Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(2), 730-737**
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132071

具有Dirichlet信号边界的一类趋化–流体模型的研究

况　旺，侯智博*

西华大学理学院，四川　成都

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

本文讨论一类具有规定信号浓度的趋化–流体耦合方程组解的性质。利用二维有界区域上的插值不等式和边界上的逐点不等式，得到细胞密度和化学信号浓度梯度的联合估计，并结合算子半群理论，最终证得该方程组的初边值问题存在整体有界的经典解。

关键词

趋化–流体模型，Dirichlet边界条件，整体经典解，有界性

Study on a Chemotaxis-Fluid Model with Dirichlet Signal Boundary

Wang Kuang, Zhibo Hou*

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

In this paper, the properties of solutions to the chemotaxis-fluid system with prescribed signal concentration on the boundary are considered. By using the interpolation inequality in a two-dimensional bounded domain and a pointwise inequality on the boundary, the joint estimates to cell density and chemical signal concentration gradient are obtained, and combined with the operator semigroup theory, it is shown that the initial boundary value problem of the chemotaxis-fluid system exists a global and bounded classical solution.

*通讯作者。

文章引用：况旺，侯智博．具有 Dirichlet 信号边界的一类趋化-流体模型的研究[J]．应用数学进展, 2024, 13(2): 730-737.
DOI: 10.12677/aam.2024.132071

Keywords

Chemotaxis-Fluid System, Dirichlet Boundary Condition, Global Classical Solution, Boundedness

1. 引言

在自然界中，细菌种群的运动与其生存环境密切相关。特别地，周围环境中化学物质的代谢、液体的流动以及空气－液体接触面的物质交换等对细菌种群运动的方向、速率和稳态行为有相当复杂的影响。通过细致观察和分析悬浮液中好氧细菌的趋化运动现象，Tuval 等[1] 2005 年报告了一种有趣的“趋化抵制效应”(chemotactic Boycott effect)机制，该机制说明悬浮液中细菌的集体运动可以提高种群的生存能力，并得到如下趋化－流体耦合方程组

$$\begin{cases} n_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla n = \Delta n - \nabla\cdot\left(nS\nabla c\right), & x\in\Omega,\ t>0, \\ c_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla c = \Delta c - nf\left(c\right), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \boldsymbol{u}_t + \kappa\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} + \nabla P = \Delta\boldsymbol{u} + n\nabla\phi, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & x\in\Omega,\ t>0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$，未知函数 n 表示细菌种群密度，c 表示化学信号浓度，$\boldsymbol{u}$ 和 P 分别表示流体速度场和相应的标量压力，参数 $\kappa\in\mathbb{R}$ 刻画了非线性对流项的强度，S 表示趋化灵敏度函数并且可能依赖于变量 n，c 和 x 的取值。ϕ 和 $f\left(c\right)$ 分别表示给定的重力势函数和氧气消耗率。

由于生物背景的多样性和重要性，许多学者致力于结合不同的生物背景研究方程组(1)在不同的初边值条件下解的性质，并且已经取得了重大的进展。当 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个边界光滑的有界区域，考虑方程组(1)在 Neumann-Neumann-Dirichlet 边界条件下的初边值问题，即未知函数满足(υ 为边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量)

$$\nabla n\cdot\upsilon = \nabla c\cdot\upsilon = 0, \quad \boldsymbol{u}=0, \quad x\in\partial\Omega,\ t>0. \tag{2}$$

当 $S\equiv 1$ 时，Winkler [2]已经证明 $N=2$ 时方程组(1)经典解整体存在且唯一；$N=3$ 且 $\kappa=0$ 时，方程组(1)弱解整体存在。之后，模型(1)~(2)及其变体解的整体有界性、最终光滑性和大时间渐近行为等被广泛研究[3] [4] [5] [6]。特别地，Painter 和 Hillen [7]发现细菌的趋化运动存在“体积填充”效应(volume-filling effect)，此时趋化灵敏度函数 $S=S\left(n,c,x\right)$ 满足代数衰减条件 $\left|S\left(n,c,x\right)\right|\le C\left(1+n\right)^{-\alpha}$。文献[8]基于该衰减条件证明得到 $N=3$ 时，对任意的 $\alpha>\frac{1}{6}$，模型(1)~(2)存在整体经典解。进一步地，文献[9]将文献[8]的指标范围提升到 $\alpha>0$。另外，当 $N=2$，灵敏度函数 S 为矩阵值函数时，Cao [10]证得小初值条件下，模型(1)~(2)有整体经典解。

上述研究均是在 Neumann 信号边界条件下进行。然而，某些情况下，Dirichlet 信号边界条件更能反映客观实际。由于氧气在空气中的扩散速率比在水中强，所以文献[1]的理论和数值分析都假定在空气－液体接触面(区域边界部分)有一个固定的氧气浓度。因此，学者们开始考虑方程组(1)在 Neumann-Dirichlet-Dirichlet 型边界条件

$$\left(\nabla n - nS\nabla c\right)\cdot\upsilon = 0, \quad c=c_*, \quad \boldsymbol{u}=0, \quad x\in\partial\Omega,\ t>0 \tag{3}$$

下解的性质。Wang 等[11] 2021 年证明 $N=3$ 且 $\kappa=0$ 时，方程组(1)在条件(3)下存在整体广义解。之后，Tian 和 Xiang [12]在 2023 年讨论方程组(1)中 Δn 被 $\nabla\cdot\left(n^{m-1}\nabla n\right)$ 替换时，弱解的整体存在性。此外，文献[13]中证明 $N=2$ 时，若 $\|n_0\|_{L^1(\Omega)}\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}$ 足够小，则方程组(1)存在整体经典解。受上述工作的启发，本文考虑如下一类边界上具有规定化学信号浓度的趋化－流体耦合模型

$$\begin{cases} n_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla n=\Delta n-\nabla\cdot\left(n(1+n)^{-\alpha}\nabla c\right), & x\in\Omega,\ t>0,\\ c_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c=\Delta c-nc, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \boldsymbol{u}_t=\Delta\boldsymbol{u}+\nabla P+n\nabla\phi,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \left(\nabla n-n(1+n)^{-\alpha}\nabla c\right)\cdot\upsilon=0,\quad c=c_*,\quad \boldsymbol{u}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ n(x,0)=n_0(x),\ \ c(x,0)=c_0(x),\ \ \boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{4}$$

解的整体存在性和有界性，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是一个具有光滑边界的有界区域，c_* 是固定的非负常数，α 为大于零的数，重力势函数 ϕ 满足 $\phi\in W^{2,\infty}(\Omega)$。另外，假定初始函数 (n_0,c_0,u_0) 满足

$$\begin{cases} n_0\in C^0\left(\bar\Omega\right),\ n_0\ge 0 \text{ 且 } n_0\not\equiv 0,\\ c_0\in W^{1,\infty}(\Omega),\ c_0\ge 0 \text{ 且 } c_0\big|_{\partial\Omega}=c_*,\\ \boldsymbol{u}_0\in W^{2,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^2\right),\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=0 \text{ 且 } \boldsymbol{u}_0\big|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{5}$$

2. 局部存在性和预备引理

为了处理模型(4)的非线性边界条件 $\left(\nabla n-n(1+n)^{-\alpha}\nabla c\right)\cdot\upsilon=0$，根据文献[14]中正则化处理方式 14]，我们定义截断函数族 $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ 和函数 $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ 分别满足 $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}\subset C_0^\infty(\Omega)$，$0\le\rho_\varepsilon\le 1$，$\rho_\varepsilon\to 1$ （$\varepsilon\to 0$）和 $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}\subset C_0^\infty([0,\infty))$，$0\le\chi_\varepsilon\le 1$，$\chi_\varepsilon\to 1$ （$\varepsilon\to 0$）。令

$$F_\varepsilon(x,n):=\rho_\varepsilon(x)\cdot\chi_\varepsilon(n)\cdot(1+n)^{-\alpha},$$

那么对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，模型(4)相应的正则化模型为

$$\begin{cases} n_{\varepsilon t}+\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla n_\varepsilon=\Delta n_\varepsilon-\nabla\cdot\left(n_\varepsilon F_\varepsilon(x,n_\varepsilon)\nabla c_\varepsilon\right), & x\in\Omega,\ t>0,\\ c_{\varepsilon t}+\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla c_\varepsilon=\Delta c_\varepsilon-n_\varepsilon c_\varepsilon, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \boldsymbol{u}_{\varepsilon t}=\Delta\boldsymbol{u}_\varepsilon+\nabla P_\varepsilon+n_\varepsilon\nabla\phi,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u}_\varepsilon=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \nabla n_\varepsilon\cdot\upsilon=0,\quad c_\varepsilon=c_*,\quad \boldsymbol{u}_\varepsilon=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ n_\varepsilon(x,0)=n_0(x),\ \ c_\varepsilon(x,0)=c_0(x),\ \ \boldsymbol{u}_\varepsilon(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

引理 1 [13] 假设(5)式成立，$\phi\in W^{2,\infty}(\Omega)$，那么对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，模型(6)存在经典解 $(n_\varepsilon,c_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon,P_\varepsilon)$ 使得

$$\begin{cases} n_\varepsilon\in C^0\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max,\varepsilon})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar\Omega\times(0,T_{\max,\varepsilon})\right),\\ c_\varepsilon\in\bigcap_{q\ge 1}C^0\left([0,T_{\max,\varepsilon});W^{1,q}(\Omega)\right)\cap C^{2,1}\left(\bar\Omega\times(0,T_{\max,\varepsilon})\right),\\ \boldsymbol{u}_\varepsilon\in\bigcap_{\vartheta\in\left(\frac12,1\right)}C^0\left([0,T_{\max,\varepsilon});D\left(A^\vartheta\right)\right)\cap C^{2,1}\left(\bar\Omega\times(0,T_{\max,\varepsilon});\mathbb{R}^2\right),\\ P_\varepsilon\in C^{1,0}\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max,\varepsilon})\right) \end{cases}$$

成立，其中 n_ε 和 c_ε 在 $\bar\Omega\times(0,T_{\max,\varepsilon})$ 上均是非负的，$D(A)$ 的定义参见文献[15]。此外，如果 $T_{\max,\varepsilon}<\infty$，那么当 $t\to T_{\max,\varepsilon}$ 时，有 $\|n_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|c_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\to\infty$ 成立。并且对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 有

$$\int_\Omega n_\varepsilon(\cdot,t)=\int_\Omega n_0\text{，}\quad \|c_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le M:=\max\left\{\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)},c_*\right\}$$

成立。

引理 2 [16] 设 $(n_\varepsilon,c_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon,P_\varepsilon)$ 是正则化模型(6)的经典解。对任意的 $p>1$ 和 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，存在常数 $C>0$，有 $\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\le C$ 成立。

引理 3 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$q>1$，$\gamma>1$，$\theta\ge\frac{2\gamma}{2\gamma-1}(q+1)$。则存在正常数 C 和 M，只要 $\varphi\in C^2(\bar\Omega)$ 且满足 $\varphi|_{\partial\Omega}=0$ 和 $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\le M$，那么不等式

$$\|\nabla\varphi\|_{L^\theta(\Omega)}^\theta\le C\left\||\nabla\varphi|^{q-1}D^2\varphi\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{(2\gamma-1)\theta-2\gamma}{q(2\gamma-1)}}+C$$

成立，其中 $D^2\varphi$ 表示 φ 的 Hessian 矩阵。

证明 根据文献[16]中的引理 2.7 和条件 $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\le M$ 可得结论成立。

3. 经典解的整体存在性和有界性

为证得模型(6)存在整体有界的经典解，还需要建立 n_ε 和 c_ε 更高的正则性估计。

引理 4 设 $(n_\varepsilon,c_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon,P_\varepsilon)$ 是正则化模型(6)的经典解。对任意的 $\alpha>0$，$p>1$，$q>1$，$\varepsilon\in(0,1)$ 和 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，存在常数 $C>0$，有

$$\|n_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}+\|\nabla c_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2q}(\Omega)}\le C$$

成立。

证明 在模型(6)第一个方程两端同乘 n_ε^{p-1} 并在 Ω 上积分，利用分部积分公式和条件 $\nabla\cdot u_\varepsilon=0$ 有等式

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega n_\varepsilon^p=-(p-1)\int_\Omega n_\varepsilon^{p-2}|\nabla n_\varepsilon|^2+\int_\Omega n_\varepsilon\rho_\varepsilon\chi_\varepsilon(1+n_\varepsilon)^{-\alpha}\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla n_\varepsilon^{p-1}$$

成立，再由截断函数的性质和 Young 不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega n_\varepsilon^p+\frac{3(p-1)}{p}\int_\Omega\left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2\le p(p-1)\int_\Omega n_\varepsilon^{p-2\alpha}|\nabla c_\varepsilon|^2. \tag{7}$$

根据 Hölder 不等式，存在 $\theta>1$ 和 $\theta'=\theta/(\theta-1)$ 使得当

$$(p-2\alpha)\theta'>1 \tag{8}$$

时，有

$$p(p-1)\int_\Omega n_\varepsilon^{p-2\alpha}|\nabla c_\varepsilon|^2\le p(p-1)\left(\int_\Omega n_\varepsilon^{(p-2\alpha)\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta'}}\left(\int_\Omega|\nabla c_\varepsilon|^{2\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{9}$$

成立。应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和引理 1 的质量守恒式 $\int_\Omega n_\varepsilon(\cdot,t)=\int_\Omega n_0$，存在常数 $C_1>0$ 使得

$$\left(\int_\Omega n_\varepsilon^{(p-2\alpha)\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta'}}\le C_1\left(\int_\Omega\left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2\right)^{\frac{p-2\alpha}{p}-\frac{1}{p\theta'}}+C_1 \tag{10}$$

成立。接下来处理(9)式中 ∇c_ε 项，做变换 $\hat c_\varepsilon=c_\varepsilon-c_*$，则 $\hat c_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0$ 且满足 $\nabla\hat c_\varepsilon=\nabla(c_\varepsilon-c_*)=\nabla c_\varepsilon$，$D^2\hat c_\varepsilon=D^2(c_\varepsilon-c_*)=D^2c_\varepsilon$，根据引理 1 和引理 3 可得当

$$\theta\ge\frac{\gamma_1}{2\gamma_1-1}(q+1) \tag{11}$$

时，有

$$\left(\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le C_2\left\|\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q-1} D^2 c_{\varepsilon}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{(2\gamma_1-1)2\theta-2\gamma_1}{q\theta(2\gamma_1-1)}} + C_2 = C_2\left(\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\left|D^2 c_{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{(2\gamma_1-1)\theta-\gamma_1}{q\theta(2\gamma_1-1)}} + C_2, \tag{12}$$

其中 $q>1$， $\gamma_1>1$ 和 $C_2>0$。结合(9)，(10)和(12)式以及 Young 不等式可得当

$$\frac{p-2\alpha}{p}-\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)+\frac{(2\gamma_1-1)\theta-\gamma_1}{q\theta(2\gamma_1-1)}<1 \tag{13}$$

时，对任意的 $\eta_0>0$ 有

$$p(p-1)\int_{\Omega} n_{\varepsilon}^{p-2\alpha}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^2 \le \eta_0\left(\int_{\Omega}\left|\nabla n_{\varepsilon}^{\frac{p}{2}}\right|^2+\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\left|D^2 c_{\varepsilon}\right|^2\right)+C_0 \tag{14}$$

成立，其中常数 $C_0>0$。由文献[17]中引理 5.7 可得对任意的 $q>1$ 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q}+\frac{2(q-1)}{q}\int_{\Omega}\left|\nabla\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right|^2+q\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\left|D^2 c_{\varepsilon}\right|^2\\
&\le 4q^2\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q}\left|\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\right|^2+4q^2\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\left|n_{\varepsilon}c_{\varepsilon}\right|^2+q\int_{\partial\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\frac{\partial\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^2}{\partial\upsilon}-2q\int_{\partial\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\left(n_{\varepsilon}c_{*}\right)\frac{\partial c_{\varepsilon}}{\partial\upsilon}\\
&=: I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned} \tag{15}$$

利用引理 2 和 Hölder 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Young 不等式可得当 $r>2$ 时，对任意的 $\eta_1>0$ 有

$$\begin{aligned}
I_1 &= 4q^2\left\|\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\left|\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\right|\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 4q^2\left\|\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\right\|_{L^r(\Omega)}^2\left\|\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right\|_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)}^2\\
&\le C_3\left(C_4\left\|\nabla\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{r}}\left\|\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(r-2)}{r}}+C_4\left\|\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(r-2)}{r}}\right)\\
&\le \eta_1\left\|\nabla\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C_5\left\|\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C_5
\end{aligned} \tag{16}$$

成立，其中常数 C_3， C_4 和 $C_5>0$。再结合文献[17]中引理 5.9，做变换 $\hat{c}_{\varepsilon}=c_{\varepsilon}-c_{*}$ 可得对任意的 $\eta_2>0$ 有

$$C_5\left\|\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \eta_2\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\left|D^2 c_{\varepsilon}\right|^2+C_5'(\eta_2)\int_{\Omega}\left|c_{*}-c_{\varepsilon}\right|^{2q} \tag{17}$$

成立，其中常数 $C_5'(\eta_2)>0$。将(17)式代入(16)式并结合引理 2.1，存在常数 $C_6>0$ 使得

$$I_1 \le \eta_1\int_{\Omega}\left|\nabla\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{q}\right|^2+\eta_2\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^{2q-2}\left|D^2 c_{\varepsilon}\right|^2+C_6 \tag{18}$$

成立。之后，类似(14)式的构造，由 Hölder 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，引理 1，引理 3 和 Young 不等式可得当

$$2(q-1)\mu \ge \frac{\gamma_2}{2\gamma_2-1}(q+1) \text{ 和 } \frac{p-2\alpha}{p}-\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)+\frac{(2\gamma_2-1)(q-1)\mu-\gamma_2}{q\mu(2\gamma_2-1)}<1 \tag{19}$$

时，存在常数 C_7， C_8， C_9 和 $C_{10}>0$ 使得对任意的 $\eta_3>0$ 有

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le C_7\left(\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{(2q-2)\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\left(\int_\Omega |n_\varepsilon|^{2\mu'}\right)^{\frac{1}{\mu'}} \\
&\le C_8\left(\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{(2q-2)\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\left\{\left(\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2\right)^{\frac{2}{p}-\frac{1}{p\mu'}}+1\right\} \\
&\le C_9\left\{\left\||\nabla c_\varepsilon|^{q-1}D^2c_\varepsilon\right\|^{\frac{(2\gamma_2-1)2(q-1)\mu-2\gamma_2}{q\mu(2\gamma_2-1)}}+1\right\}\left\{\left(\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2\right)^{\frac{2}{p}-\frac{1}{p\mu'}}+1\right\} \\
&\le \eta_3\left(\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q-2}\left|D^2c_\varepsilon\right|^2+\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2\right)+C_{10},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中 $\mu>1$， $\mu'=\dfrac{\mu}{\mu-1}$， $p>1$， $q>1$， $\gamma_2>1$。

由文献[17]中边界上的逐点不等式(引理 5.8)和引理 5.10，结合引理 1 可得对任意的 $\eta_4>0$ 有

$$
I_3+I_4\le \eta_4\int_\Omega \left|\nabla|\nabla c_\varepsilon|^q\right|^2+\eta_4\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q-2}\left|D^2c_\varepsilon\right|^2+C_{11}, \tag{21}
$$

其中常数 $C_{11}>0$。利用文献[16]中的引理 2.8 可知存在满足(8)，(11)，(13)和(19)式的参数，因此联立(7)，(14)，(15)，(18)，(20)和(21)式，存在常数 $C_{12}>0$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega n_\varepsilon^p+\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q}\right\}+\frac{3(p-1)}{p}\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2+\frac{2(q-1)}{q}\int_\Omega \left|\nabla|\nabla c_\varepsilon|^q\right|^2+q\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q-2}\left|D^2c_\varepsilon\right|^2 \\
&\le(\eta_0+\eta_3)\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2+(\eta_1+\eta_4)\int_\Omega \left|\nabla|\nabla c_\varepsilon|^q\right|^2+(\eta_0+\eta_2+\eta_3+\eta_4)\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q-2}\left|D^2c_\varepsilon\right|^2+C_{12}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

成立。由 $\eta_i\,(i=0,1,2,3,4)$ 的任意性，可取 $\eta:=\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4=\min\left\{\dfrac{2(p-1)}{p},\dfrac{q-1}{q},\dfrac{q}{2}\right\}$，故整理(22)式可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega n_\varepsilon^p+\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q}\right\}+\frac{p-1}{p}\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2+\frac{q-1}{q}\int_\Omega \left|\nabla|\nabla c_\varepsilon|^q\right|^2+\frac{q}{2}\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q-2}\left|D^2c_\varepsilon\right|^2\le C_{12}. \tag{23}
$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式和引理 1，存在常数 $C_{13}>0$， $\int_\Omega n_\varepsilon^p\le\dfrac{p-1}{2p}\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2+C_{13}$。再由文献[17]中引理 5.9 和本文引理 1，存在常数 $C_{14}>0$， $\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q}\le\dfrac{q}{2}\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q-2}\left|D^2c_\varepsilon\right|^2+C_{14}$。因此整理(23)式可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega n_\varepsilon^p+\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q}\right)+\left(\int_\Omega n_\varepsilon^p+\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q}\right)+\frac{p-1}{2p}\int_\Omega \left|\nabla n_\varepsilon^{\frac{p}{2}}\right|^2\le C_{15}:=C_{12}+C_{13}+C_{14},
$$

令 $y(t):=\int_\Omega n_\varepsilon^p+\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q}$， 则有 $y'(t)+y(t)\le C_{15}$， 故

$$
\int_\Omega n_\varepsilon^p+\int_\Omega |\nabla c_\varepsilon|^{2q}\le\max\left\{\left(\int_\Omega n_0^p+\int_\Omega |\nabla c_0|^{2q}\right),C_{15}\right\}.
$$

引理 5 设 $(n_\varepsilon,c_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon,P_\varepsilon)$ 是正则化模型(6)的经典解。对任意的 $\alpha>0$， $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，存在常数 $C>0$，有不等式

$$
\|n_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|c_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C
$$

成立。

证明 结合引理 1 和引理 4，存在常数 $C_1>0$，对任意的 $q>1$，$\varepsilon\in(0,1)$ 和 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 有 $\|c_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le C_1$。若引理 4 中选取 $p>3$，根据文献[14]的推论 3.4，存在常数 $C_2>0$，使得 $\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_2$。再由文献[18]引理 A.1 中 Moser 迭代方法，可得 $\|n_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ 有界。最后，根据文献[19]中引理 3.7，可得 $\|c_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ 有界。

定理 1 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界的有界区域，$c_*\ge 0$，重力势函数 $\phi\in W^{2,\infty}(\Omega)$ 和初值函数 $(n_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)$ 满足(5)式。则对任意的 $\alpha>0$，模型(4)存在整体经典解 $(n,c,\boldsymbol{u},P)$，并且存在常数 $C>0$，使得对任意的 $t>0$，有

$$\|n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|c(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C.$$

证明 由引理 1 和引理 5，正则化模型(6)的经典解整体有界。根据文献[9]的引理 6.3，该经典解收敛到原模型(4)的弱解，再由抛物型方程的 Schauder 理论，存在 $\beta\in(0,1)$，使得

$$n\in C_{loc}^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}\left(\bar{\Omega}\times(0,\infty)\right),\quad c\in C_{loc}^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}\left(\bar{\Omega}\times(0,\infty)\right),\quad \boldsymbol{u}\in C_{loc}^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}\left(\bar{\Omega}\times(0,\infty);\mathbb{R}^2\right)$$

成立。上述 n，c 和 $\boldsymbol{u}$ 是模型(4)的整体有界的经典解。详细的证明过程请参见文献[19]中引理 4.2 和文献[20]中引理 10.1。

4. 结论

本文讨论一类边界上具有规定信号浓度的趋化－流体耦合方程组解的性质。此前，当方程组中信号浓度满足齐次 Neumann 边界条件时，通常采用构造能量泛函的方法进行一系列的先验估计。但由于本文中信号浓度满足非齐次 Dirichlet 边界条件，处理边界项时会产生困难。因此，需要引入边界上的逐点不等式，即文献[17]引理 5.8，获得所需的先验估计。进一步，借助 Moser 迭代方法、逼近理论和抛物型方程的 Schauder 理论，证得二维情形下，边界上具有规定信号浓度的趋化－流体耦合方程组存在整体有界的经典解。

参考文献

[1] Tuval, I., Cisneros, L., Dombrowski, C., *et al*. (2005) Bacterial Swimming and Oxygen Transport near Contact Lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **102**, 2277-2282. https://doi.org/10.1073/pnas.0406724102

[2] Winkler, M. (2012) Global Large-Data Solutions in a Chemotaxis-(Navier-)Stokes System Modeling Cellular Swimming in Fluid Drops. *Communications in Partial Differential Equations*, **37**, 319-351. https://doi.org/10.1080/03605302.2011.591865

[3] Winkler, M. (2014) Stabilization in a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **211**, 455-487. https://doi.org/10.1007/s00205-013-0678-9

[4] Zhang, Q.S. and Li, Y.X. (2015) Global Weak Solutions for the Three-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System with Nonlinear Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **259**, 3730-3754. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.05.012

[5] Winkler, M. (2016) Global Weak Solutions in a Three-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **33**, 1329-1352. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2015.05.002

[6] Winkler, M. (2017) How Far Do Chemotaxis-Driven Forces Influence Regularity in the Navier-Stokes System? *Transactions of the American Mathematical*, **369**, 3067-3125. https://doi.org/10.1090/tran/6733

[7] Painter, K. and Hillen, T. (2002) Volume-Filling and Quorum-Sensing in Models for Chemosensitive Movement. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, **10**, 501-543.

[8] Wang, Y.L. and Cao, X.R. (2015) Global Classical Solutions of a 3D Chemotaxis-Stokes System with Rotation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **20**, 3235-3254. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.3235

[9] Zhou, S.S. (2019) Boundedness in Chemotaxis-Stokes System with Rotational Flux Term. *Nonlinear Analysis*: *Real*

World Applications, **45**, 299-308. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.07.008

[10] Cao, X.R. (2016) Global Classical Solutions in Chemotaxis(-Navier)-Stokes System with Rotational Flux Term. *Journal of Differential Equations*, **261**, 6883-6914. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.09.007

[11] Wang, Y.L., Winkler, M. and Xiang, Z.Y. (2021) Local Energy Estimates and Global Solvability in a Three-Dimensional Chemotaxis-Fluid System with Prescribed Signal on the Boundary. *Communications in Partial Differential Equations*, **46**, 1058-1091. https://doi.org/10.1080/03605302.2020.1870236

[12] Tian, Y. and Xiang, Z.Y. (2023) Global Boundedness to a 3D Chemotaxis-Stokes System with Porous Medium Cell Diffusion and General Sensitivity under Dirichlet Signal Boundary Condition. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **67**, 25-67. https://doi.org/10.1007/s00021-023-00812-9

[13] Wang, Y.L., Winkler, M. and Xiang, Z.Y. (2022) A Smallness Condition Ensuring Boundedness in a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System Involving Dirichlet Boundary Conditions for the Signal. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **38**, 985-1001. https://doi.org/10.1007/s10114-022-1093-7

[14] Winkler, M. (2015) Boundedness and Large Time Behavior in a Three-Dimensional Chemotaxis-Stokes System with Nonlinear Diffusion and General Sensitivity. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 3789-3828. https://doi.org/10.1007/s00526-015-0922-2

[15] Sohr, H. (2001) The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach. Birkhäuser, Basel, 7-184. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0551-3

[16] Wang, Y.L. and Xiang, Z.Y. (2015) Global Existence and Boundedness in a Keller-Segel-Stokes System Involving a Tensor-Valued Sensitivity with Saturation. *Journal of Differential Equations*, **259**, 7578-7609. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.08.027

[17] Black, T. and Wu, C.Y. (2022) Prescribed Signal Concentration on the Boundary: Weak Solvability in a Chemotaxis-Stokes System with Proliferation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **72**, Article No. 135. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01565-z

[18] Tao, Y.S. and Winkler, M. (2012) Boundedness in a Quasilinear Parabolic-Parabolic Keller-Segel System with Subcritical Sensitivity. *Journal of Differential Equations*, **252**, 692-715. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.019

[19] Wu, C.Y. and Xiang, Z.Y. (2022) Saturation of the Signal on the Boundary: Global Weak Solvability in a Chemotaxis-Stokes System with Porous-Media Type Cell Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **315**, 122-158. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.01.033

[20] Wang, Y.L., Winkler, M. and Xiang, Z.Y. (2018) Global Classical Solutions in a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System with Subcritical Sensitivity. *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze*, **18**, 421-466. https://doi.org/10.2422/2036-2145.201603_004