Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 704-713
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132068

Hans 汉斯

玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数

王 爽

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

图论是离散数学的一个重要分支，是一门研究图的学问，而图的交叉数也是图论中的一个重要的研究方向，国内外诸多学者都对图的交叉数问题展开了相关研究。玫瑰花窗图是广义周期图的一类延伸，本文针对玫瑰花窗图的交叉数展开研究，给出了玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的相关定义，找到了 $R_{3k+2}(1,3)$ 的一个好的画法，得到了 $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数的上界。最后利用数学归纳法和反证法得到了玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数的下界，进而完成了证明。

关键词

玫瑰花窗图，交叉数，好的画法

The Crossing Number of Rose Windows Graph $R_{3k+2}(1,3)$

Shuang Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

Graph theory is an important branch of discrete mathematics, which is a study of graphs, and the crossing number of graphs is also an important research direction in graph theory. This paper studies the crossing number of the rose windows graph, gives the relevant definition of the $R_{3k+2}(1,3)$ of the rose windows graph, finds a good drawing of $R_{3k+2}(1,3)$, and obtains the upper bound of the crossing number of $R_{3k+2}(1,3)$. Finally, the lower bound of the crossing number of

文章引用: 王爽. 玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 704-713.
DOI: 10.12677/aam.2024.132068

the rose windows graph $R_{3k+2}(1,3)$ is obtained by using the mathematical induction method and the counterproof method, and then the proof is completed.

Keywords

Rose Windows Graph, Crossing Number, Good Drawing

1. 引言

图的交叉数概念是 Pual Turan 根据其于 1944 年一个砖厂所碰到的实际难题提出的[1]，图的交叉数是图的一个重要参数，研究图的交叉数问题具有着重要的理论意义与现实意义，VLSI 中的布线问题、草图的识别与重画问题、网络拓扑结构设计问题以及软件开发中的 ER 图的生成问题中都涉及图的交叉数的广泛应用。多年来，国内外许多学者都研究过图的交叉数问题，Garey 和 Johnson 已经证明了确定一个图的交叉数是 NP-完全问题[2]。正是由于其难度较大，故国内外在这方面的研究进展缓慢，研究对象也主要集中在一些具有特殊结构图的交叉数的具体数值或者研究其上界、下界和研究图的交叉数的一般性质上[3]。近些年来，诸多学者对一些特殊的图的交叉数进行了研究，并获得了相应的研究成果。

2003 年，N.H. Nahas [4]对当 m,n 足够大时完全二部图的交叉数展开了进一步研究并得到了如下结果：$cr(K_{m,n}) \ge \frac{1}{5}m(m-1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 9.9\times 10^{-6} m^2 n^2$。2007 年，梅汉飞和黄元秋[5]证明了 $K_{1,5,n}$ 的交叉数，证明了 $cr(K_{1,5,n}) = Z(6,n) + 4\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。此外，对于完全多部图，还有许多学者完成了许多图类交叉数的证明。2007 年，黄元秋等人[6]研究了完全三部图 $K_{1,4,n}$ 的交叉数，得到了 $cr(K_{1,4,n}) = Z(5,n) + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。紧接着，黄元秋等人[7] [8] [9]完成了完全三部图 $K_{1,6,n}$，$K_{1,8,n}$ 和 $K_{1,10,n}$ 的交叉数的证明，得到了如下结果：

$$cr(K_{1,6,n}) = Z(7,n) + 6\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$cr(K_{1,8,n}) = Z(9,n) + 12\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$cr(K_{1,10,n}) = Z(11,n) + 20\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

除以上研究成果外，广义彼得森(Petersen)图的交叉数也深受交叉数方向的学者们的广泛关注。2004 年，林晓惠[10]对 $P(4k+2,2k)$ 等部分广义 Petersen 图的交叉数进行了研究，得到了 $cr(P(4k+2,2k)) = 2k+1$，$cr(P(4k+2,4)) = 2k+2$。2005 年，马登举[11]等人证明了图 $P(2m+1,m)$ 的交叉数，证明得出了 $cr(P(2k+1,k)) = 3, k \ge 3$。郑百功[12]于 2013 年在硕士论文中证明了 $P(10,3)$ 的交叉数。

实际上，广义 Petersen 图是一类广义周期图[13]。设 G 是一个简单图。G 的一个分解是 G 的边不相交子图的列表，使得 G 的每条边都出现在列表中的一个子图中。如果对于每对整数 i 和 j，$1 \le i, j \le t$，

G 存在一个自同构 $\theta_{i,j}$，使得 $uv\in E(H_{i+l})$ 当且仅当 $\theta_{i,j}(u)\theta_{i,j}(v)\in E(H_{i+l})$，则称图 G 的一个分解 $\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 是可传递的，其中下标取 t 的模。如果存在图 G 的一个传递分解，则称图 G 是广义周期图。

2. 玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数

2.1. 主要引理

设 $\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 是图 G 的一个可传递分解。假设 $H_{i,j}$ 是 $H_i,H_{i+1},\cdots,H_j$ 的并集，下标取模 t。假设 D 是图 G 的一个好的画法。设 c 是一个正整数，对于 $1\le i\le t$，若存在一个正整数 l_i 满足 $f_D(H_{i,i-1+l_i})\ge l_i c$，则令 $l_c^D(H_i)$ 为 l_i 的最小值使 $f_D(H_{i,i-1+l_i})\ge l_i c$；若不存在这样的正整数 l_i，则令 $l_c^D(H_i)=t+1$。

引理 2.1 [13]：设 c 为正实数，t 和 x 为正整数。假设图 G 是具有可传递分解 $\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 的广义周期图。则 $cr(G)\ge\lceil ct\rceil$ 当且仅当在 G 的任意一种好画法 D 下有 $\max\{l_c^D(H_1),l_c^D(H_2),\cdots,l_c^D(H_t)\}\le t$。

Jordan 曲线定理 任意一条简单(自身不相交)闭曲线 J 把平面分成两个区域，在不同区域的两点若要相连，则连结的弧必与 J 相交。

根据约当闭曲线定理，我们有以下引理。

引理 2.2：在图 G 中，设 C 和 C' 是顶点集不相交的两个圈，$P_k=u_1u_2\cdots u_k$ 是长度为 k 的路径且 $V(P_k)\cap V(C)=\varnothing$。假设 D 是图 G 的一个好的画法，则 $cr_D(C,C')$ 是偶数，若 u_1、u_k 位于 $D(C)$ 的同一区域，$cr_D(P_k,C)$ 为偶数，否则就是奇数。

2.2. 玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的相关定义

所有在本文中没有明确定义的专业术语都可以在参考文献[14]中找到。

在广义 Petersen 图 $P(3k+2,3)$ 的基础上添加一类边，得到玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$，下面给出玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的具体定义。设玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的顶点集为 $V(R_{3k+2}(1,3))=\{a_i,b_i\mid 1\le i\le 3k+2\}$，边集为 $E(R_{3k+2}(1,3))=\{a_i a_{i+1},a_ib_i,b_ib_{i+3},b_i a_{i+1}\}$，$k\ge 2$，其中下标取模 $3k+2$。记玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的子集为 E_i，且有 $V(E_i)=\{a_i,b_i,a_{i+1},b_{i+3}\}$，$E_i=\{a_ia_{i+1},a_ib_i,b_ib_{i+3},b_ia_{i+1}\}$，$1\le i\le 3k+2$，$k\ge 2$，可得 $\{E_1,E_2,\cdots,E_{3k+2}\}$ 是 $R_{3k+2}(1,3)$ 的一个可传递分解，其中 $E(R_{3k+2}(1,3))=\bigcup_{i=1}^{3k+2}E_i$ 且 $E_i\cap E_j=\varnothing$，$i\ne j$。$E_{i,j}$ 是 $E_i,E_{i+1},\cdots,E_j$ 的并集，且 $f_D(H)$ 是 H 到所有非负实数集合的映射：$f_D(H)=cr_D(H)+cr_D(H,G\setminus E(H))/2$。图 G 在画法 D 下的交叉数用 $cr(D)$ 或 $cr_D(G)$ 表示。

另外，本文中定义路径：

$$P_0=a_1a_2\cdots a_{3k+2}$$

$$P_1=b_1b_4\cdots b_{3k+1}$$

$$P_2=b_2b_5\cdots b_{3k+2}$$

$$P_3=b_3b_6\cdots b_{3k}$$

$$P_4=a_1b_1a_2b_2\cdots a_{3k+2}b_{3k+2}$$

2.3. 归纳基础

引理 2.3：$cr(R_8(1,3))=6$。

2.4. $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数的上界

引理 2.4：$cr(R_{3k+2}(1,3))\le 2k+2$，$k\ge 2$。

证明：如图 1 所示，D 是 $R(3k+2,3,1)$ 的一个好的画法，此时 $cr_D\left(R(3k+2,3,1)\right)=2k+2$，根据交叉数的定义有 $cr\left(R_{3k+2}(1,3)\right)\le 2k+2$。

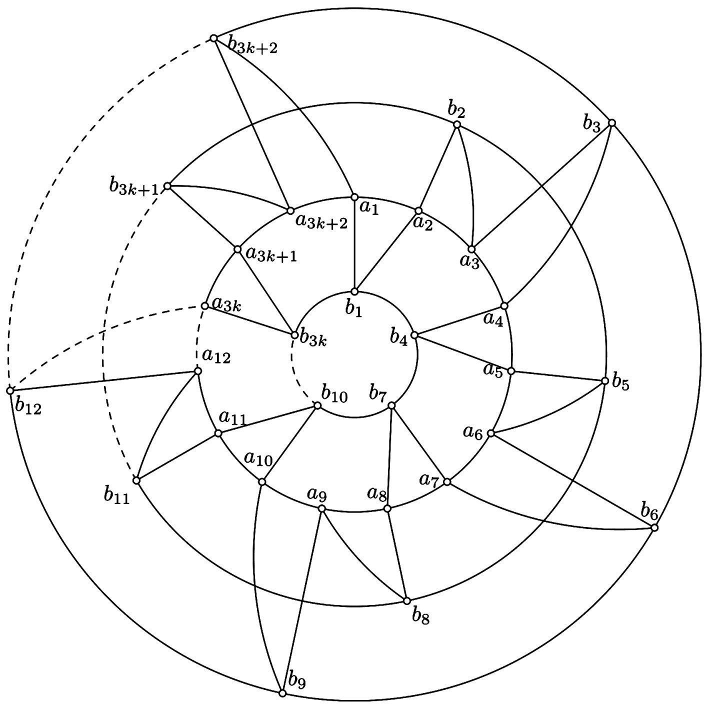


Figure 1. A good drawing of $R_{3k+2}(1,3)$

图 1. $R_{3k+2}(1,3)$ 的一个好的画法

2.5. $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数的下界

引理 2.5：(领结引理) 设 $1\le i\le 3k+2$，D 是 B_i 的一个好画法且 $cr_D(B_i)=1$，则 a_{i+1} 和 b_i 被 $D(T_{i-1})$ 分离或 a_{i-1} 和 b_{i-1} 被 $D(T_i)$ 分离。

证明：假设 a_{i+1} 和 b_i 在 $D(T_{i-1})$ 划分平面的同一区域。如果 $cr_D(a_{i+1}b_i,T_{i-1})\ge 1$，由引理 2.2，$cr_D(a_{i+1}b_i,T_{i-1})\ge 2$，与 $cr_D(B_i)=1$ 相矛盾。因此 $cr_D(a_{i+1}b_i,T_{i-1})=0$。由 $cr_D(B_i)=1$，$cr_D(b_ia_ia_{i+1},T_{i-1})=1$。又由于 D 是好的画法，所以 $cr_D(a_{i-1}b_{i-1},b_ia_ia_{i+1})=1$。因此，$a_{i-1}$ 和 b_{i-1} 被 $D(T_i)$ 分离。

引理 2.6： 设 D 是 $R_{3k+2}(1,3)$ 的一个好画法且 $cr_D\left(R_{3k+2}(1,3)\right)<2k+2$，若 $l_1^D\ge 4$，那么 $cr_D(T_1,T_j)=0$，$3\le j\le 3k+2$；$cr_D(B_i)=0$，$2\le i\le 3$；$cr_D(B_3,E_1)=0$。

证明：由 $l_1^D\ge 4$，有 $f_D(E_1)<2/3$，$f_D(E_{1,2})<4/3$，$f_D(E_{1,3})<2$。反证法。根据引理 2.2，若 $cr_D(T_1,T_j)\ge 1$，$3\le j\le 3k+2$，则 $cr_D(T_1,T_j)\ge 2$，与 $f_D(E_1)<2/3$ 相矛盾，因此 $cr_D(T_1,T_j)=0$。

假设 $cr_D(B_2)\ge 1$，由 $f_D(E_{1,2})<4/3$，有 $cr_D(B_2)=1$，由引理 2.5，有 a_1、b_1 被 $D(T_2)$ 分离或 a_3、b_2 被 $D(T_1)$ 分离。根据引理 2.2，若 a_1、b_1 被 $D(T_2)$ 分离，有路径 $b_1b_3a_4P_0a_{3k+2}a_1$ 交 T_2。若 a_3、b_2 被 $D(T_1)$ 分离，有路径 $a_3a_4a_5b_5b_2$ 交 T_1。两种情形均使 $f_D(E_{1,2})\ge 4/3$，矛盾。因此 $cr_D(B_2)=0$。

假设 $cr_D(B_3)\ge 1$，由 $f_D(E_{1,3})<2$，有 $cr_D(B_3)=1$。根据引理 2.5，有 a_2、b_2 被 $D(T_3)$ 分离或 a_4、b_3 被 $D(T_2)$ 分离。根据引理 2.2，若 a_2、b_2 被 $D(T_3)$ 分离，有路径 $b_2b_5a_5a_4a_3a_2$、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1a_2$ 交 T_3。若 a_4、b_3 被 $D(T_2)$ 分离，有路径 $b_3b_6a_6a_5a_4$、$b_3b_{3k+2}P_2b_5a_5b_4a_4$ 交 T_2，两种情形均使 $f_D(E_{1,3})\ge 2$，矛盾。因此 $cr_D(B_3)=0$。

假设 $cr_D(B_3,E_1)\ge 1$，则有 $cr_D(T_2,E_1)\ge 1$ 或 $cr_D(T_3,E_1)\ge 1$。假设 $cr_D(T_2,E_1)\ge 1$，由 $f_D(E_{1,2})<4/3$，有 $cr_D(T_2,E_1)=1$。又由于 $cr_D(B_2)=0$，则 $cr_D(T_2,b_1b_4)=1$，根据引理 2.2 有路径 $b_1b_3a_4b_4$ 交 T_2 使 $f_D(E_{1,2})\ge 4/3$，矛盾。因此 $cr_D(T_2,E_1)=0$。假设 $cr_D(T_3,E_1)\ge 1$，由 $cr_D(T_1,T_3)=0$，有 $cr_D(T_3,b_1b_4)\ge 1$ 且 a_1、b_1 位于 $D(T_3)$ 划分平面的同一区域，又由于 $f_D(E_{1,3})<2$，则 $cr_D(T_3,b_1b_4)=1$，根据引理 2.2 有路径 $b_1b_{3k}P_3b_6a_7b_7b_4$、$a_1a_{3k+2}P_0a_5b_4$ 交 T_3，与 $f_D(E_{1,3})<2$ 相矛盾。因此 $cr_D(T_3,E_1)=0$。故 $cr_D(B_3,E_1)\ge 1$。

引理 2.7：(画法引理) 假设 D 是使 $cr(R_{3k+2}(1,3))<2k+2$ 的一个好的画法，已知 $cr(R_{3(k-1)+2}(1,3))\ge 2(k-1)+2$，$k\ge 3$，如果路径 $a_ib_ia_{i+1}b_{i+1}a_{i+2}b_{i+2}a_{i+3}$ 上有 a 个交叉点，则在路径 $a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}$ 至少有 $a-1$ 个交叉点，$a\ge 2$，$1\le i\le 3k+2$；如果路径 $b_ia_{i+1}b_{i+1}a_{i+2}b_{i+2}a_{i+3}b_{i+3}$ 上有 b 个交叉点，则在路径 b_ib_{i+3} 至少有 $b-1$ 个交叉点，$b\ge 2$，$1\le i\le 3k+2$。

引理 2.8： 假设 D 是使 $cr(R_{3k+2}(1,3))<2k+2$ 的一个好的画法，若 $l_1^D\ge 5$，则 $D(H_1)$ 同构于图 3。

证明：由 $l_1^D\ge 5$，有 $f_D(E_1)<2/3$，$f_D(E_{1,2})<4/3$，$f_D(E_{1,3})<2$，$f_D(E_{1,4})<8/3$。由引理 2.6 知，$cr_D(B_3,E_1)=0$，$cr_D(T_1,T_j)=0$，$1\le j\le 3k+2$，因此 $cr_D(a_2a_3a_4b_4,E_1)=0$，且由好的画法的定义有 $cr_D(a_2a_3,a_4b_4)\le 1$。当 $cr_D(a_2a_3,a_4b_4)=1$ 时，即有 $cr_D(T_2,T_4)\ge 1$，根据引理 2.2，此时 $cr_D(T_2,T_4)\ge 2$，$f_D(E_{1,4})\ge 2$，$D(H_1)$ 同构于图 2(a)、图 2(b)之一。

若 $D(H_1)$ 同构于图 2(a)，根据引理 1 有路径 $a_1a_{3k+2}P_0a_6b_6b_3a_3$、$a_1b_{3k+2}P_2b_5a_5a_4$ 交 $a_4b_4b_1a_2a_3$ 使 $f_D(E_{1,4})\ge 8/3$，矛盾。若 $D(H_1)$ 同构于图 2(b)，由 $f_D(E_{1,4})<8/3$ 有 $cr_D(a_2b_2a_3,H_1-a_4b_4)=0$，$cr_D(a_2b_2a_3,a_4b_4)\le 1$，若 $cr_D(a_2b_2a_3,a_4b_4)=1$，根据引理 2.7 知 $a_2a_3a_4a_5$、b_1b_4 不干净，这与 $f_D(E_{1,4})<8/3$ 相矛盾。所以 $cr_D(a_2b_2a_3,a_4b_4)=0$ 且 $b_2\in R_0$，$D(H_1\cup T_2)$ 同构于图 2(c)，此时根据引理 2.2 有路径 $a_1a_{3k+2}P_0a_4$、$a_1b_{3k+2}b_3a_4$ 交 T_2 使 $f_D(E_{1,4})\ge 8/3$，矛盾。故 $D(H_1)$ 同构于图 3。

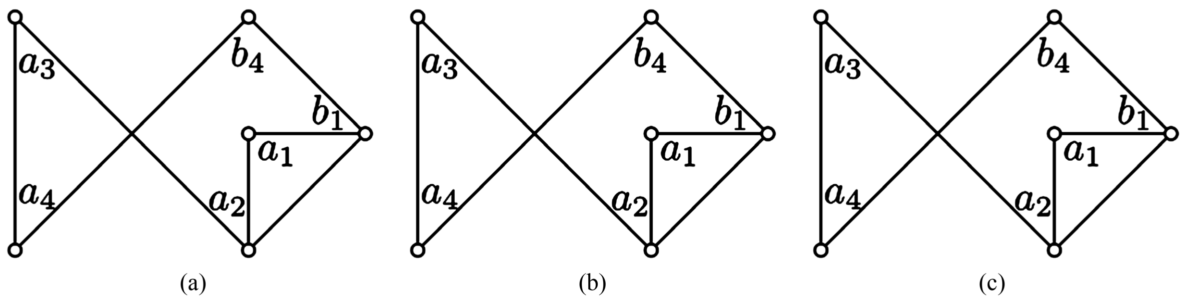


Figure 2. $D(H_1)$ with $cr_D(H_1)=1$

图 2. $D(H_1)$ 且 $cr_D(H_1)=1$

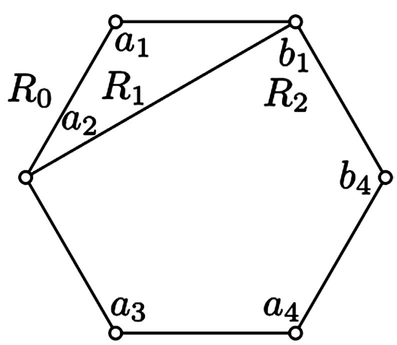


Figure 3. $D(H_1)$ with $cr_D(H_1)=0$

图 3. $D(H_1)$ 且 $cr_D(H_1)=0$

引理 2.9：若 $D(H_1)$ 同构于图 3 且 $b_2 \in R_2$，$l_1^D \ge 5$，则 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 5。

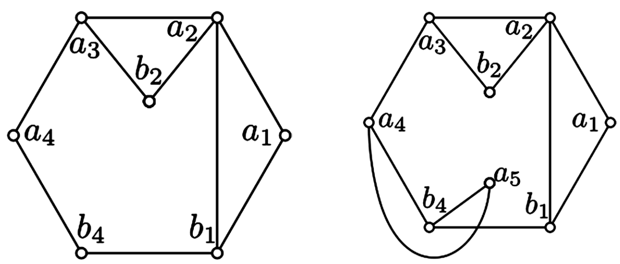
证明：由 $l_1^D \ge 5$，有 $f_D(E_1) < 2/3$，$f_D(E_{1,2}) < 4/3$，$f_D(E_{1,3}) < 2$，$f_D(E_{1,4}) < 8/3$。

当 $b_2 \in R_2$ 时，有路径 $b_2P_2b_{3k+2}a_1$、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 交 H_1 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 1$，由 $f_D(E_{1,4}) < 8/3$，则 $cr_D(T_2,H_1) \le 1$，根据引理 2.6 知 $cr_D(T_2,E_1) = 0$，$cr_D(B_3) = 0$，所以 $cr_D(T_2,a_4b_4) \le 1$。若 $cr_D(T_2,a_4b_4) = 1$ 即 $cr_D(T_2,T_4) = 1$，根据引理 2.2 知 $cr_D(T_2,T_4) \ge 2$，这与 $f_D(E_{1,4}) < 8/3$ 相矛盾，故有 $cr_D(T_2,H_1) = 0$，$D(H_1 \cup T_2)$ 同构于图 4(a)。

由 $f_D(E_{1,4}) < 8/3$，则 $cr_D(T_3,H_1 \cup T_2) \le 1$，根据引理 2.6 知 $cr_D(T_3,E_1) = 0$，$cr_D(B_3) = 0$，则有 $cr_D(T_3,a_4b_4) \le 1$。若 $cr_D(T_3,a_4b_4) = 1$ 即 $cr_D(B_4) = 1$，由引理 2.5，有 a_3、b_3 被 T_4 分离或 a_5、b_4 被 T_3 分离。当 a_3、b_3 被 T_4 分离时，此时 $f_D(E_{1,4}) \ge 2$，则 $cr_D(T_2,T_4) = 0$，$cr_D(T_4,E_1) = 0$，故 a_3、b_1 在 T_4 划分平面的同一区域，根据引理 2.2 有路径 $b_1b_{3k}P_3b_3$ 交 T_4 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 5/2$，由 $f_D(E_{1,4}) < 8/3$，有 $cr_D(b_2b_5,H_1 \cup T_2 \cup B_4) = 0$，故知 b_5、b_3 被 T_4 分离，根据引理 2.2 有路径 $b_5a_6P_0a_{3k+2}b_{3k+2}b_3$ 交 T_4 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 3$，矛盾。当 a_5、b_4 被 T_3 分离时，同理有路径 $a_5b_5a_6a_7b_7b_4$ 交 T_3 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 5/2$，由 $cr_D(T_3,E_1) = 0$ 知 b_4、b_1 在 T_3 划分平面的同一区域，所以 a_5、b_1 被 T_3 分离，即有路径 $b_1b_{3k}P_3b_6a_6a_5$ 交 T_3 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 3$，矛盾。因此 $cr_D(T_3,a_4b_4) = 0$ 即 $cr_D(B_4) = 0$。

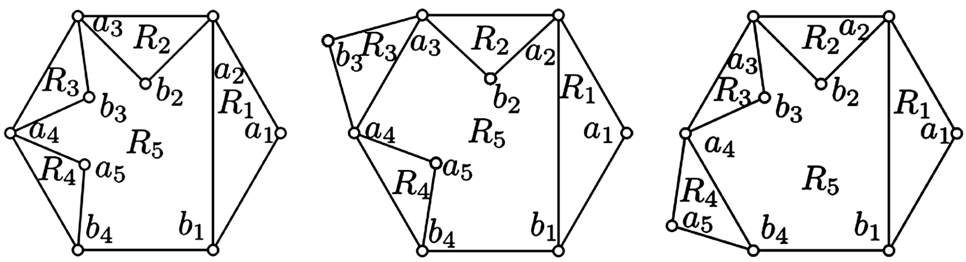
对于 T_4，同理有 $cr_D(T_4,H_1 \cup B_3) \le 1$，又知 $cr_D(B_2,T_4) = 0$，$cr_D(B_4) = 0$，则 $cr_D(T_4,b_1b_4) \le 1$。当 $cr_D(T_4,b_1b_4) = 1$ 时，根据好的画法的定义有 $cr_D(a_4a_5,b_1b_4) = 1$，此时 $f_D(E_{1,4}) \ge 2$，$a_5 \in R_2 \cup R_0$，$f_D(E_1) \ge 1/2$，由 $f_D(E_1) < 2/3$、$f_D(E_{1,2}) < 4/3$ 知路径 $b_2P_2b_{3k+2}a_1$、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 中至少有一条路径交 B_4 至少两次使 $f_D(E_{1,4}) \ge 5/2$。当 $a_5 \in R_0$ 时，由 $f_D(E_{1,4}) < 8/3$，有 $cr_D(b_2b_5,H_1 \cup T_2 \cup B_4) = 0$，则 $b_5 \in R_2 \cup R_3$，均会与 a_5 分离，根据引理 2.2 有 a_5b_5 交 $H_1 \cup T_2 \cup B_4$ 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 3$，矛盾。当 $a_5 \in R_2$ 时，$D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 4(b)，根据引理 2.2 有路径 $a_5P_0a_{3k+2}a_1$、$a_5b_5P_2b_{3k+2}a_1$ 交 $H_1 \cup T_2 \cup B_4$ 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 2$，由 $f_D(E_1) < 2/3$、$f_D(E_{1,2}) < 4/3$ 知路径 $a_5P_0a_{3k+2}a_1$、$a_5b_5P_2b_{3k+2}a_1$ 各交 B_4 至少两次使 $f_D(E_{1,4}) \ge 3$，矛盾。因此 $cr_D(T_4,b_1b_4) = 0$ 即 $cr_D(T_4,H_1 \cup B_3) \le 0$。

综上知 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 5。



(a) (b)

Figure 4. Subdrawings of D
图 4. D 的子画法



(a) (b) (c)

Figure 5. Subdrawings of D
图 5. D 的子画法

引理 2.10：若 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 5，则 $l_1^D \le 5$。

证明：假设 $l_1^D \ge 6$，则 $f_D(E_1) < 2/3$，$f_D(E_{1,2}) < 4/3$，$f_D(E_{1,3}) < 2$，$f_D(E_{1,4}) < 8/3$，$f_D(E_{1,5}) < 10/3$。

根据引理 2.2，当 $b_5 \in R_1$ 时，有 $cr_D(b_2b_5a_5, T_1) \ge 2$，这与 $f_D(E_1) < 1$ 相矛盾。当 $b_5 \in R_2$ 时，有路径 b_5a_5、$b_5a_6b_6b_3$、$b_5b_8a_8P_0a_5$ 交 T_2 使 $f_D(E_{1,2}) \ge 3/2$，矛盾。当 $b_5 \in R_3$ 时，有 b_2b_5、b_5a_5 以及路径 $b_5a_6a_5$ 交 T_3 使 $f_D(E_{1,3}) \ge 2$，矛盾。当 $b_5 \in R_4$ 时，$cr_D(b_2b_5, T_4) \ge 1$，且有路径 $b_5a_5P_0a_{3k+2}b_{3k+2}a_1$、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$、$b_5a_6b_6b_3$、$b_5P_2b_{3k-1}a_{3k}b_{3k}b_1$ 交 T_4 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 3$，矛盾。

当 $b_5 \in R_5$ 时，根据引理 2.2 有路径 $b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$ 交 $b_1b_4a_4a_3a_2b_1$ 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 1$，由 $f_D(E_1) < 2/3$，$f_D(E_{1,2}) < 4/3$ 知路径 $b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$ 中至少有一条路径交 B_4 至少两次，此时有 $f_D(E_{1,4}) \ge 3/2$。

若 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 5(a)，由引理 2.2，若此时 $cr_D(a_5b_5, H_1 \cup T_2 \cup B_4) \ge 1$，必有 $cr_D(a_5b_5, H_1 \cup T_2 \cup B_4) \ge 2$，这与 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 相矛盾，因此 $cr_D(a_5b_5, H_1 \cup T_2 \cup B_4) = 0$，$D(H_{1,2} \cup B_4)$ 同构于图 6(a)。根据引理 2.2，此时又有路径 $b_3P_3b_{3k}b_1$、$b_3b_{3k+2}a_{3k+2}b_{3k+1}P_1b_4$ 交 $b_5a_4a_3b_2b_5$ 使 $f_D(E_{1,5}) \ge 5/2$，由 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 知 $cr_D(b_3b_6, H_{1,2} \cup B_4) \le 1$，则 $b_6 \notin R_1$。当 $b_6 \in R_0 \cup R_2 \cup R_4$ 时，$cr_D(b_3b_6, H_{1,2} \cup B_4) = 1$，$f_D(E_{1,5}) \ge 3$，则 $cr_D(b_5a_6, H_{1,2} \cup B_4) = 0$，$a_6 \in R_5 \cup R_6$，根据引理 2.2 知路径 b_6a_6 交 $H_{1,2} \cup B_4$ 使 $f_D(E_{1,5}) \ge 7/2$，矛盾。当 $b_6 \in R_5$ 时，$cr_D(b_3b_6, H_{1,2} \cup B_4) = 1$，$f_D(E_{1,5}) \ge 3$，根据引理 2.2，此时有 $cr_D(b_3b_6, b_2b_5a_5) = 1$。若 $cr_D(b_3b_6, b_2b_5) = 1$，由 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 知 $cr_D(b_6a_6a_5, H_{1,2} \cup B_4) = 0$，即 $cr_D(b_2b_5, b_3a_4a_5a_6b_6b_3) = 1$，则路径 $b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$ 必交 a_6b_6，根据引理 2.7 知 b_4b_7 不干净，这与 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 相矛盾。若 $cr_D(b_3b_6, a_5b_5) = 1$，由 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$，路径 $b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$ 必有一条路径交 $b_4b_1a_2$，另一条路径交 B_4，$f_D(E_{1,3}) \ge 1$，根据引理 2.2 知，这条交 B_4 的路径若交 T_3 至少两次使 $f_D(E_{1,3}) \ge 2$，矛盾，因此这条路径必交 T_4，即必交 a_4b_4，根据引理 2.7 知 b_3b_6 在删除边 a_5b_5 的情况下仍不干净，这与 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 相矛盾。当 $b_6 \in R_3$ 时，若 $cr_D(b_3b_6, H_{1,2} \cup B_4) \ge 1$，根据引理 2.2 必有 $cr_D(b_3b_6, H_{1,2} \cup B_4) \ge 2$，矛盾，因此 $cr_D(b_3b_6, H_{1,2} \cup B_4) = 0$，此时又有路径 $b_6a_6a_5$、$b_6a_7b_7P_1b_{3k+1}b_2$ 交 T_3 使 $f_D(E_{1,5}) \ge 10/3$，矛盾。当 $b_6 \in R_6$ 时，同理知 $cr_D(b_3b_6, H_{1,2} \cup B_4) = 0$，根据引理 2.2，有路径 $b_6a_6P_0a_{3k+2}a_1$、$b_6P_3b_{3k}a_{3k+1}b_{3k+1}a_{3k+2}b_{3k+2}a_1$、$b_6a_7b_7b_4$、$b_3b_{3k+2}b_{3k-1}a_kb_{3k}b_1$ 交 $H_{1,2} \cup B_4$，且路径 $b_6a_6P_0a_{3k+2}a_1$、$b_6P_3b_{3k}a_{3k+1}b_{3k+1}a_{3k+2}b_{3k+2}a_1$ 均交 $H_{1,2} \cup B_4$ 至少两次使 $f_D(E_{1,5}) \ge 3$，由 $f_D(E_{1,4}) < 8/3$，这四条路径中至少有一条路径交 a_5b_5，由 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 知 $cr_D(b_4b_7, H_{1,2} \cup B_4) = 0$，则 $b_7 \in R_0 \cup R_4 \cup R_5$，与 b_6 分离，即路径 $b_6a_7b_7$ 不干净。若 $cr_D(b_6a_7b_7, a_5b_5) \ge 1$，根据引理 2.7 知 $a_4b_4a_5b_5$ 不能再产生交叉，否则 b_3b_6 不干净，这与 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 相矛盾，因此路径 $b_6a_6P_0a_{3k+2}a_1$、$b_6P_3b_{3k}a_{3k+1}b_{3k+1}a_{3k+2}b_{3k+2}a_1$ 均交 $E_{1,3}$ 中的边至少两次，此时 $f_D(E_{1,3}) \ge 2$，矛盾。若 $cr_D(b_6a_7b_7, a_5b_5) = 0$，根据引理 2.7 知 b_4b_7 不干净，矛盾。

若 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 5(b)，根据引理 2.2 有路径 b_5a_5、$b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$、$a_5a_6b_6b_3$ 交 $H_1 \cup T_2 \cup B_4$ 使 $f_D(E_{1,5}) \ge 5/2$。若 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 5(d)，根据引理 2.2 有路径 b_5a_5、$b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}b_{3k+2}b_3$ 交 $H_1 \cup T_2 \cup B_4$ 使 $f_D(E_{1,5}) \ge 5/2$。由 $f_D(E_1) < 2/3$、$f_D(E_{1,2}) < 4/3$ 知路径 $b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$ 中至少有一条路径交 B_4 至少两次使 $f_D(E_{1,5}) \ge 3$，由 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$，$cr_D(a_5a_6, H_1 \cup T_2 \cup B_4) = 0$，即 $a_6 \in R_4 \cup R_0$，故 b_5 与 a_6 分离，因此有 $cr_D(b_5a_6, H_1 \cup T_2 \cup B_4) \ge 1$，这与 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$ 相矛盾。

若 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$ 同构于图 5(c)，根据引理 2.2 有路径 $b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$、$a_5a_6b_6b_3$、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}b_{3k+2}b_3$ 交 $H_1 \cup T_2 \cup B_4$ 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 2$，同图 6(b)知路径 $b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$ 中至少有一条路径交 B_4 至少两次使 $f_D(E_{1,4}) \ge 5/2$，由 $f_D(E_{1,4}) < 8/3$，有 $cr_D(b_3b_6, H_1 \cup T_2 \cup B_4) = 0$，故 $b_6 \in R_3 \cup R_0$，当 $b_6 \in R_3$ 时，由引理 2.2 有路径 $b_6P_3b_{3k}b_1$ 交 $H_1 \cup T_2 \cup B_4$ 使 $f_D(E_{1,4}) \ge 3$，矛盾。当 $b_6 \in R_0$ 时，由 $f_D(E_{1,5}) < 10/3$，$cr_D(b_5a_6a_5, H_1 \cup T_2 \cup B_4) \le 1$，所以 $a_6 \in R_4 \cup R_5$。当 $a_6 \in R_4$ 时，有

$cr_D\left(b_5a_6b_6,H_1\cup T_2\cup B_4\right)\ge 2$，根据引理 2.7 知 b_3b_6 不干净，$f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 3$，矛盾。当 $a_6\in R_5$ 时，若 $cr_D\left(a_6b_6,b_1b_4\right)\ge 1$，$b_5P_2b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6P_0a_{3k+2}a_1$ 两条路径均交 B_4 至少两次使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 8/3$，矛盾，所以 $cr_D\left(a_6b_6,b_1b_4\right)=0$，根据引理 2.2 知，
$cr_D\left(a_6b_6,H_1\cup T_2\cup B_4\right)\ge 2$，这与 $f_D\left(E_{1,4}\right)<8/3$ 相矛盾。

当 $b_5\in R_0$ 时，若 $D\left(H_1\cup T_2\cup B_4\right)$ 同构于图 5(a)，此时有 b_2b_5、a_5b_5 路径 $b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$、$b_3b_{3k+2}a_1$、$b_5a_6a_5$ 交 $H_1\cup T_2\cup B_4$ 使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 8/3$，矛盾。若 $D\left(H_1\cup T_2\cup B_4\right)$ 同构于图 5(b)、图 5(c)，已知有路径 b_2b_5、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$、$a_5a_6b_6b_3$、$a_5b_5a_6P_0a_{3k+2}b_{3k+2}b_3$ 交 $H_1\cup T_2\cup B_4$ 使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 5/2$，此时 $cr_D\left(b_2b_5,H_1\cup T_2\cup B_4\right)=1$，而 b_2、b_5 位于 $T_1\cup B_4$ 划分平面的同一区域，根据引理 2.2，若 $cr_D\left(b_2b_5,T_1\cup B_4\right)\ge 1$，则有 $cr_D\left(b_2b_5,T_1\cup B_4\right)\ge 2$，矛盾，因此 $cr_D\left(b_2b_5,T_1\cup B_4\right)=0$，故有 $cr_D\left(b_2b_5,a_2a_3\cup b_1b_4\right)=1$，由 $f_D\left(E_{1,2}\right)<4/3$ 知 $b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 必交 B_4 至少两次使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 3$，矛盾。若 $D\left(H_1\cup T_2\cup B_4\right)$ 同构于图 5(d)，由引理 2.2 有路径 b_2b_5、$b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 交 $H_1\cup T_2\cup B_4$ 使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 3/2$，同图 5(b)、图 5(c)情况类似，若 $cr_D\left(b_2b_5,T_1\cup B_4\right)\ge 1$，则有
$cr_D\left(b_2b_5,T_1\cup B_4\right)\ge 2$，$f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 5/2$，$f_D\left(E_{1,2}\right)\ge 1$，由 $f_D\left(E_{1,2}\right)<4/4$ 知 $b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 必交 B_4 至少两次使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 8/3$，矛盾，因此若 $cr_D\left(b_2b_5,T_1\cup B_4\right)=0$，所以有 $cr_D\left(b_2b_5,a_2a_3\cup b_1b_4\right)=1$，同理由 $f_D\left(E_{1,2}\right)<4/3$ 知 $b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 必交 B_4 至少两次使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 2$，根据引理 2.2，若 $cr_D\left(a_5b_5,H_1\cup T_2\cup B_4\right)\ge 1$，必有 $cr_D\left(a_5b_5,H_1\cup T_2\cup B_4\right)\ge 2$，这与 $f_D\left(E_{1,5}\right)<10/3$ 相矛盾，因此 $cr_D\left(a_5b_5,H_1\cup T_2\cup B_4\right)=0$，$D\left(H_{1,2}\cup B_4\right)$ 同构于图 6(b)、图 6(c)之一。若 $D\left(H_{1,2}\cup B_4\right)$ 同构于图 6(b)，由引理 2.2 有路径 $b_3b_{3k+2}a_1$、$b_3b_6a_7b_7b_4$ 交 $H_{1,2}\cup B_4$ 使 $f_D\left(E_{1,5}\right)\ge 3$，由 $f_D\left(E_{1,5}\right)<10/3$，知 $cr_D\left(b_3b_6,H_{1,2}\cup B_4\right)=0$，且路径 $b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 不能交 $H_{1,2}\cup B_4$ 三次，故其必交 $a_4b_4a_5$，根据引理 2.7 知 b_3b_6 不干净，这与 $f_D\left(E_{1,5}\right)<10/3$ 相矛盾。若 $D\left(H_{1,2}\cup B_4\right)$ 同构于图 6(c)，由引理 2.2 有路径 $b_3b_6a_7b_7b_4$ 交 $H_{1,2}\cup B_4$ 使 $f_D\left(E_{1,5}\right)\ge 5/2$，由 $f_D\left(E_{1,4}\right)<8/3$，$f_D\left(E_{1,5}\right)<10/3$ 知
$cr_D\left(b_4b_7,H_1\cup T_2\cup B_4\cup b_2b_5\right)=0$、$cr_D\left(b_4b_7,a_5b_5\right)\le 1$，故 $b_7\in R_4\cup R_6\cup R_7\cup R_0$。当 $b_7\in R_4\cup R_6$ 时，有路径 $b_7P_1b_{3k+1}a_{3k+1}a_{3k}b_{3k}b_1$、$b_7a_7b_6b_3$ 交 $H_1\cup T_2\cup B_4\cup b_2b_5$ 使 $f_D\left(E_{1,4}\right)\ge 8/3$，矛盾。当 $b_7\in R_7$ 时，有路径 $b_7P_1b_{3k+1}a_{3k+1}a_{3k}b_{3k}b_1$、$b_7a_7b_6b_3$、$b_7a_8b_8P_2b_{3k+2}b_3$ 交 $H_{1,2}\cup B_4$ 使 $f_D\left(E_{1,5}\right)\ge 10/3$，矛盾。当 $b_7\in R_0$ 时，有 $cr_D\left(b_4b_7,a_5b_5\right)=1$，$f_D\left(E_{1,5}\right)\ge 3$，对于路径 $b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$，若其交 a_3a_4，必交 T_3 至少两次使 $f_D\left(E_{1,3}\right)\ge 2$，矛盾，所以路径 $b_2b_{3k+1}a_{3k+2}a_1$ 必交 a_4b_4，根据引理 2.7 知 b_3b_6 不干净，这与 $f_D\left(E_{1,5}\right)<10/3$ 相矛盾。

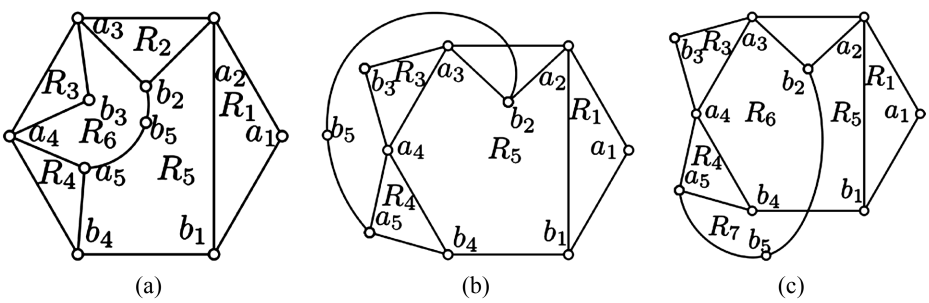


Figure 6. Subdrawings of D

图 6. D 的子画法

引理 2.11：设 D 是 $R_{3k+2}(1,3)$ 的一个好画法使得 $cr\left(R_{3k+2}(1,3)\right)<2k+2$，且 $cr\left(R_{3(k-1)+2}(1,3)\right)\ge 2(k-1)+2$，$k\ge 2$。若 $D\left(H_1\right)$ 同构于图 3 且 b_2 在区域 R_0，则 $l_1^D\le 12$。

证明：假设 $l_1^D\ge 13$，则 $f_D\left(E_1\right)<2/3$，$f_D\left(E_{1,2}\right)<4/3$，$f_D\left(E_{1,3}\right)<2$，$f_D\left(E_{1,4}\right)<8/3$，$f_D\left(E_{1,5}\right)<10/3$，$f_D\left(E_{1,6}\right)<4$，$f_D\left(E_{1,7}\right)<14/3$，$f_D\left(E_{1,8}\right)<16/3$，$f_D\left(E_{1,9}\right)<6$，$f_D\left(E_{1,10}\right)<20/3$，$f_D\left(E_{1,11}\right)<22/3$，$f_D\left(E_{1,12}\right)<8$。

由 $l_1^D\ge 6$ 且 b_2 在区域 R_0，结合以上定理可以类似的证明出 $cr_D\left(B_3,H_1\right)=0$ 且 b_3 在区域 R_0 中，

$D(H_1\cup B_3)$ 同构于图 7(a)。同时利用反证法可以证得 b_5， a_5 在区域 R_0 中且 $cr_D(b_2b_5a_5a_4, H_1\cup B_3)=0$，$D(H_{1,2}\cup T_3)$ 同构于图 7(b)。接下来，在 $H_{1,2}\cup T_3$ 添加路径 $b_3b_6a_6a_5$，通过对 b_6 可能存在的区域进行分类讨论。当 b_6 在区域 R_1， R_2， R_3， R_4， R_5 中时，都可以通过前六组的计数假设得出矛盾。

当 b_6 在区域 R_0 中时，由 $f_D(E_{1,5})<10/3$ 知 $cr_D(b_3b_6,H_{1,2}\cup T_3)\le 2$，根据引理 2.2，若 $cr_D(b_3b_6,H_{1,2}\cup T_3)\ge 1$，则 $cr_D(b_3b_6,H_1\cup B_2)$ 为偶数， $cr_D(b_3b_6,a_3a_4a_5b_5b_2a_3)$ 为奇数，由 $f_D(E_{1,3})<2$，有 $cr_D(b_3b_6,B_2)=0$ 且 b_3b_6 不同时交 a_3a_4、b_1b_4，则当 $cr_D(b_3b_6,H_{1,2}\cup T_3)=2$ 时，必有 $cr_D(b_3b_6,a_3a_4b_4)=2$，由 $f_D(E_{1,5})<10/3$，有 $cr_D(b_4a_5,H_{1,2}\cup T_3)=0$，此时 $D(H_{1,2}\cup B_4\cup b_3b_6)$ 同构于图 7(c)，根据引理 2.2，有路径 $b_6P_3b_{3k}b_1$、$b_6a_7P_0a_{3k+2}a_1$ 交 T_4 使 $f_D(E_{1,5})\ge 10/3$，矛盾。所以 $cr_D(b_3b_6,H_{1,2}\cup T_3)=1$ 即 $cr_D(b_3b_6,a_4a_5b_5b_2)=1$，$D(H_{1,2}\cup T_3\cup b_3b_6)$ 同构于图 7(d)~(f)之一。而当 $D(H_{1,2}\cup T_3\cup b_3b_6)$ 同构于图 7(d)~(f)之一时，结合以上引理，以及针对前 12 组边的计数假设，讨论可能出现的所有子情况，最终得出矛盾，证毕。

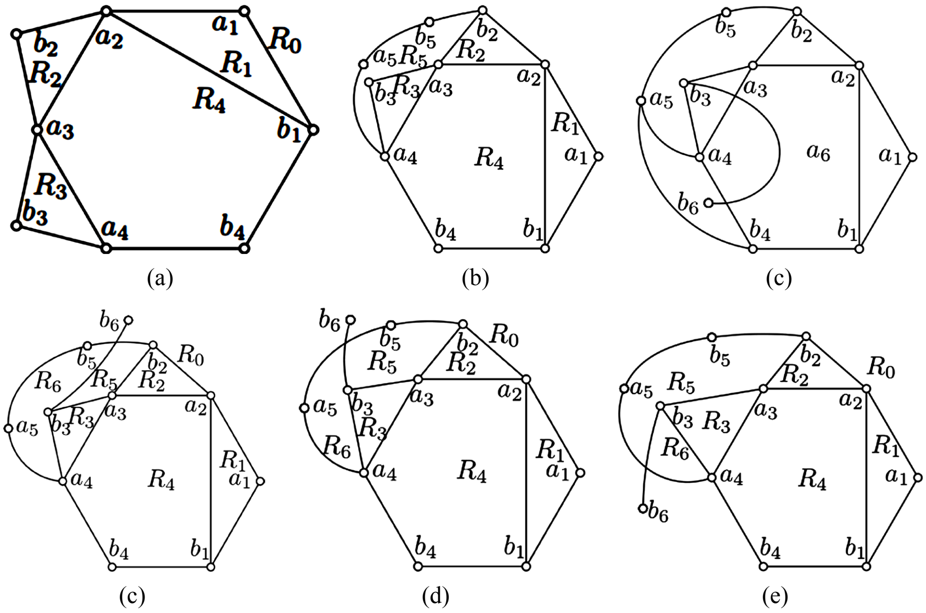


Figure 7. Subdrawings of D
图 7. D 的子画法

3. 结论

本文利用数学归纳法和反证法证明了玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数。首先找到了玫瑰花窗图 $R_{3k+2}(1,3)$ 的一个好的画法，根据交叉数的定义验证了 $cr(R_{3k+2}(1,3))\le 2k+2$。随后将 $R_{3k+2}(1,3)$ 的边集分成 $3k+2$ 组，得到了一个 $R_{3k+2}(1,3)$ 的一个可传递分解。文中枚举所有可能的情况与画法，分类讨论，根据相关引理以及限制条件，最终验证了 $R_{3k+2}(1,3)$ 的交叉数的下界，即 $cr(R_{3k+2}(1,3))\le 2k+2$。进而证明了 $cr(R_{3k+2}(1,3))=2k+2$。

参考文献

[1] Turan, P. (1997) A Note of Welcome. *Journal of Graph Theory*, **1**, 7-9. https://doi.org/10.1002/jgt.3190010105

[2] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1993) Crossing Number Is NP-Complete. *SIAM Journal on Algebraic & Discrete Methods*, **1**, 312-316. https://doi.org/10.1137/0604033

[3] 黄元秋，王晶．图的交叉数综述[J]．华东师范大学学报(自然科学版), 2010(3): 68-80.

[4] Nahas, N. (2003) On the Crossing Number of Km, N. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **10**, 1-6.

https://doi.org/10.37236/1748

[5] Mei, H.F. and Huang, Y.Q. (2007) The Crossing Number of Ki5, N. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, **1**, 33-44.

[6] Huang, Y. and Zhao, T. (2007) The Crossing Number of $K_{1,4,n}$. *Journal of Natural Science of Hunan Normal University*, **308**, 1634-1638. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.12.002

[7] 黄元秋, 赵霆雷. 关于完全 3-部图 $K_{1,6,n}$ 的交叉数[J]. 应用数学学报, 2006, 29(6): 1046-1053.

[8] Huang, Y.Q. and Zhao, T.L. (2006) On the Crossing Number of the Complete Tripartite Graph $K_{1,8,n}$. *Acta Mathematica Scientia*, **26**, 1115-1122.

[9] 王晶, 黄元秋. 完全 3-部图 $K_{1,10,n}$ 的交叉数[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2008, 23(3): 349-356.

[10] 林晓惠. 图论中若干难题的研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2004.

[11] 马登举, 任韩, 卢俊杰. 广义 Petersen 图 G(2m+1, M)的交叉数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2005(1): 34-39.

[12] 郑百功. 冒泡排序图 B_n 和广义 Petersen 图 P(10, 3)的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2013.

[13] Yang, X., Chen, X. and Yang, Y. (2023) A Necessary and Sufficient Condition for Lower Bounds on Crossing Numbers of Generalized Periodic Graphs in an Arbitrary Surface.

[14] Bondy, J. and Murty, U. (1976) Graph Theory with Its Applications. American Elsevier, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2