Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 606-611
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132059

半正则二部图的补图生成树计数的一种新方法

姚菊田

绍兴文理学院数理信息学院，浙江 绍兴

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

一个二部图$G=(U,V,E)$是半正则当且仅当同一部顶点集的两个顶点的度相等。进一步，设$G=(V_1,V_2,E)$是一个二部划分为(V_1,V_2)的连通二部图，即$V_1\cup V_2=V(G)$ 且$V_1\cap V_2=\emptyset$。若G满足$|V_1|=s,|V_2|=t$，且$\forall u_i\in V_1, d_G(u_i)=x\ (i=1,\ldots,s), \forall v_j\in V_2, d_G(v_j)=y\ (j=1,\ldots,t)$，则称$G$是一个半正则二部图，记作$G=(s,t;x,y)$。利用**Kirchhoff**矩阵-树定理和矩阵的**Schur**补，本文得到一种半正则二部图的补图的生成树计数一般公式，并得到一些特殊半正则二部图补图的生成树数目计数公式。

关键词

二部图，半正则，**Kirchhoff**矩阵-树定理，**Schur**补

A New Method for the Enumerattion of the Number of Spanning Trees of the Complement of a Biregular Graph

Jutian Yao

School of Mathematical Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Jan. 28^{th}, 2024; accepted: Feb. 22^{nd}, 2024; published: Feb. 29^{th}, 2024

文章引用: 姚菊田. 半正则二部图的补图生成树计数的一种新方法[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 606-611.
DOI: 10.12677/aam.2024.132059

Abstract

A biregular (semiregular bipartite) graph is defined as a bipartite graph $G = (U, V, E)$ for which erery two vertices on the same side of the given bipartition have the same degree as each other. Let $G = (V_1, V_2, E)$ be a connected bipartite graph with bipartition (V_1, V_2). $V_1 \cup V_2 = V(G)$ and $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. If G satisfies $|V_1| = s, |V_2| = t$, and $\forall u_i \in V_1, d_G(u_i) = x\ (i = 1, \ldots, s), \forall v_j \in V_2, d_G(v_j) = y\ (j = 1, \ldots, t)$, then G is a semiregular bipartite graph, denoted as $G = (s, t; x, y)$. Based on the classical Kirchhoff matrix-tree theorem, and by using the Schur complement of a block of block matrix, we show a general expression for the number of spanning trees of the complement of a biregular graph G is given. As applications, several formulas for the number of spanning trees of the complement of various classes of biregular graph were obtained

Keywords

Bipartite Graph, Semiregular, Kirchhoff Matrix-Tree Theorem, Schur Complement

1. 引言

图的生成树数目是图的一个同构不变量,它不仅在图论和组合学中有着重要应用,在计算机科学、统计物理以及理论化学领域也应用广泛. 一个连通网络的连通性在一定程度上与网络的稳定性密切相关, 图的生成树数目是度量网络稳定性的一个重要指标. 一般来说, 生成树较多的网络更具有稳定性 [1]. 关于图的生成树计数理论, 最经典的计数方法是Kirchhoff矩阵-树定理 [2,3],它是将一个n阶图的拉普拉斯矩阵去掉一行一列的得到一个$n-1$阶代数余子式得到生成树的数目,这里很巧妙地将图的生成树计数问题转化为一个纯代数问题; 除了这一经典生成树计数方式, 还有递推计算法(组合计数公式是Feussner组合公式 [4]: $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$, 也就是, 图$G$的生成树数目等于图$G$删除一条边$e$后得到的子图$G-e$ 的生成树数目加上图G收缩该边e得到的子图G/e的生成树数目); 此外, 还有间接计数方法, 比如一个图G生成树的数目为图G的Tutte多项式$T(G; x, y)$在$x = 1, y = 1$上的特别值 [5].

本文研究的图均为无向简单连通图. 给定图$G=(V(G),E(G))$, 一般用$V(G)$ (简记V)表示G的顶点集, $E(G)$ (简记E)表示G的边集.不包含圈的图称为无圈图,连通的无圈图称为树,常用字母T来表示. 若图H和G满足$V(H)=V(G),E(H)\subseteq E(G)$,则称$H$是$G$的生成子图,记作$H\subseteq G$. 若树$T$是$G$的生成子图,即$V(T)=V(G)$,则称树$T$是$G$的一棵生成树. 图$G=(V,E)$的两棵生成树$T_1$, T_2是不同的当且仅当T_1,T_2不同构或$T_1 \cong T_2$ (同构), 但他们顶点标号不同. 同时,记$\tau(G)$表示图G生成树数目.记K_n是n个顶点的完全图; sK_2表示s条平行边 (不交边); $K_{m,n}$表示顶点集$V(K_{m,n})$划分为V_1 ($|V_1|=n$)和V_2 ($|V_2|=m$)的完全二部图. 设$G=(V_1,V_2,E)$是一个二部划分为(V_1,V_2) 的连通二部图,即$V_1\cup V_2=V(G)$ 且$V_1\cap V_2=\emptyset$. 若G满足$|V_1|=s,|V_2|=t$,且$\forall u_i\in V_1,d_G(u_i)=x\ (i=1,\ldots,s),\forall v_j\in V_2,d_G(v_j)=y\ (j=1,\ldots,t)$,则称$G$是一个半正则二部图,记作$G=(s,t;x,y)$. K_n-G表示从K_n中删除G中所有的边得到的图,称其为G的K_n-补图. 当$|V(G)|=n$时，称K_n-G为G的补图,记作$\overline{G}$. 设分块矩阵$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}$, 其中$M$是$p+q$阶方阵, A是p阶方阵, B是p行q列的矩阵, C是q行p列的矩阵, D是q阶方阵. 若矩阵D是可逆的,称$A-BD^{-1}C$ 为子块矩阵D关于M的Scur补, 记为M/D.关于半正则二部图生成树的数目, Spiro S [6] 从特征值角度给出了半正则二部图生成树的一个计数公式. 本文研究半正则二部图二部图补图的生成树计数问题, 组合矩阵-树定理和矩阵的Scur补将给出半正则二部图补图的生成树的一种计数公式.

2. 相关定义与引理

记$G=(V,E)$, 且$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,\ldots,e_m\}$. 对$\forall\ v_i,v_j\in V$, 若v_i,v_j相邻, 则记为$v_i\sim v_j$. $N_G(v_i)=\{v_j\in V|v_i\sim v_j\}$, $d_i=d_G(v_i)=|N_G(v_i)|$. 图的拉普拉斯矩阵$L(G)=(l_{ij})_{n\times n}$定义如下:

$$l_{ij}=\begin{cases} d_i & i=j, \\ -1 & i\neq j,\ 且v_i\sim v_j, \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

Kirchhoff矩阵-树定理 [2]表明$L(G)$中任意元素的代数余子式就是图G的生成树数目, 即$\tau(G)=(-1)^{i+j}\det(L_{i,j}(G))$, 其中$L_{i,j}(G)$表示从$L(G)$中删除第$i$行和第$j$列后得到的余子矩阵. 众所周知, 若$G=(V_1,V_2,E)(|V_1|=s,|V_2|=t)$是一个二部图，则$G$的邻接矩阵$A(G)$可表示为如下形式:

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & B(G) \\ B^T(G) & 0\end{bmatrix}.$$

这里, $B(G)=(b_{ij})_{s\times t}$称为$G$的二部关联矩阵，满足

$$b_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i\sim v_j,\ 指v_i\in V_1和v_j\in V_2在图G中有连边; \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

引理2.1若$M=aI_k+bJ_k$,且满足$a\neq 0,a+bk\neq 0$,则M可逆，且

$$M^{-1}=\frac{1}{a}I_k+\frac{-b}{(a+bk)a}J_k.$$

证明：由于$\det M=a^{(k-1)}(a+bk)\neq 0$,故$M$可逆，易知

$$(aI_k+bJ_k)(\frac{1}{a}I_k+\frac{-b}{(a+bk)a}J_k)=I_k,$$

故结论成立.

引理2.2（[7,8]）若矩阵$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,其中$M$是$p+q$阶方阵, A是p阶方阵, B是p行q列的矩阵, C是q行p列的矩阵, D是q阶方阵,若矩阵D是可逆的, M/D是D在M中的Scur补, 则

$$\det(M)=\det(D)\det(A-BD^{-1}C)=\det(D)\det(M/D). \tag{1}$$

引理2.3（[9]）设$G=(V,E)$ $(|V|=n)$, 且$\mathbf{u}=(u_i)_{i=1}^n$, $\mathbf{v}=(v_i)_{i=1}^n$是$\mathbf{R}^n$中两个列向量, 则

$$\det(L(G)+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)=\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)\tau(G). \tag{2}$$

3. 生成树计数公式

定理3.1 设G为$(s,t;x,y)$-半正则二部图,这里, $s+t=n$. 则G的补图$\overline{G}$的生成树数目为

$$\tau(\overline{G})=\frac{(n-x)^s}{n^2}\det\left((n-y)I_t-\frac{1}{n-x}B^T(G)B(G)\right) \tag{3}$$

证明：注意到$\overline{G}=K_n-G$. 由引理2.3可知

$$\det(L(K_n-G)+J_n)=n^2\tau(K_n-G)$$

可得$\tau(K_n-G)=\dfrac{1}{n^2}\det(L(K_n-G)+J_n)$,又由$L(K_n-G)+J_n=L(K_n)-L(G)+J_n$, 其中

$$L(K_n)=nI_n-J_n, L(G)=\begin{bmatrix} xI_s & -B(G) \\ -B^T(G) & yI_t \end{bmatrix},$$

可得

$$L(K_n)-L(G)+J_n=\begin{bmatrix} (n-x)I_s & B(G) \\ B^T(G) & (n-y)I_t \end{bmatrix},$$

由引理2.1和引理2.2,有

$$\det\begin{bmatrix}(n-x)I_s & B(G)\\ B^T(G) & (n-y)I_t\end{bmatrix}=(n-x)^s|(n-y)I_t-B^T(G)((n-x)I_s)^{-1}B(G)|$$

得到

$$\det(L(K_n-G)+J_n)=(n-x)^s\det\left\{(n-y)I_t-\frac{1}{n-x}B^T(G)B(G)\right\}$$

所以

$$\tau(K_n-G)=\frac{(n-x)^s}{n^2}\det\left((n-y)I_t-\frac{1}{n-x}B^T(G)B(G)\right),$$

证毕.

例子3.1 设$G=tK_2$, 即G是一个$(t,t;1,1)$-半正则二部图. 注意到$B^T(G)B(G)=I_t$, 由公式(3), 容易得到

$$\tau(\overline{tK_2})=\frac{(n-1)^t}{n^2}\det\left((n-1)I_t-\frac{1}{n-1}I_t\right)=n^{(t-2)}(n-2)^t.$$

例子3.2 设$G=\cup_{i=1}^{k}K_{1,y}$, 即G是一个$(ky,k;1,y)$-半正则二部图, G的顶点集两部分顶点数分别是ky和k,且$ky+k=n$,注意到$B^T(G)B(G)=yI_k$,由公式(3), 容易得到

$$\begin{aligned}\tau(\overline{G})&=\frac{(n-1)^{ky}}{n^2}\det\left((n-y)I_k-\frac{1}{n-1}B^T(G)B(G)\right)\\&=\frac{(n-1)^{ky}}{n^2}\det\left((n-y)I_k-\frac{y}{n-1}I_k\right)\\&=(n-1-y)^k n^{(k-2)}(n-1)^{(ky-k)}.\end{aligned}$$

4. 小结

本文主要研究了半正则二部图补图的生成树数目的计数问题, 利用Kirchhoff矩阵-树定理和一个有关矩阵Scur补的行列式恒等式,得到一个关于半正则二部图G的补图$\overline{G}$的生成树数目计数的一般性结果,该结果表明$\overline{G}$的生成树计数问题等价于与G的二部邻接矩阵有关的一个矩阵行列式计算问题,该计算公式在应用中给出了文献 [10]中计算结果一个更为快速简洁的证明,且具有创新性,本文的证明方法上或许具备可推广性.

致 谢

感谢指导老师对课题的指导，本论文发表受省一流线下课程《高等代数》建设项目、浙江省“十四五”研究生教学改革项目(基于以学促研和OBE 理念的研究生专业课程教学改革实践——以《图论》为例)资助。

参考文献

[1] Boesch, F.T. (1986) On Unreliability Polynomials and Graph Connectivity in Reliable Network Synthesis. *Journal of Graph Theory*, **10**, 339-352. https://doi.org/10.1002/jgt.3190100311

[2] Kirchhoff, G. (1847) Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik*, **148**, 497-508. https://doi.org/10.1002/andp.18471481202

[3] Biggs, N. (1993) Algebraic Graph Theory. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Feussner, W. (1902) Ueber Stromverzweigung in netzförmigen Leitern. *Annalen der Physik*, **314**, 1304-1329. https://doi.org/10.1002/andp.19023141320

[5] Tutte, W.T. (1954) A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, **6**, 80-91. https://doi.org/10.4153/CJM-1954-010-9

[6] Spiro, S. (2019) Polynomial Relations between Matrices of Graphs. *Journal of Graph Theory*, **90**, 288-303. https://doi.org/10.1002/jgt.22401

[7] Klee, S. and Stamps, M.T. (2019) Linear Algebraic Techniques for Weighted Spanning Tree Enumeration. *Linear Algebra and Its Applications*, **582**, 391-402. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.08.009

[8] Bapat, R.B. 图与矩阵[M]. 吴少川, 译. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2014.

[9] Klee, S. and Stamps, M.T. (2020) Linear Algebraic Techniques for Spanning Tree Enumeration. *The American Mathematical Monthly*, **127**, 297-307. https://doi.org/10.1080/00029890.2020.1708171

[10] Weinberg, L. (1958) Number of Trees in a Graph. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, **46**, 1954-1955.