

n 次中心对称量子图的可约性

张凯, 赵佳

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2024年3月28日; 录用日期: 2024年4月23日; 发布日期: 2024年4月30日

摘要

本文根据群的不可约表示给出了 n 次中心对称量子图上平方可积函数空间的分解及 n 次中心对称量子图的商图, 为量子图久期行列式的分解提供了新的思路, 将原量子图的谱问题转化为商图的谱问题, 为等谱量子图的研究打下基础。

关键词

群表示, 函数空间的分解, 微分算子, 量子图, 久期行列式, 特征值

Reducibility of n Subcentrally Symmetric Quantum Graphs

Kai Zhang, Jia Zhao

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

In this paper, according to the irreducible representation of the group, the decompositions of the space of square integrable functions on n subcenter-symmetric quantum

graphs and the quotient graph of n subcenter-symmetric quantum graphs are given. It provides a new idea for the decomposition of the long determinant of quantum graphs, and transforms the spectrum problem of the original quantum graph into the spectrum problem of the quotient graph, which lays a foundation for the research of isospectral quantum graphs.

Keywords

Group Representation, Function Space Decomposition, Differential Operator, Quantum Graph, Secular Determinant, Eigenvalue

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

定义在度量图上的微分算子和度量图本身所组成的整体,在数学物理研究领域被称为量子图.量子图在数学、物理和化学等领域具有广泛应用,1936年, Pauling [1] 首次使用量子图研究芳香有机分子中的自由电子谱.近年来石墨烯因具有许多良好的结构特性而备受关注,如高效的导电性,使其在工程和制造中具有广阔的广阔应用前景,因此将石墨烯抽象为量子图,研究其电子性质十分重要.随着科技的发展,许多物理与工程系统的模型都需要几何图上的微分动力系统描述,因此度量图上微分算子模型随之出现,并成为微分算子领域研究的热点.

关于度量树上平方可积函数空间的分解已有很多结论,如Carlson 等人 [2-4] 研究了正则度量树上平方可积函数空间的直和分解,赵佳在文献 [5] 中研究了在正则度量树上的一点处满足 δ -条件和 δ' -条件的 Schrödinger 算子的谱,通过平方可积函数空间的分解证明了定义在正则度量树上的算子酉等价于一列线图上的算子,并得到了图上 Schrödinger 算子的谱纯离散的充分必要条件.本文根据群的不可约表示研究了 n 次中心对称图上平方可积函数空间的分解.有限群的表示理论始于19世纪晚期,这方面的先驱是 G. Frobenius, I. Schur 和 W. Burnside.群表示理论是研究数学,统计和物理学许多领域的一个基本的工具,在文献 [6] 中可以找到群表示论在图论中的应用,文献 [7] 给出了计算 Cayley 图特征值时群表示论的一些应用.表示理论的主要应用之一是利用量子系统的对称性来方便其谱的计算, Ben-Shach [8]和Parzanchevski [9]为研究等谱量子图提出了商图的定义,本文根据图上函数空间和算子的分解得到了 n 次中心对称图的商图,为量子图久期行列式的分解提供了新的思路.

2. 预备知识

为了方便阅读本文,这一章我们简要介绍本文所涉及到的基本概念.

图 Γ 是一个有序二元组 (V, E) , 其中 V 是顶点集, E 是边集. E_v 表示与顶点 v 关联的边集, 顶点 v 的度 d_v 是指与 v 关联的边集的数目, 即 $d_v = |E_v|$. $|E|$ 表示集合 E 中元素的个数, 若图 Γ 中的顶点集 V 与边集 E 的元素个数有限, 则称图 Γ 为有限图. 若给图 Γ 每条边 e_j 定义一个长度 L_{e_j} , 即 $L_{e_j} \in (0, +\infty]$, 则称图 Γ 为度量图. 当 $L_{e_j} = +\infty$, 边为一条射线.

本文研究的 Laplace 算子作用形式如下:

$$H : f \mapsto -\frac{d^2 f}{dx^2},$$

其中图上函数 f 限制在边 e_j 上记为 $f|_{e_j}$, $f|_{e_j}$ 可看作定义在 $[0, L_{e_j}]$ 上的函数. 算子在 v 处的顶点条件满足

$$A_v \begin{pmatrix} f|_{e_1}(v) \\ \vdots \\ f|_{e_{|E_v|}}(v) \end{pmatrix} + B_v \begin{pmatrix} f'|_{e_1}(v) \\ \vdots \\ f'|_{e_{|E_v|}}(v) \end{pmatrix} = 0,$$

其中 A_v 和 B_v 为 $m \times d_v$ 的矩阵, m 为任意正整数. 例如在 v 处的 Kirchhoff 顶点条件

$$\begin{aligned} f|_e(v) &= f|_{e'}(v), \quad \forall e, e' \in E_v, \\ \sum_{e \in E_v} f'|_e(v) &= 0, \end{aligned}$$

即为

$$A_v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 2.1. 有限图 Γ 上的平方可积函数空间 $L^2(\Gamma)$ 由在每条边上均平方可积的函数 $f|_e$ 组成, 且

$$\|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{e \in E} \|f|_e\|_{L^2(e)}^2,$$

即 $L^2(\Gamma)$ 是空间 $L^2(e)$ 的直和.

接下来这一部分我们给出群及群表示的相关定义.

定义 2.2. 设 G 是一个群, $\mathcal{V} \neq \{0\}$ 是域 F 上的一个线性空间, $\text{GL}(\mathcal{V})$ 为 \mathcal{V} 上所有可逆线性变换组成的群, G 到 $\text{GL}(\mathcal{V})$ 的一个群同态 ρ 称为 G 在域 F 上的一个表示.

定义 2.3. 若群 G 中的每一个元都是 G 中某一固定元 a 的乘方 (当运算记成乘法) 或者 a 的倍数 (当运算记成加法), 则称 G 为循环群, a 称为 G 的生成元, n 阶循环群记作 $G_n = \{a^i \mid i = 1, 2, \dots, n, a^n \text{ 等于单位元 } e\}$ 或 $G_n = \{ia \mid i = 1, 2, \dots, n, na \text{ 等于单位元 } e\}$.

定义2.4. $C_n(\mathbf{s})$ 表示由向量 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ 定义的具有 n 个顶点的循环图,且对于 \mathbf{s} 中的任意分量 s_k 满足 $1 \leq s_k \leq n/2$. 若 $i - j \equiv s_k \pmod{n}$, 则两个顶点 v_i, v_j 是相邻的.

3. n 次中心对称图上平方可积函数空间的分解

n 阶循环群有 n 个一次复表示,记 ω 为 n 次单位根,其不可约表示见表1:

Table 1. Irreducible representations of cyclic groups of order n

表 1. n 阶循环群的不可约表示

	e	a	a^2	a^3	...	a^{n-1}
ρ_1	1	1	1	1	...	1
ρ_2	1	ω	ω^2	ω^3	...	ω^{n-1}
ρ_3	1	ω^2	ω^4	ω^6	...	$\omega^{2(n-1)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
ρ_n	1	ω^{n-1}	$\omega^{2(n-1)}$	$\omega^{3(n-1)}$...	ω

使用上述 n 个一次复表示,本节给出了 n 次中心对称图上平方可积函数空间的分解及图上Laplace算子的分解,由函数空间的分解得到了 n 次中心对称图的商图.

定义3.1. 称一个度量图 Γ 具有循环群 G_n 作用,若映射 $(a^i, x) \in G_n \times \Gamma \mapsto a^i x \in \Gamma$ 满足以下性质:

(1) 群作用:对任意的 $a^i \in G_n$,映射 $x \mapsto a^i x$ 是 Γ 到自身的双射,

对任意的 $x \in \Gamma$,与单位元 e 有 $ex = x$, 对任意的 $a^i, a^l \in G_n, x \in \Gamma, (a^i a^l)x = a^i(a^l x)$;

(2) 连续性:对任意 $a^i \in G_n, \Gamma$ 到自身的映射 $x \mapsto a^i x$ 是连续的;

(3) 忠实性:若 $x \in \Gamma, a^i x = x$,则 $a^i = e$;

(4) 离散性:对任意的 $x \in \Gamma$,存在 x 的邻域 U ,有 $a^i \neq e, a^i x \notin U$;

(5) 保持结构: $a^i u \sim a^i v$ 当且仅当 $u \sim v$.

(6) 保距性:在度量图或量子图的情况下,群作用保持边的长度,即 $L_{a^i e} = L_e$.

若具有循环群 G_n 作用的度量图 Γ 存在一个 w 满足:

(1) G_n 所有群元作用在 w 上的并集覆盖整个 Γ ,即

$$\bigcup_{a^i \in G_n} a^i w = \Gamma,$$

(2) w 不同的移位副本,即 $a^i \neq a^l \in G_n$ 时的 $a^i w$ 和 $a^l w$ 只有有限个共同点且这些点都不是顶点,那么称 w 为 G_n 作用于 Γ 的基本域.注意,基本域的选取不唯一.

图上函数在满足Kirchhoff条件的二度顶点 v 处连续可微,因此一个图如果有满足Kirchhoff条件的二度顶点等价于在该位置没有顶点只有连续边的图,我们经常反过来使用这一事实,在一条边上选择一个点并说它是一个具有Kirchhoff条件的二度顶点,我们将这样的顶点称为虚拟顶点,引入虚拟顶点不会改变原始量子图的谱.图1展示了具有群 G_6 作用的循环图 $C_6(1, 2)$ 的基本域,为了构造基本域,在 $C_6(1, 2)$ 每条边的中点处引入用空心圆表示的虚拟顶点,此时边数变为原来的二倍,边用虚线表

示,与 $C_6(1,2)$ 原顶点 v_j 关联的边分别记为 $e_{j,1}, e_{j,2}, \dots, e_{j,d_{v_j}}$, 顶点 v_1 和全部相邻的虚拟顶点以及 v_1 关联的边构成 $C_6(1,2)$ 的一个基本域.

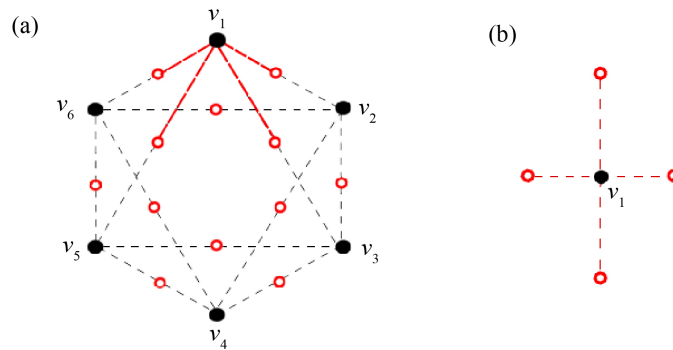


Figure 1. (a) The circulant graph, $C_6(1,2)$, with dummy vertices (b) The fundamental domain of $C_6(1,2)$

图 1. (a) 引入虚拟顶点的循环图 $C_6(1,2)$ (b) $C_6(1,2)$ 的基本域

定理3.2 n 次中心对称图 Γ_n 具有群 G_n 作用,根据 G_n 的全部不可约表示可以得到图上平方可积函数空间 $L^2(\Gamma_n)$ 的分解

$$L^2(\Gamma_n) = \bigoplus_{t=1}^n \mathcal{F}_t,$$

其中 Γ_n 上平方可积函数空间 \mathcal{F}_t 中的函数 F_t 可由其在基本域 w 上的限制 $F_t|_w$ 表出:

$$F_t|_{a^i w} = \rho_t(a^{n-i})F_t|_w.$$

证明. 任取 $F \in L^2(\Gamma_n)$,不妨设基本域 w 有 m 条边,将每条边参数化,那么限制在基本域的图上函数 $F|_w$ 可以由 m 条边上有取值的分段函数来表示,我们用有 m 个分量的向量函数表示上述分段函数,即 $F|_w = \{F_{e_1}, F_{e_2}, \dots, F_{e_m}\}$.定义空间 $L^2(\Gamma_n)$ 到空间 $\bigoplus_{t=1}^n \mathcal{F}_t$ 的映射 P ,根据 G_n 的第 t 个不可约表示有函数 F 到函数 $F_t \in \mathcal{F}_t$ 的映射 $P_t, t = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} P_t F|_{e_1} &= F_t|_{e_1} = \frac{\rho_t(e)F|_{e_1} + \rho_t(a)F|_{e_{1+m}} + \dots + \rho_t(a^{n-1})f_{1+m(n-1)}}{n}, \\ P_t F|_{e_2} &= F_t|_{e_2} = \frac{\rho_t(e)F|_{e_2} + \rho_t(a)F|_{e_{2+m}} + \dots + \rho_t(a^{n-1})f_{2+m(n-1)}}{n}, \\ &\vdots \\ P_t F|_{e_{mn}} &= F_t|_{e_{mn}} = \frac{\rho_t(e)F|_{e_{mn}} + \rho_t(a)F|_{e_m} + \dots + \rho_t(a^{n-1})f_{m(n-1)}}{n}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

则映射 P 为满射, 因为

$$\sum_{t=1}^n \rho_t(e) = n, \quad \sum_{t=1}^n \rho_t(a^i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

所以

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n,$$

并且

$$\|F\|_{L^2(\Gamma_n)}^2 = \sum_{t=1}^n \|F_t\|_{\mathcal{F}_t}^2,$$

因此映射 P 为等距同构映射. 由式 (3.1) 可知 $F_t|_{a^i w} = \rho_t(a^{n-i})F_t|_w$. □

例 3.3 考虑具有群 G_4 作用的 4 次中心对称图 Γ_4 上平方可积函数空间的分解, 设其基本域 w_{Γ_4} 有六条边, 见图 2.

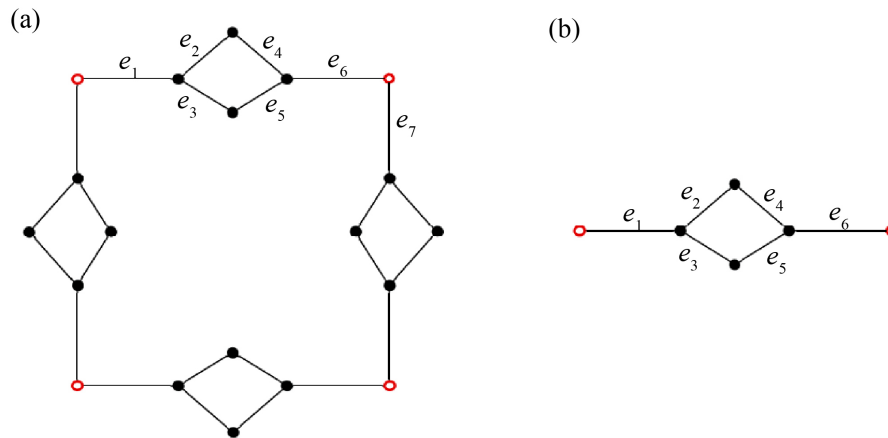


Figure 2. (a) Γ_4 with partial edges marked (b) The fundamental domain w_{Γ_4}

图 2. (a) 标记了部分边的 Γ_4 (b) 基本域 w_{Γ_4}

G_4 的不可约表示见表 2:

Table 2. Irreducible representations of cyclic groups of order 4

表 2. 4 阶循环群的不可约表示

	e	a	a^2	a^3
ρ_1	1	1	1	1
ρ_2	1	i	-1	$-i$
ρ_3	1	-1	1	-1
ρ_4	1	$-i$	-1	i

任取 $F \in L^2(\Gamma_4)$, 由 G_4 的四个不可约表示可以得到 $F_t \in \mathcal{F}_t, t = 1, 2, 3, 4$,

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{F_1|_{e_1}, F_1|_{e_2}, \dots, F_1|_{e_{24}}\} \\
 &= \left\{ \frac{F|_{e_1} + F|_{e_7} + F|_{e_{13}} + F|_{e_{19}}}{4}, \frac{F|_{e_2} + F|_{e_8} + F|_{e_{14}} + F|_{e_{20}}}{4}, \right. \\
 &\quad \left. \dots, \frac{F|_{e_{24}} + F|_{e_6} + F|_{e_{12}} + F|_{e_{18}}}{4} \right\}, \\
 F_2 &= \{F_2|_{e_1}, F_2|_{e_2}, \dots, F_2|_{e_{24}}\} \\
 &= \left\{ \frac{F|_{e_1} + iF|_{e_7} - F|_{e_{13}} - iF|_{e_{19}}}{4}, \frac{F|_{e_2} + iF|_{e_8} - F|_{e_{14}} - iF|_{e_{20}}}{4}, \right. \\
 &\quad \left. \dots, \frac{F|_{e_{24}} + iF|_{e_6} - F|_{e_{12}} - iF|_{e_{18}}}{4} \right\}, \\
 F_3 &= \{F_3|_{e_1}, F_3|_{e_2}, \dots, F_3|_{e_{24}}\} \\
 &= \left\{ \frac{F|_{e_1} - F|_{e_7} + F|_{e_{13}} - F|_{e_{19}}}{4}, \frac{F|_{e_2} - F|_{e_8} + F|_{e_{14}} - F|_{e_{20}}}{4}, \right. \\
 &\quad \left. \dots, \frac{F|_{e_{24}} - F|_{e_6} + F|_{e_{12}} - F|_{e_{18}}}{4} \right\}, \\
 F_4 &= \{F_4|_{e_1}, F_4|_{e_2}, \dots, F_4|_{e_{24}}\} \\
 &= \left\{ \frac{F|_{e_1} - iF|_{e_7} - F|_{e_{13}} + iF|_{e_{19}}}{4}, \frac{F|_{e_2} - iF|_{e_8} - F|_{e_{14}} + iF|_{e_{20}}}{4}, \right. \\
 &\quad \left. \dots, \frac{F|_{e_{24}} - iF|_{e_6} - F|_{e_{12}} + iF|_{e_{18}}}{4} \right\},
 \end{aligned}$$

且 $F_t|_{a^i w_{\Gamma_4}} = \rho_t(a^{4-i})F_t|_{w_{\Gamma_4}}$.

定理3.4 定义在 n 次中心对称图 Γ_n 上的 Laplace 算子 H 定义域为 $\mathcal{D}(H) = \{F, F', F'' \in L^2(\Gamma_n), F$ 在 Γ_n 的顶点处满足 Kirchhoff 顶点条件 $\}$, H 酉等价于定义在空间 \mathcal{F}_t 上的 Laplace 算子 H_t 的直和, 即

$$H \cong \sum_{t=1}^n \oplus H_t,$$

算子 H_t 的定义域为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(H_t) &= \{F_t, F'_t, F''_t \in \mathcal{F}_t, F_t \text{ 在 } \Gamma_n \text{ 的原顶点处满足 Kirchhoff 顶点条件} \\
 &\quad F_t \text{ 在连接边 } e_j \text{ 和 } e_l = a^i e_j \text{ 的虚拟顶点 } \tilde{v} \text{ 满足} \\
 &\quad F_t|_{e_j}(\tilde{v}) = \rho_t(a^i)F_t|_{e_l}(\tilde{v}), F'_t|_{e_j}(\tilde{v}) + \rho_t(a^i)F'_t|_{e_l}(\tilde{v}) = 0\}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

由算子的分解可得到如下谱关系:

$$\sigma(H) = \bigcup_{t=1}^n \sigma(H_t).$$

证明. 因为

$$\mathcal{D}(H) \subset L^2(\Upsilon_n),$$

那么由定理3.2可得算子定义域的直和分解, 即

$$\mathcal{D}(H) \cong \sum_{t=1}^n \oplus \mathcal{D}(H_t).$$

对任意 $F_t|_{e_i} \in \mathcal{F}_t$,

$$H_t F_t|_{e_i} = -F_t''|_{e_i} \in \mathcal{F}_t,$$

所以

$$H_t(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{F}_t.$$

综上所述可以得到

$$H \cong \sum_{t=1}^n \oplus H_t.$$

证毕. □

若图 Γ 具有群 G' 作用, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ 是 G' 的全部不可约表示, 图 Γ 上 Laplace 算子的谱 $\sigma'(H) = \cup_{t=1}^s \sigma'(H_t)$, ρ_s 是 G' 的 D 维不可约表示, 那么 Γ 的商图 G'/ρ_s 由 D 个基本域通过边界点进行粘合得到, 粘合过程中形成的新的顶点条件依赖于 ρ_s , 且商图 G'/ρ_s 的谱与 $\sigma'(H_s)$ 同构. 下面我们构造具有群 G_4 作用的 Γ_4 和具有群 G_{12} 作用的 $\Gamma_3 \square \Gamma_4$ 的商图, 因为循环群的不可约表示都为一维表示, 因此 Γ_4 与 $\Gamma_3 \square \Gamma_4$ 的商图都由一个基本域构成, 见图 3.

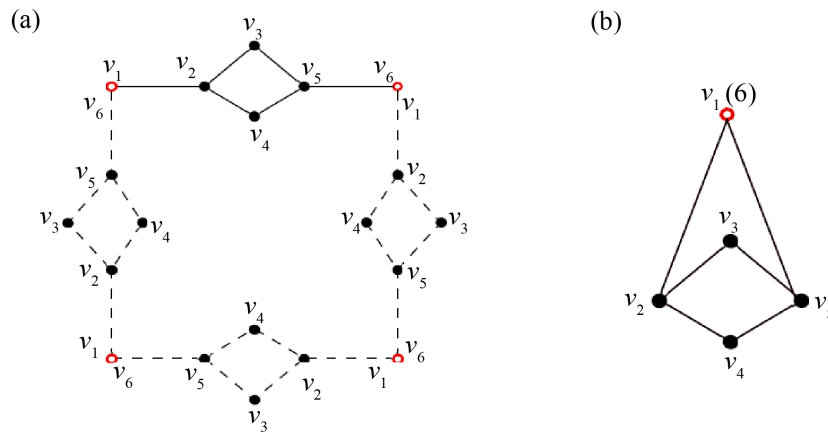


Figure 3. (a) The fundamental domain w_{Γ_4} of Υ_4 (solid line) (b) The quotient graph of Υ_4

图 3. (a) Υ_4 的基本域 w_{Γ_4} (实线) (b) Υ_4 的商图

例3.5 考虑每个顶点都满足 Kirchhoff 条件的 Γ_4 (图 2), 基本域 w_{Γ_4} 在 G_4 的作用下(旋转)生成整个图, 在旋转过程中, 顶点 v_1 与 v_6 进行粘合形成新的顶点 $v_{1(6)}$, 其余顶点不变, 由此得到 Γ_4 的商图, 由例3.3可知 Γ_4 有四个商图.

以第二种不可约表示为例推导商图的顶点条件, 因为群元作用在函数上相当于它的表示与函数相乘, 所以

$$\begin{cases} aF|_{e_1}(v_1) := iF|_{e_1}(v_1) = F|_{e_7}(v_6), \\ aF'|_{e_1}(v_1) := iF'|_{e_1}(v_1) = F'|_{e_7}(v_6), \end{cases} \quad (3.3)$$

F 在 v_6 处满足 Kirchhoff 条件可以得到

$$\begin{cases} F|_{e_6}(v_6) = F|_{e_7}(v_6), \\ F'|_{e_6}(v_6) + F'|_{e_7}(v_6) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

根据式(3.3)和(3.4)

$$\begin{cases} F|_{e_1}(v_1) + iF|_{e_6}(v_6) = 0, \\ F'|_{e_1}(v_1) - iF'|_{e_7}(v_6) = 0, \end{cases}$$

所以

$$A_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

由四种不可约表示得到在 $v_1(6)$ 处四种不同顶点条件的商图,其余顶点均为 Kirchhoff 条件, 由 ρ_1 得

$$A_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

由 ρ_2 得

$$A_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

由 ρ_3 得

$$A_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

由 ρ_4 得

$$A_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{v_1(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

接下来我们证明 F_t 限制在 Γ_4 的商图 G_4/ρ_t 上仍满足对应的顶点条件.为方便计算,以 v_1 为起点顺时针方向将 Γ_4 每条边看做区间 $[0,1]$, F 中所有函数在每个顶点均满足 Kirchhoff 条件,所以

$$\begin{cases} F|_{e_1}(0) = F|_{e_{24}}(1), & F|_{e_7}(0) = F|_{e_6}(1), \\ F'|_{e_1}(0) + (-F'|_{e_{24}}(1)) = 0, & F'|_{e_7}(0) + (-F'|_{e_6}(1)) = 0, \\ F|_{e_{13}}(0) = F|_{e_{12}}(1), & F|_{e_{19}}(0) = F|_{e_{18}}(1), \\ F'|_{e_{13}}(0) + (-F'|_{e_{12}}(1)) = 0, & F'|_{e_{19}}(0) + (-F'|_{e_{18}}(1)) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

在 F_2 中选取前6个分量记为 $m_i(i = 1, 2, \dots, 6)$,

$$m_1(0) = \frac{F|_{e_1}(0) + iF|_{e_7}(0) - F|_{e_{13}}(0) - iF|_{e_{19}}(0)}{4},$$

$$m_6(1) = \frac{F|_{e_6}(1) + iF|_{e_{12}}(1) - F|_{e_{18}}(1) - iF|_{e_{24}}(1)}{4},$$

由式(3.5)得

$$\begin{cases} m_1(0) = im_6(1), \\ m'_1(0) + i(-m'_6(1)) = 0, \end{cases}$$

即 F_2 在 $v_{1(6)}$ 处满足以下顶点条件

$$A_{v_{1(6)}} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{v_{1(6)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

下证 F_2 在 v_2 和 v_3 处分别满足 Kirchhoff 条件,

$$\begin{cases} m_1(1) = m_2(0) = m_3(0), \\ (-m'_1(1)) + m'_2(0) + m'_3(0) = 0, \end{cases} \begin{cases} m_2(1) = m_4(0), \\ (-m'_2(1)) + m'_4(0) = 0, \end{cases}$$

同理 v_4 与 v_5 也满足 Kirchhoff 条件. 综上, F_2 限制在商图上满足由 ρ_2 得到的顶点条件, 其他三个函数 F_1, F_3, F_4 同理.

4. n 次中心对称量子图久期行列式的可约性

久期行列式是量子图的特征值函数, 本章通过参考文献 [10] 中的计算方法得到了 n 次中心对称量子图 Γ_n 的久期行列式, 由函数空间的分解定理得到了久期行列式的分解, Γ_n 久期行列式的全部因式为 Γ_n 全部商图的久期行列式, 从而将原量子图的谱问题转化为商图的谱问题.

为了给出 Γ_n 的久期行列式, 我们对图进行另一种描述, 引入键的概念. 键是图上具有指定方向的边. 在有向度量图上, 每条边都被键 j 和 \bar{j} 取代, 因此 $L_j = L_{\bar{j}}$. 我们对键 j 参数化, 令 j 的起点 $o(j)$ 的坐标 $x_j = 0$ 和 j 的终点 $t(j)$ 的坐标 $x_j = L_j$. 同样的, 对于 j 的反转 \bar{j} , $o(\bar{j})$ 的坐标 $x_{\bar{j}} = 0$, $t(\bar{j})$ 的坐标 $x_{\bar{j}} = L_j$. 这个方向如图 4 所示, 因此 x_j 和 $x_{\bar{j}}$ 是相关的, $x_{\bar{j}} = L_j - x_j$.

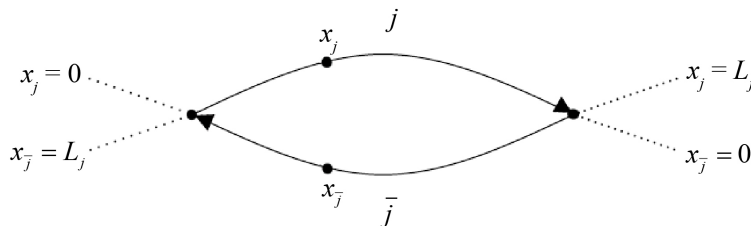


Figure 4. The pair of bonds j and \bar{j} associated with the interval $[0, L_j]$

图 4. 和区间 $[0, L_j]$ 相关联的一对键 j 和 \bar{j}

将每条边 e_j 参数化为 $[0, L_j]$, 当 $k \neq 0$ 时, Laplace 算子特征值方程 $-f'' = k^2 f$ 在每条边上的解可以写为 $f_j(x) = a_j e^{ikx} + a_{\bar{j}} e^{ikL_j - x}$, 文献 [10] 中给出 $\lambda = k^2 \neq 0$ 是度量图上 Laplace 算子的特征值, 当且仅当 k 是

下方程的根,

$$\Sigma(k) := \det(I - SD(k)) = 0, \tag{4.1}$$

函数 $\Sigma(k)$ 称为量子图的久期行列式,其中 S 和 $D(k)$ 为 $2|E|$ 维矩阵, $D(k)$ 是与边长相关的对角矩阵, $D(k)_{j,j} = e^{ikL_j}$, S 为键散射矩阵,满足 $a_l = S_{l,j} \cdot a_j$, l 和 j 的取值为 $1, 2, \dots, |E|, \bar{1}, \bar{2} \dots \bar{|E|}$.

在上一章我们得到了 Γ_4 的商图及其顶点条件,接下来我们将给出边长为 a, b, c 的4次中心对称图 Υ_4 (见图5)的商图的久期行列式及 Γ_4 久期行列式的分解.

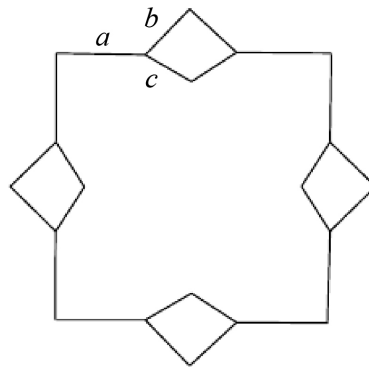


Figure 5. The rotation-invariant graph Γ_4 of side lengths a, b, c

图 5. 边长为 a, b, c 的4次中心对称图 Γ_4

所有顶点为 Kirchhoff 条件的 Γ_4 的久期行列式

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Gamma_4}(k) = & \frac{1}{6561} (9v_a^4 v_b^4 v_c^4 - v_a^4 v_b^4 - 8v_a^4 v_b^2 v_c^2 - v_a^4 v_c^4 + v_a^4 - 8v_a^2 v_b^4 v_c^2 - 8v_a^2 v_b^2 v_c^4 \\ & + 8v_a^2 v_b^2 + 8v_a^2 v_c^2 - v_b^4 v_c^4 + v_b^4 + 8v_b^2 v_c^2 + v_c^4 - 9) \\ & (9v_a^4 v_b^4 v_c^4 - v_a^4 v_b^4 - 8v_a^4 v_b^2 v_c^2 - v_a^4 v_c^4 + v_a^4 + 8v_a^2 v_b^4 v_c^2 + 8v_a^2 v_b^2 v_c^4 \\ & - 8v_a^2 v_b^2 - 8v_a^2 v_c^2 - v_b^4 v_c^4 + v_b^4 + 8v_b^2 v_c^2 + v_c^4 - 9) \\ & (81v_a^8 v_b^8 v_c^8 - 18v_a^8 v_b^8 v_c^4 + v_a^8 v_b^8 - 144v_a^8 v_b^6 v_c^6 + 16v_a^8 v_b^6 v_c^2 - 18v_a^8 v_b^4 v_c^8 \\ & + 84v_a^8 v_b^4 v_c^4 - 2v_a^8 v_b^4 + 16v_a^8 v_b^2 v_c^6 - 16v_a^8 v_b^2 v_c^2 + v_a^8 v_c^8 - 2v_a^8 v_c^4 \\ & + v_a^8 - 18v_a^4 v_b^8 v_c^8 + 20v_a^4 v_b^8 v_c^4 - 2v_a^4 v_b^8 + 160v_a^4 v_b^6 v_c^6 - 32v_a^4 v_b^6 v_c^2 + 20v_a^4 v_b^4 v_c^8 \\ & - 296v_a^4 v_b^4 v_c^4 + 20v_a^4 v_b^4 - 32v_a^4 v_b^2 v_c^6 + 160v_a^4 v_b^2 v_c^2 - 2v_a^4 v_c^8 + 20v_a^4 v_c^4 - 18v_a^4 \\ & + v_b^8 v_c^8 - 2v_b^8 v_c^4 + v_b^8 - 16v_b^6 v_c^6 + 16v_b^6 v_c^2 - 2v_b^4 v_c^8 + 84v_b^4 v_c^4 - 18v_b^4 + 16v_b^2 \\ & - 144v_b^2 v_c^2 + v_c^8 - 18v_c^4 + 81), \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $v_a = e^{ikL_a}, v_b = e^{ikL_b}, v_c = e^{ikL_c}$.

Γ_4 按循环群分解得到的四种顶点条件的商图的久期行列式分别为

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Gamma_4}^1(k) &= \frac{1}{9}(9v_a^4v_b^4v_c^4 - v_a^4v_b^4 - 8v_a^4v_b^2v_c^2 - v_a^4v_c^4 + v_a^4 - 8v_a^2v_b^4v_c^2 - 8v_a^2v_b^2v_c^4 \\ &\quad + 8v_a^2v_b^2 + 8v_a^2v_c^2 - v_b^4v_c^4 + v_b^4 + 8v_b^2v_c^2 + v_c^4 - 9), \\ \Sigma_{\Gamma_4}^2(k) &= \frac{1}{9}(9v_a^4v_b^4v_c^4 - v_a^4v_b^4 - 8v_a^4v_b^2v_c^2 - v_a^4v_c^4 + v_a^4 - v_b^4v_c^4 + v_b^4 + 8v_b^2v_c^2 + v_c^4 - 9), \\ \Sigma_{\Gamma_4}^3(k) &= \frac{1}{9}(9v_a^4v_b^4v_c^4 - v_a^4v_b^4 - 8v_a^4v_b^2v_c^2 - v_a^4v_c^4 + v_a^4 + 8v_a^2v_b^4v_c^2 + 8v_a^2v_b^2v_c^4 \\ &\quad - 8v_a^2v_b^2 - 8v_a^2v_c^2 - v_b^4v_c^4 + v_b^4 + 8v_b^2v_c^2 + v_c^4 - 9), \\ \Sigma_{\Gamma_4}^4(k) &= \frac{1}{9}(9v_a^4v_b^4v_c^4 - v_a^4v_b^4 - 8v_a^4v_b^2v_c^2 - v_a^4v_c^4 + v_a^4 - v_b^4v_c^4 + v_b^4 + 8v_b^2v_c^2 + v_c^4 - 9).\end{aligned}$$

我们可以看出 $\Sigma_{\Gamma_4}(k)$ 的因式分别为 $\Sigma_{\Gamma_4}^1(k), \Sigma_{\Gamma_4}^2(k), \Sigma_{\Gamma_4}^3(k), \Sigma_{\Gamma_4}^4(k)$, 与第二章研究的 Γ_4 函数空间分解相对应,进一步可以得到 Γ_n 的久期行列式分解

$$\Sigma_{\Gamma_n}(k) = \prod_{t=1}^n \Sigma_{\Gamma_n}^t(k).$$

致 谢

感谢求学之路遇到我的导师赵佳老师,老师深厚的学术造诣和严谨的治学态度让我受益匪浅,老师无数次悉心指导,让我的论文得以顺利完成.承蒙教诲,心存感激,祝愿老师能百事顺心,万事胜意.

基金项目

国家自然科学基金(No.12001153)。

参考文献

- [1] Brooks, H. (1940) Diamagnetic Anisotropy and Electronic Structure of AROMATIC Molecules. *The Journal of Chemical Physics*, **8**, 939-949. <https://doi.org/10.1063/1.1750608>
- [2] Carlson, R. (2000) Nonclassical Sturm-Liouville Problems and Schrödinger Operators on Radial Trees. *Electronic Journal of Differential Equations*, **71**, 1-24.
- [3] Solomyak, M. (2003) On the Spectrum of the Laplacian on Regular Metric Trees. *Waves in Random Media*, **14**, 155-171. <https://doi.org/10.1088/0959-7174/14/1/017>
- [4] Zhao, J., Shi, G.L. and Yan, J. (2018) The Discrete Spectrum of Schrödinger Operators with δ -Type Conditions on Regular Metric Trees. *Journal of Spectral Theory*, **8**, 459-491. <https://doi.org/10.4171/jst/202>

- [5] 赵佳. 无穷度量图上Sturm-Liouville算子的谱性质[D]: [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2016.
- [6] Steinberg, B. (2012) Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0776-8>
- [7] Band, R., Parzanchevski, O. and Ben-Shach, G. (2009) The Isospectral Fruits of Representation Theory: Quantum Graphs and Drums. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42**, Article 175202. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/17/175202>
- [8] Parzanchevski, O. and Band, R. (2010) Linear Representations and Isospectrality with Boundary Conditions. *Journal of Geometric Analysis*, **20**, 439-471. <https://doi.org/10.1007/s12220-009-9115-6>
- [9] Liu, W. (2016) Degeneracies in the Eigenvalue Spectrum of Quantum Graphs. Doctoral Thesis, Texas AM University, College Station, TX.
- [10] Berkolaiko, G. (2017) An Elementary Introduction to Quantum Graphs. *Geometric and Computational Spectral Theory*, **700**, 41-72. <https://doi.org/10.1090/conm/700/14182>