{4}\frac{(1+q)^2}{(2+q)^2}\frac{1}{\gamma_i^2}[(X-\mu)^2 - \sigma^2].
$$

$$
R = \frac{1+q}{2+q}(X-\mu) + \frac{1}{4}\frac{(1+q)^2}{(2+q)^2}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu)^2 - \frac{3}{4}\frac{(1+q)^2}{(2+q)^2}\frac{1}{\gamma_i}\sigma^2.
$$

□

第二组目标决策

定理2. 最小化保险公司的凸风险测度以及最大化再保险公司的终端财富效用，得到保费价格和保

险公司的留存函数分别为，

$$P \approx 1 + \frac{1}{2\gamma_i}(X-\mu) + \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu)^2 - \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma_i}\sigma^2,$$

$$R \approx \frac{1}{2}(X-\mu) + \frac{1}{16}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu)^2 - \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma_i}\sigma^2 + k.$$

证明 由于第一组和第二组决策保险公司的目标函数相同，根据第一组的解 (9) 和 (10) 得知，

$$R = \gamma_i ln(P) + k. \tag{17}$$

其中，k 表示常数。

接下来，我们需要解决再保险公司的决策，结合公式 (17)，再保险公司的目标函数等价为最大化公式 (18)，

$$\max_P \mathbb{E}(PX) - \gamma_i \mathbb{E}(PlnP) - \mathbb{E}(X) + \gamma_i \mathbb{E}(lnP). \tag{18}$$

要解决上述问题，首先我们引入一个随机变量 Q_3，满足 $\mathbb{E}(Q_3) = 0$. 设 $P_t = P + tQ_3$，那么相应得到关于 t 的函数 $g(t)$，且 $g(t)$ 在 $t = 0$ 时取得最大值，根据 $g(t)$ 的一阶导可以得到以下等式，

$$\mathbb{E}[Q_3(X - \gamma_i lnP + \gamma_i \frac{1}{P})] = 0. \tag{19}$$

同样的，设 (19) 小括号内的值表示为 V，计算得到，

$$X - \gamma_i lnP + \gamma_i \frac{1}{P} = c.$$

其中，c 表示常数。假设 $P = 1 + \frac{1}{\gamma_i}F_1 + \frac{1}{\gamma_i^2}F_2 + \cdots$，结合公式 (9) 和 (10)，

$$X - 2F_1 - \frac{2}{\gamma_i}F_2 + \frac{3}{2}\frac{1}{\gamma_i}F_1^2 = c.$$

取期望后得到，

$$\mathbb{E}(X) + \frac{3}{2}\frac{1}{\gamma_i}\mathbb{E}(F_1^2) + \gamma_i = c.$$

比较 $(\frac{1}{\gamma_i})^0$ 和 $(\frac{1}{\gamma_i})^1$ 的系数，计算得到，

$$F_1 = \frac{1}{2}(X-\mu), \tag{20}$$

$$F_2 = \frac{3}{16}[(X-\mu)^2 - \sigma^2]. \tag{21}$$

由公式 (20) 和 (21)，计算保费价格和保险公司留存函数的近似解，

$$P \approx 1 + \frac{1}{2\gamma_i}(X-\mu) + \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu)^2 - \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma_i}\sigma^2,$$

$$R \approx \frac{1}{2}(X-\mu) + \frac{1}{16}\frac{1}{\gamma_i}(X-\mu)^2 - \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma_i}\sigma^2 + k.$$

□

第三组目标决策

定理3. 考虑最大化效用准则下的再保险模型，效用函数分别为二次型和线性函数，分别得到保险公司留存函数和再保费价格的近似解，

$$R = fP + k \approx \frac{1}{2}(X-\mu) + k_0,$$

$$P = \frac{\sigma_P}{\sigma_X}X - \mu\frac{\sigma_P}{\sigma_X} + 1 \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{c} - w_i + \mu}(X-\mu).$$

证明 结合函数 (7)，保险公司的目标决策等价为，

$$\max_R (cw_i - 1)\mathbb{E}(R) + (cw_i - 1)\Pi(R) - c\Pi(R)\mathbb{E}(R) - \frac{c}{2}\mathbb{E}(R^2) - \frac{c}{2}\Pi^2(R).$$

引入一个随机变量 Q_4, 设 $R_t = R + tQ_4$，得到关于 t 的函数 $g(t)$，且 $g'(0) = 0$，根据 $g(t)$ 的一阶导可以得到以下等式，

$$\mathbb{E}\left\{Q_4[cw_i - 1 - (cw_i - 1)P + cP\mathbb{E}(R) - c\mathbb{E}(P(X-R)) - cR + cP\mathbb{E}(P(X-R))]\right\} = 0. \tag{22}$$

由于 Q_4 是任意的一个随机变量，(22) 的中括号内的值为 0，经过化简得到，

$$R = fP + k, \tag{23}$$

$$f = \frac{1}{c} - w_i + \mathbb{E}(R) + \mathbb{E}(P(X-R)). \tag{24}$$

结合公式 (23)，将 (24) 中 f 重新写作，

$$f = \frac{\frac{1}{c} - w_i + \mathbb{E}(PX)}{1 + Var(P)}. \tag{25}$$

接下来我们需要解决再保险公司的问题，根据公式 (25)，将保费重新写作 $\Pi(R) = w_i - \frac{1}{c} - k$。那么再保险公司的目标函数等价为，

$$\begin{aligned} &\max_P f \\ =&\max_{\rho,\sigma_P} \frac{\frac{1}{c} - w_i + \mu + \rho\sigma_X\sigma_P}{1 + \sigma_P^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

其中，ρ 是变量 X 和 P 的相关系数，σ_X 和 σ_P 是标准差。

若要最大化该目标函数，显然有 $\rho=1$。此时，(26) 中目标函数等价为，

$$\max_{\sigma_P} \frac{\frac{1}{c}-w_i+\mu+\sigma_X\sigma_P}{1+\sigma_P^2}.$$

对目标函数求一阶导，解得 σ_P 的值，

$$\sigma_P=\frac{\sqrt{(\frac{1}{c}-w_i+\mu)^2+\sigma_X^2}-(\frac{1}{c}-w_i+\mu)}{\sigma_X}.$$

此时，假设 σ_X 是一个足够小的数，因此将 σ_P 近似为，

$$\sigma_P\approx\frac{1}{2}\frac{\sigma_X}{\frac{1}{c}-w_i+\mu}.$$

由于 $\rho=1$，接下来我们假设 P 和 X 有下面的关系，$P=aX+b$。结合下面两个关系式，

$$\begin{cases}\mathbb{E}(P)=1,\\ Var(P)=\sigma_P^2\end{cases}$$

最后解得系数 a,b 的值，

$$\begin{cases}a=\dfrac{\sigma_P}{\sigma_X},\\ b=1-\dfrac{\sigma_P}{\sigma_X}\mu\end{cases}$$

那么，得到 P 的近似值，

$$P=\frac{\sigma_P}{\sigma_X}X-\mu\frac{\sigma_P}{\sigma_X}+1\approx1+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{c}-w_i+\mu}(X-\mu).$$

同样的，我们也可以得到 f 和 R 的近似解，

$$f\approx\frac{1}{c}-w_i+\mu,$$

$$R=fP+k\approx\frac{1}{2}(X-\mu)+k_0.$$

$\square$

第四组目标决策

定理4. 最大化保险公司终端财富的二次函数以及最小化再保险公司的凸风险测度，分别得到保险公司留存函数和再保费价格的近似解，

$$R=\frac{1+q}{2+q}(X-\mu)+k,$$

$$P=1+\frac{1+q}{2+q}\frac{1}{k}(X-\mu).$$

证明 结合公式 (23) 以及公式 $\Pi(R) = w_i - \frac{1}{c} - k$。那么 (8) 中再保险公司的目标函数等价为，

$$\min_P \gamma_r ln\mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_r}W_r)]$$
$$= \min_P \mathbb{E}[exp(-\frac{1}{\gamma_r}(-X + fP))].$$

其中，f 的表达式为公式 (25)。

首先，引入一个随机变量 Q_5，且 $\mathbb{E}(Q_5) = 0$。设 $P_t = P + tQ_5$，得到关于 t 的函数 $g(t)$，令 $g'(0) = 0$ 得到以下等式，

$$\mathbb{E}\left\{Q_5[(X - 2fP)\mathbb{E}(Pexp(-\frac{1}{\gamma_r}(-X + fP)) + (\frac{1}{c} - w_i + \mathbb{E}(PX))exp(-\frac{1}{\gamma_r}(-X + fP))]\right\}.$$

和前面类似的求解过程，计算得到，

$$V = (X - 2fP)\mathbb{E}(Pexp(-\frac{1}{\gamma_r}(-X + fP)) + (\frac{1}{c} - w_i + \mathbb{E}(PX))exp(-\frac{1}{\gamma_r}(-X + fP)) = c. \quad (27)$$

设 $q = \frac{\frac{1}{\gamma_r}}{\frac{1}{m}} = \frac{m}{\gamma_r}$，其中 $\frac{1}{\gamma_r}$ 和 $\frac{1}{m}$ 都是足够小的数，且 $m = \frac{1}{c} - w_i + \mu$。设 $P = 1 + \frac{1}{m}F_1 + \frac{1}{m^2}F_2 + \cdots$。结合公式 (25)，将 f 的表达式重新写作，

$$f = \frac{\frac{1}{c} - w_i + \mathbb{E}(PX)}{1 + Var(P)} \approx \frac{\frac{1}{c} - w_i + \mu + \frac{1}{m}\mathbb{E}(F_1X) + \frac{1}{m^2}\mathbb{E}(F_2X)}{1 + \frac{1}{m^2}\mathbb{E}(F_1^2)}.$$

将上述公式进行变形，得到，

$$f \approx m[1 + \frac{1}{m^2}\mathbb{E}(F_1X) - \frac{1}{m^2}Var(F_1)].$$

根据以上展开式以及 Taylor 展开式我们得到，

$$2fP \approx 2m + 2F_1 + \frac{2}{m}F_2 + \frac{2}{m}\mathbb{E}(F_1X) - \frac{2}{m}\mathbb{E}(F_1^2)$$
$$Pexp(-\frac{1}{\gamma_r}(-X + fP)) \approx exp(-q)(1 - \frac{1}{\gamma_r}F_1 + \frac{1}{\gamma_r}X + \frac{1}{m}F_1)$$
$$\frac{1}{c} - w_i + \mathbb{E}(PX) \approx m + \frac{1}{m}\mathbb{E}(F_1X)$$
$$exp(-\frac{1}{\gamma_r}(-X + fP)) \approx exp(-q)(1 - \frac{1}{\gamma_r}F_1 + \frac{1}{\gamma_r}X).$$

那么，公式 (27) 近似为，

$$exp(-q)[X + qX + \frac{1}{\gamma_r}X\mathbb{E}(X) - m - 2q\mathbb{E}(X) - (2+q)F_1 - \frac{2}{\gamma_r}F_1\mathbb{E}(X) - \frac{2}{m}F_2 - \frac{1}{m}\mathbb{E}(F_1X) + \frac{2}{m}\mathbb{E}(F_1^2)] = c. \quad (28)$$

对公式 (28) 取期望，比较 $(\frac{1}{m})^0$ 和 $(\frac{1}{m})^1$ 的系数，

$$F_1 = \frac{1+q}{2+q}(X-\mu).$$

在此情况下得到再保险价格和留存损失的近似值，

$$P = 1 + \frac{1+q}{2+q}\frac{1}{k}(X-\mu),$$

$$R = \frac{1+q}{2+q}(X-\mu) + k.$$

□

4. 结论

Stackelberg 博弈的主要内容是，保险公司通过签订再保险合同，使其风险的凸度量最小化或者效用函数最大化，同时再保险公司获得一个最优的再保险价格。本文通过考虑四组目标决策，建立了四个 Stackelberg 博弈模型。通过引入随机变量，进而将变量进行 Taylor 展开，得到博弈模型的均衡近似解。

基金项目

河北省省级研究生示范课程建设项目(KCJSX2022013)。

参考文献

[1] Cao, Y. and Wan, N. (2009) Optimal Proportional Reinsurance and Investment Based on Hamilton-Jacobi-Bellman Equation. *Insurance: Mathematics and Economics*, **45**, 157-162. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.05.006

[2] Zhao, Q., Wang, R. and Wei, J. (2016) Exponential Utility Maximization for an Insurer with Time-Inconsistent Preferences. *Insurance: Mathematics and Economics*, **70**, 89-104. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.06.003

[3] Zhang, Q. and Chen, P. (2019) Robust Optimal Proportional Reinsurance and Investment Strategy for an Insurer with Defaultable Risks and Jumps. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **356**, 46-66. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.01.034

[4] Barrieu, P. and Loubergé, H. (2013) Reinsurance and Securitisation of Life Insurance Risk: The Impact of Regulatory Constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, **52**, 135-144. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.11.008

[5] Föllmer, H. and Schied, A. (2002) Convex Measures of Risk and Trading Constraints. *Finance and Stochastics*, **6**, 429-447. https://doi.org/10.1007/s007800200072

[6] Frittelli, M. and Gianin, E. R. (2005) Law Invariant Convex Risk Measures. In: Kusuoka, S. and Yamazaki, A., Eds., *Advances in Mathematical Economics*, Springer, Tokyo, 33-46. https://doi.org/10.1007/4-431-27233-X_2

[7] Cai, J., Tan, K.S., Weng, C. and Zhang, Y. (2008) Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, **43**, 185-196. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.011

[8] Cui, W., Yang, J. and Wu, L. (2013) Optimal Reinsurance Minimizing the Distortion Risk Measure under General Reinsurance Premium Principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, **53**, 74-85. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.03.007

[9] Zhuang, S.C., Weng, C., Tan, K.S. and Assa, H. (2016) Marginal Indemnification Function Formulation for Optimal Reinsurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, **67**, 65-76. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.12.003

[10] Lo, A. (2017) A Neyman-Pearson Perspective on Optimal Reinsurance with Constraints. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **47**, 467-499. https://doi.org/10.1017/asb.2016.42

[11] Liu, F., Cai, J., Lemieux, C. and Wang, R. (2020) Convex Risk Functionals: Representation and Applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, **90**, 66-79. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.10.007

[12] Borch, K. (1969) The Optimal Reinsurance Treaty. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **5**, 293-297. https://doi.org/10.1017/S051503610000814X

[13] Chan, F.Y. and Gerber, H.U. (1985) The Reinsurer's Monopoly and the Bowley Solution. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **15**, 141-148. https://doi.org/10.2143/AST.15.2.2015025

[14] Cheung, K.C., Yam, S.C.P. and Zhang, Y. (2019) Risk-Adjusted Bowley Reinsurance under Distorted Probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, **86**, 64-72. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.02.006

[15] Cai, J., Lemieux, C. and Liu, F. (2016) Optimal Reinsurance from the Perspectives of Both an Insurer and a Reinsurer. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **46**, 815-849. https://doi.org/10.1017/asb.2015.23

[16] Cai, J., Liu, H. and Wang, R. (2017) Pareto-Optimal Reinsurance Arrangements under General Model Settings. *Insurance: Mathematics and Economics*, **77**, 24-37. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.08.004

[17] Chen, L. and Shen, Y. (2018) On a New Paradigm of Optimal Reinsurance: A Stochastic Stackelberg Differential Game between an Insurer and a Reinsurer. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **48**, 905-960. https://doi.org/10.1017/asb.2018.3