

不完备勾股模糊信息系统的三支冲突分析

郭峻泽

长安大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2023年11月13日; 录用日期: 2023年12月7日; 发布日期: 2023年12月18日

摘要

本文考虑了不完备情况下的勾股模糊信息系统, 并结合三支决策思想将三支冲突分析模型引入不完备勾股模糊信息系统中。首先, 定义了不完备勾股模糊信息系统, 同时根据勾股模糊数另一表达形式定义了 $+/-$ 区域角与可能含有未知值的勾股模糊数的未知值数量函数。其次, 根据差异性矩阵, 定义了可能含有未知值的勾股数之间的冲突度计算方式, 建立起不完备勾股模糊信息系统中的代理人之间关系的三划分模型。最后, 根据对多事件的态度取值的聚合算子, 在不完备勾股信息系统中建立了对代理集的分模型。

关键词

不完备勾股模糊信息系统, 三支决策, 冲突分析, 未知值, 冲突度

Three-Way Conflict Analysis on Incomplete Pythagorean Fuzzy Information System

Junze Guo

School of Sciences, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Nov. 13th, 2023; accepted: Dec. 7th, 2023; published: Dec. 18th, 2023

Abstract

This paper considers the Pythagorean fuzzy information system in the case of incompleteness, and introduces the three-way conflict analysis model into the incomplete Pythagorean fuzzy information system (IPFIS) by combining the three-way decision. Firstly, we define IPFIS, the $+/-$ region angles and the number function of the Pythagorean fuzzy number (PFN) that may contain missing values according to another expression of PFN. Secondly, according to the dissimilarity matrix, the calculation of conflict degree between two PFNs that may contain missing values is defined,

and a three-division model of the relationship between agents in the IPFIS is established. Finally, according to the aggregation operator of attitude to multiple issues, a three-division model for the agent set is also established in IPFIS.

Keywords

Incomplete Pythagorean Fuzzy Information System, Three-Way Decision, Conflict Analysis, Missing Value, Conflict Degree

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本冲突是反映支持与反对的一种对立状态,为更好地解释冲突问题,Pawlak [1] [2]提出了基于粗糙集理论的冲突分析。冲突分析与三支决策之间存在着某些天然的联系,部分学者开始将三支决策的思想用于冲突分析的研究中,如:Lang 等[3]在决策粗糙集和三支决策理论的基础上推广 Pawlak 冲突分析模型,引入了冲突分析的概率模型,使用一对阈值来定义联盟、冲突和中立关系;Sun 等[4]提出了一种基于粗糙集逼近算子的冲突分析方法;Fan 等[5]在基于评价的三支决策模型,运用形式概念分析中的求导算子研究了冲突分析的定量模型。2019年,三支决策的创始人 Yao [6]将 Pawlak 的冲突分析模型进行推广重构,建立了最基础的三支冲突模型框架。

勾股模糊集理论(Pythagorean Fuzzy Sets Theory)由 Yager 于 2013 年提出[7]并于 2014 年完善[8],在 2017 年将其推广为广义的正交的模糊集(Generalized Orthopair Fuzzy Sets)的概念[9]。勾股模糊集的距离测度及相关性质由 Zhang 和 Xu 提出[10],随后于 2023 年李丹与王贵军完善了相关证明过程[11]。基于勾股模糊集理论的三支冲突分析相关工作由 Lang 于 2017 年[12]与 2020 年[13]完成, Du [14]于 2022 年将一种新的冲突距离与冲突方程引入勾股模糊信息系统(Pythagorean Fuzzy Information System)的三支冲突分析中,并提出了一种三支冲突解决(Three-Way Conflict Resolution)模型。另一方面,不完备信息系统(Incomplete Information System)于 1998 年被提出[15],是三值信息系统中存在未知值的推广形式。为不完备信息系统设计冲突分析模型的关键在于对未知值构造相似性或者差异性度量, Peng 等[16]根据信息系统内连续型数据与离散型数据的特点,分别构建了两种基于取值概率的相似性度量。不完备信息系统上的三支冲突分析相关工作由杨文听[17]于 2022 年完成,文中给出了处理正常值与未知值的相似距离度量公式与基于决策粗糙集理论的代理三划分模型。进一步, Suo 与 Yang 于 2022 年[18]完成了在不完备三值信息系统、不完备多值信息系统、不完备区间值信息系统上的三支冲突分析的探索,在每一个信息系统中提出了基于相似性度量的 model-1 与基于最大可能性取值以填充未知值的 model-2。

除了以上工作外,不完备的正交模糊信息系统的相似性度量/差异性度量方法与三支决策等相关内容并无太多参考。考虑到正交模糊信息系统对于不确定性描述的丰富语义以及广泛的应用场景,开展对不完备的正交模糊信息系统的理论研究相关工作是具有实用意义的。本文对不完备的勾股模糊信息系统,即 $q=2$ 的正交模糊信息系统,进行了三支冲突分析模型的建立。首先,定义了可能具有未知值的勾股模糊数、勾股模糊数的+/-区域角与未知值数量函数。其次,在不完备勾股模糊信息系统下定义了可能含有未知值的勾股数之间的差异度计算方式,以此作为冲突度并建立了代理人之间关系的三划分模型。最后,

根据可能含有未知值的勾股模糊数的概率描述的特点, 设计了对代理集的三划分模型。相关理论与公式皆进行了数据实验以证明可行性与有效性。

2. 预备知识

本节介绍完备的三值信息系统上的冲突分析[1]和勾股模糊数[8]。

2.1. 三值信息系统的冲突分析

称 $S = (U, A, V, f)$ 为三值信息系统[1], 其中 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是非空有限代理集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是非空有限事件集, $f: U \times A \rightarrow V$, $V = \{-1, 0, +1\}$, $f(x, a) = 1$ 表示代理人 x 对事件 a 采取支持态度, $f(x, a) = -1$ 表示代理人 x 对事件 a 采取反对态度, $f(x, a) = 0$ 表示代理人 x 对事件 a 持中立态度。

定义 1 [1]对每一个事件 $a \in A$, 代理人 x 与 y 间的二元关系 $\varphi_a: U^2 \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ 定义为

$$\varphi_a(x, y) = \begin{cases} 1 & f(x, a)f(y, a) = 1 \text{ 或 } x = y, \\ 0 & f(x, a)f(y, a) = 0 \text{ 且 } x \neq y, \\ -1 & f(x, a)f(y, a) = -1. \end{cases}$$

$\varphi_a(x, y) = 1$ 表示代理人 x 与 y 对事件 a 持相同态度, $\varphi_a(x, y) = -1$ 表示代理人 x 与 y 对事件 a 持相反态度, $\varphi_a(x, y) = 0$ 表示代理人 x 与 y 中至少一方对事件 a 持中立态度。

对于事件子集 $B \subseteq A$, 代理人 x 与 y 关于 B 的距离为 $\rho_B^*(x, y) = \frac{\sum_{a \in B} \varphi_a^*(x, y)}{|B|}$, 其中:

$$\varphi_a^*(x, y) = \frac{1 - \varphi_a(x, y)}{2} = \begin{cases} 0 & f(x, a)f(y, a) = 1 \text{ 或 } x = y, \\ 0.5 & f(x, a)f(y, a) = 0 \text{ 且 } x \neq y, \\ 1 & f(x, a)f(y, a) = -1. \end{cases}$$

定义 2 [3]设 $S = (U, A, V, f)$ 是三值信息系统, 非空事件子集 $B \subseteq A$, 阈值 α 和 β 满足 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. 代理人 x, y 关于事件子集 B 的关系如下:

- 1) $\rho_B^*(x, y) \geq \alpha$, 代表 x 与 y 是冲突关系;
- 2) $\beta < \rho_B^*(x, y) < \alpha$, 代表 x 与 y 是中立关系;
- 3) $\rho_B^*(x, y) \leq \beta$, 代表 x 与 y 是联盟关系。

进一步, 代理人 x 的冲突集、中立集和联盟集分别为:

- 1) $CO_\beta^\alpha(x, B) = \{y \in U \mid \rho_B^*(x, y) \geq \alpha\}$;
- 2) $NE_\beta^\alpha(x, B) = \{y \in U \mid \beta < \rho_B^*(x, y) < \alpha\}$;
- 3) $AL_\beta^\alpha(x, B) = \{y \in U \mid \rho_B^*(x, y) \leq \beta\}$ 。

2.2. 勾股模糊数

定义 3 [8]设 U 是任意非空集合, 勾股模糊集 P 表示为:

$$P = \{\langle x, \mu_p(x), \nu_p(x) \rangle \mid x \in U\},$$

其中 $\mu_p(x), \nu_p(x) \in [0, 1]$, 且满足 $\mu_p(x)^2 + \nu_p(x)^2 \leq 1$, 对任意 $x \in U$, $\mu_p(x)$ 和 $\nu_p(x)$ 分别表示元素 x 属于集合 P 的隶属度和非隶属度, 另有犹豫度 $\pi_p(x) = \sqrt{1 - \mu_p(x)^2 - \nu_p(x)^2}$ 。记 $p = \langle \mu_p, \nu_p \rangle$ 为勾股模糊数 (PFN, Pythagorean Fuzzy Number)。

根据文献[8], 对任意勾股模糊数 $p = \langle \mu_p, \nu_p \rangle$, 存在一对值 $r_p \in [0, 1]$ 和 $\theta_p \in [0, \pi/2]$, 使得:

$$\mu_p = r_p \cos(\theta_p)$$

$$v_p = r_p \sin(\theta_p)$$

其中, r_p 代表 p 的置信度, θ_p 代表 p 的方向角。同时, 易得如下转换关系:

$$r_p = \sqrt{\mu_p^2 + v_p^2} = \sqrt{1 - \pi_p^2}$$

$$\theta_p = \arccos\left(\frac{\mu_p}{\sqrt{\mu_p^2 + v_p^2}}\right)$$

PFN 可以描述为一个定义在第一象限的点, 其坐标分别为隶属度和非隶属度, 隶属度代表元素属于集合的程度, 非隶属度代表元素不属于集合的程度; 与原点的距离为置信度, 与横轴的夹角为方向角。 r_p 的大小决定了 PFN 的可信程度, r_p 越大, p 的犹豫度越小, 则 p 取值越可信, 见图 1。 θ_p 的大小决定了 PFN 的倾向, θ_p 越小, PFN 的位置越贴近隶属度轴, 则 p 更倾向于表达“隶属”。

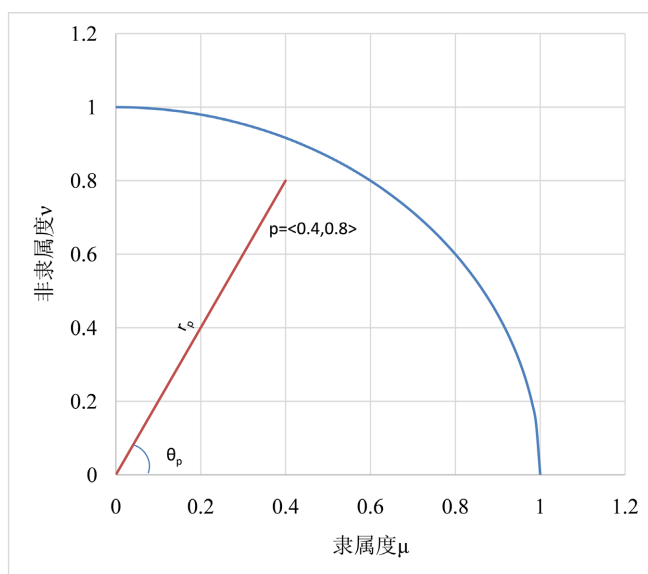


Figure 1. Range of the Pythagorean fuzzy numbers
图 1. PFN 的值域

3. 可能含有未知值的勾股模糊数

本节引入可能含有未知值的勾股模糊数的概念, 并讨论该类型勾股模糊数的差异性度量方式。

定义 4 称 $p^* = \langle \mu_p^*, v_p^* \rangle$ 为可能含有未知值的勾股模糊数, $\mu_p^* \in [0,1] \cup \{*\}$, $v_p^* \in [0,1] \cup \{*\}$, 满足 $(\mu_p^*)^2 + (v_p^*)^2 \leq 1$ 。其中, 无未知值的 PFN 为 $p^* = \langle \mu_p, v_p \rangle$ 的形式, 含有未知值的 PFN 有以下三种形式: $p^* = \langle \mu_p, * \rangle$, $p^* = \langle *, v_p \rangle$, $p^* = \langle *, * \rangle$ 。

定义 5 称 $I(p^*)$ 为未知值的数量函数, 如果对于可能含有未知值的 PFN $p^* = \langle \mu^*, v^* \rangle$ 有:

$$I(p^*) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mu_p^*, v_p^* \neq * \\ 2, & \text{if } \mu_p^*, v_p^* = * \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$

通过数量函数 $I(p^*)$ 我们可以得到一个含有未知值的 PFN 中具有未知值个数。

PFN 的方向角可以描述隶属度与非隶属度之间的相对关系。方向角越小越倾向表达“属于”，方向角越大越倾向于表达“不属于”。要对值域进行三划分，需要方向角的下限与上限，当方向角小于下限，认为该 PFN 表达“属于”；当方向角大于上限，认为表达“属于”；当方向角在上下限之间，认为该 PFN 对表达内容延迟决定。

定义 6 设 θ^+ , θ^- 分别为“+区域角”和“-区域角”，满足 $\theta^+ + \theta^- \leq \frac{\pi}{2}$ 。对于 PFN $p = \langle \mu_p, \nu_p \rangle$ ，如果：

- 1) $\tan(\theta_p) = \frac{\nu_p}{\mu_p} \leq \tan(\theta^+)$ ，则称 p 落在“+区域”，记为 $p \in +$ ；
- 2) $\tan(\theta_p) = \frac{\nu_p}{\mu_p} \geq \tan(\frac{\pi}{2} - \theta^-)$ ，则称 p 落在“-区域”，记为 $p \in -$ ；
- 3) 否则，称 p 落在“O区域”，记为 $p \in \circ$ 。

θ^+ 和 $\frac{\pi}{2} - \theta^-$ 是方向角的下限与上限，由决策者主观获得，见图 2。+区域，-区域和 O 区域的面积分别为：

$$S(+)=\frac{1}{2}\theta^+, \quad S(-)=\frac{1}{2}\theta^-, \quad S(\circ)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\theta^+ + \theta^-)。$$

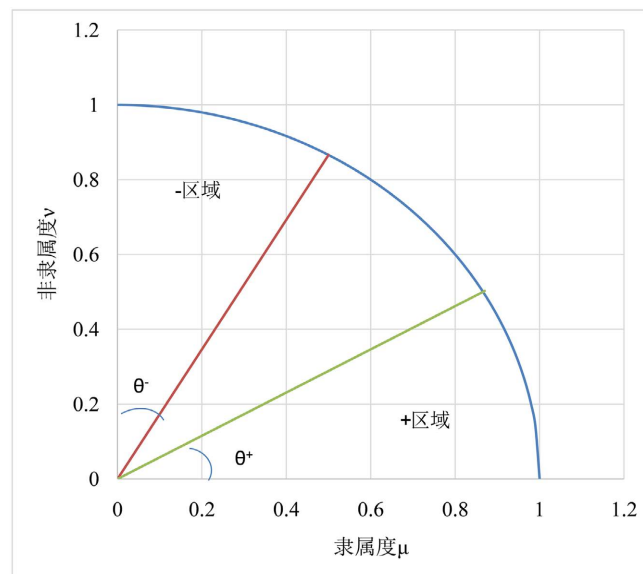


Figure 2. + range and - range
图 2. +区域与-区域

对于可能含有未知值的 PFN 可以通过落入区域的概率来描述：

1) 当 $I(p^*) = 0$ ，即 $p^* = \langle \mu_p, \nu_p \rangle$ 。PFN 取值确定。若 $p^* \in +$ ，则 $P(p^* \in +) = 1$ ， $P(p^* \in -) = P(p^* \in \circ) = 0$ ，以此类推。

2) 当 $I(p^*) = 1$ ，即 $p^* = \langle \mu_p, * \rangle$ 或 $\langle *, \nu_p \rangle$ ，见图 3。

(a) 对于 $p^* = \langle \mu_p, * \rangle$ ，未知值的取值在 $[0, \sqrt{1-\mu_p^2}]$ 。若 $\mu_p \geq \cos \theta^+$ ，则 $p^* \in +$ 恒成立；否则，有：

$$P(p^* \in +) = \frac{\mu \tan \theta^+}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$P(p^* \in \circ) = \frac{\min\{\mu \cot \theta^-, \sqrt{1-\mu^2}\} - \mu \tan \theta^+}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$P(p^* \in -) = \max\left\{1 - \frac{\mu \cot \theta^-}{\sqrt{1-\mu^2}}, 0\right\}$$

(b) 对于 $p^* = \langle *, v_p \rangle$, 未知值的取值在 $[0, \sqrt{1-v_p^2}]$ 。若 $v_p \geq \cos \theta^-$, 则 $p^* \in -$ 恒成立; 否则, 有:

$$P(p^* \in -) = \frac{v \tan \theta^-}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$P(p^* \in \circ) = \frac{\min\{v \cot \theta^+, \sqrt{1-v^2}\} - v \tan \theta^-}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$P(p^* \in +) = \max\left\{1 - \frac{v \cot \theta^+}{\sqrt{1-v^2}}, 0\right\}$$

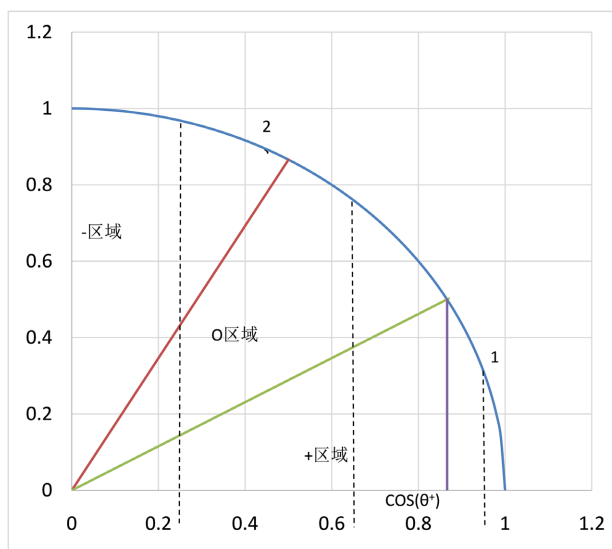


Figure 3. Range of $\langle \mu_p, * \rangle$

图 3. $\langle \mu_p, * \rangle$ 的值域

3) 对于 $p^* = \langle *, * \rangle$, 即 $I(p^*) = 2$ 的情况。隶属度和非隶属度皆未知, 认为是在值域内随机点, 即:

$$P(p^* \in +) = \frac{S(+)}{S(+)+S(-)+S(\circ)} = \frac{2}{\pi} \theta^+$$

$$P(p^* \in -) = \frac{S(-)}{S(+)+S(-)+S(\circ)} = \frac{2}{\pi} \theta^-$$

$$P(p^* \in \circ) = \frac{S(\circ)}{S(+)+S(-)+S(\circ)} = 1 - \frac{2}{\pi} (\theta^+ + \theta^-)$$

接下来考虑两个 PFN 的差异性。当两个 PFN 落在明确“属于”或“不属于”的同一个区域时差异最小, 落在态度相反的区域时差异最大, 当落在延迟决策的区域时其差异性应处于中间。对于两个 PFN p_1

和 p_2 , p_1 有 3 个可能的状态, 分别为 $\{p_1 \in +, p_1 \in -, p_1 \in \circ\}$, p_2 亦然。根据不同的所述情况, 由决策者或专家给出 PFN 的差异性矩阵, 如表 1 所示。

Table 1. Dissimilarity matrix

表 1. 差异性矩阵

	$p_1 \in +$	$p_1 \in -$	$p_1 \in \circ$
$p_2 \in +$	λ_{++}	λ_{+-}	$\lambda_{\circ+}$
$p_2 \in -$	λ_{-+}	λ_{--}	$\lambda_{\circ-}$
$p_2 \in \circ$	$\lambda_{\circ+}$	$\lambda_{\circ-}$	$\lambda_{\circ\circ}$

其中, λ_{++} , λ_{+-} 和 $\lambda_{\circ+}$ 表示: 当 p_1 落在+区域的状态下, p_2 落在+, -, \circ 三个区域时所造成的差异性, 且 $0 \leq \lambda_{++} \leq \lambda_{+-} \leq \lambda_{\circ+} \leq 1$ 。同理, λ_{-+} , λ_{--} 和 $\lambda_{\circ-}$ 表示当 p_1 落在-区域的状态下, p_2 落在-, \circ 三个区域时所造成的差异性, 且 $0 \leq \lambda_{-+} \leq \lambda_{--} \leq \lambda_{\circ-} \leq 1$ 。由于 p_1 和 p_2 选取的任意性, 位置交换不影响结果, 故该矩阵是对称矩阵。

在上表中, $\lambda_{\circ+}$ 代表了一方延迟决策而另一方表达属于时的差异程度。如果将其视为中立情况下对于支持态度的强烈程度, 中立情况下支持态度引起的差异性越大, 则支持程度越强烈; 同理 $\lambda_{\circ-}$ 。前文中 θ^+ 与 θ^- 可以反应属于(支持)与不属于(反对)的占比, 两者之间可以进行如下的转化:

$$\frac{S(+)}{S(+)+S(-)+S(\circ)} = \frac{2\theta^+}{\pi} = \frac{\lambda_{\circ+}}{\lambda_{\circ+}+\lambda_{\circ-}+\lambda_{\circ\circ}},$$

$$\frac{S(-)}{S(+)+S(-)+S(\circ)} = \frac{2\theta^-}{\pi} = \frac{\lambda_{\circ-}}{\lambda_{\circ+}+\lambda_{\circ-}+\lambda_{\circ\circ}},$$

则:

$$\theta^+ = \frac{\pi}{2} \times \frac{\lambda_{\circ+}}{\lambda_{\circ+}+\lambda_{\circ-}+\lambda_{\circ\circ}}, \quad \theta^- = \frac{\pi}{2} \times \frac{\lambda_{\circ-}}{\lambda_{\circ+}+\lambda_{\circ-}+\lambda_{\circ\circ}}.$$

4. 不完备勾股模糊信息系统的三支冲突分析

4.1. 不完备勾股模糊信息系统

称 $S = (U, A, V, f)$ 为不完备勾股模糊信息系统(IPFIS, Incomplete Pythagorean Fuzzy Information System), 其中 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是非空有限代理集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是非空有限事件集, $V = \{V_a^* | a \in A\}$, V_a^* 是事件 $a \in A$ 的值域. $f: U \times A \rightarrow V$, $f(x, a)$ 为代理人 x 对事件 a 的态度, 是一个可能含有未知值的 PFN。表 2 为不完备勾股模糊信息系统的案例。

定义 7 设 $S = (U, A, V, f)$ 是不完备勾股模糊信息系统. $\forall x, y \in U$, $a \in A$, 代理人 x, y 对单事件 a 的冲突度为 $C_a(x, y)$, 且

$$C_a(x, y) = \left[P(f(x, a) \in +) \quad P(f(x, a) \in -) \quad P(f(x, a) \in \circ) \right]$$

$$\times \begin{bmatrix} \lambda_{++} & \lambda_{+-} & \lambda_{\circ+} \\ \lambda_{-+} & \lambda_{--} & \lambda_{\circ-} \\ \lambda_{\circ+} & \lambda_{\circ-} & \lambda_{\circ\circ} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P(f(y, a) \in +) \\ P(f(y, a) \in -) \\ P(f(y, a) \in \circ) \end{bmatrix}.$$

Table 2. Incomplete Pythagorean fuzzy information system**表 2.** 不完备勾股模糊信息系统

	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	$\langle 0.9, * \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 0.95, * \rangle$	$\langle 0.9, 0.2 \rangle$
x_2	$\langle 0.6, 0.5 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0.1, 0.95 \rangle$	$\langle *, * \rangle$
x_3	$\langle 0.2, 0.95 \rangle$	$\langle 0.15, 0.98 \rangle$	$\langle *, 0.9 \rangle$	$\langle 0.65, * \rangle$

根据上式，可以将 $C_a(x, y)$ 的计算归纳为以下三种：

1) $I(f(x, a)) = 0$, $I(f(y, a)) = 0$ 。假设 $f(x, a) \in +$, $f(y, a) \in -$, 则, $C_a(x, y) = \lambda_{+-}$, 其余以此类推。

2) $I(f(x, a)) = 0$, $I(f(y, a)) \neq 0$, 根据落在区域的概率以及对应状态的差异性, 我们计算其差异性的数学期望来作为两个代理人对该事件的冲突度:

如果 $f(x, a) \in +$,

$$C_a(x, y) = (\lambda_{++}, \lambda_{+-}, \lambda_{+0}) \begin{bmatrix} P(f(y, a) \in +) \\ P(f(y, a) \in -) \\ P(f(y, a) \in 0) \end{bmatrix};$$

如果 $f(x, a) \in -$,

$$C_a(x, y) = (\lambda_{-+}, \lambda_{--}, \lambda_{-0}) \begin{bmatrix} P(f(y, a) \in +) \\ P(f(y, a) \in -) \\ P(f(y, a) \in 0) \end{bmatrix};$$

如果 $f(x, a) \in 0$,

$$C_a(x, y) = (\lambda_{0+}, \lambda_{0-}, \lambda_{00}) \begin{bmatrix} P(f(y, a) \in +) \\ P(f(y, a) \in -) \\ P(f(y, a) \in 0) \end{bmatrix}。$$

3) $I(f(x, a)) \neq 0$, $I(f(y, a)) \neq 0$, 依据上式计算所有可能状态下的差异性的数学期望, 以此作为两个代理人对该事件的冲突度。

性质 3 易得 $C_a(x, y)$ 满足以下三条性质:

- (a) 有界性: $0 \leq C_a(x, y) \leq 1$,
- (b) 自反性: $C_a(x, x) = 0$,
- (c) 对称性: $C_a(x, y) = C_a(y, x)$ 。

4.2. 三支冲突分析

根据文献[19]的结论, 求取多事件的冲突分析应当先计算代理人之间对每个事件的冲突度, 再将冲突度聚合成为对该事件集合的冲突度。

定义 8 设 $S = (U, A, V, f)$ 是不完备勾股模糊信息系统。 $\forall x, y \in U$, $B \subseteq A$, 权重向量 $\omega_B = (\omega_a | a \in B)$ 满足 $\sum_{a \in B} \omega_a = 1$ 代表了事件的重要性程度。代理人 x, y 关于事件子集 B 的冲突度为 $C_B(x, y)$, 且

$$C_B(x, y) = \sum_{a \in B} \omega_a * C_a(x, y)。$$

定义 9 设 $S=(U, A, V, f)$ 是不完备勾股模糊信息系统, $\forall x, y \in U$, $B \subseteq A$, 给定阈值 α 和 β 且 $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, 代理人 x 和 y 关于事件子集 B 的冲突度为 $C_B(x, y)$ 。 x 与 y 在事件子集 B 上的关系如下:

- 1) x 与 y 冲突: $C_B(x, y) \geq \alpha$;
- 2) x 与 y 中立: $\beta < C_B(x, y) < \alpha$;
- 3) x 与 y 联盟: $C_B(x, y) \leq \beta$ 。

定义 10 设 $S=(U, A, V, f)$ 是不完备勾股模糊信息系统, $\forall x \in U$, $B \subseteq A$, 给定阈值 α 和 β 且 $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, 则代理人 x 的冲突集、中立集和联盟集的定义如下:

- 1) $CO_\beta^\alpha(x, B) = \{y \in U \mid C_B(x, y) \geq \alpha\}$;
- 2) $NE_\beta^\alpha(x, B) = \{y \in U \mid \beta < C_B(x, y) < \alpha\}$;
- 3) $AL_\beta^\alpha(x, B) = \{y \in U \mid C_B(x, y) \leq \beta\}$ 。

4.3. 代理集的三划分

前文为所有可能含有未知值的 PFN 赋予了概率描述。本章首先根据概率化的描述以明确代理人对事件集的态度, 进而完成对于代理集的二划分。

定义 11 设 $S=(U, A, V, f)$ 是不完备勾股模糊信息系统, $\forall x \in U$, $B \subseteq A$, 权重向量 $\omega_B = (\omega_a \mid a \in B)$, $\sum_{a \in B} \omega_a = 1$ 代表事件的重要性程度。称 $f(x, B)$ 为代理人 x 对事件子集 B 的整体态度, 其中:

$$P(f(x, B) \in +) = \sum_{a \in B} \omega_a P(f(x, a) \in +),$$

$$P(f(x, B) \in -) = \sum_{a \in B} \omega_a P(f(x, a) \in -),$$

$$P(f(x, B) \in \circ) = \sum_{a \in B} \omega_a P(f(x, a) \in \circ)。$$

对于代理人 x 对事件子集 B 可能性最大的态度, 有以下三种情况:

- 1) $P(f(x, B) \in +) \geq P(f(x, B) \in -)$ 且 $P(f(x, B) \in +) \geq P(f(x, B) \in \circ)$, 认为代理人支持事件子集, 记 $f(x, B) \in +$;
- 2) $P(f(x, B) \in \circ) \geq P(f(x, B) \in +)$ 且 $P(f(x, B) \in \circ) \geq P(f(x, B) \in -)$, 认为代理人对事件子集保持中立, 记 $f(x, B) \in \circ$;
- 3) $P(f(x, B) \in -) \geq P(f(x, B) \in +)$ 且 $P(f(x, B) \in -) \geq P(f(x, B) \in \circ)$, 认为代理人反对事件子集, 记 $f(x, B) \in -$ 。

定义 12 设 $S=(U, A, V, f)$ 是不完备勾股模糊信息系统, $x \in U$, $B \subseteq A$, $f(x, B)$ 为代理人 x 对事件子集 B 的整体态度, 则代理人对事件子集 B 的支持集、中立集与反对集分别为:

- 1) $POS(U, B) = \{x \in U \mid f(x, B) \in +\}$;
- 2) $NEU(U, B) = \{x \in U \mid f(x, B) \in \circ\}$;
- 3) $NEG(U, B) = \{x \in U \mid f(x, B) \in -\}$ 。

至此, 本章完成了在不完备勾股模糊信息系统上根据事件集将代理人之间的关系划分的冲突集、中立集和联盟集, 以及根据代理人对事件集的态度划分的支持集、中立集和联盟集。表 3 为不完备勾股模糊信息系统的三支冲突分析算法。

4.4. 实例分析

本节我们对中东冲突的不完备勾股模糊信息系统执行算法, 并给出该例的相关分析。表 4 为中东冲突的不完备勾股模糊信息系统, 表 5 为中东冲突的差异性矩阵。

Table 3. Three-way conflict analysis on incomplete Pythagorean fuzzy information system

表 3. 不完备勾股模糊信息系统的三支冲突分析

算法 1: 不完备勾股模糊信息系统的三支冲突分析

输入: 不完备勾股模糊信息系统, 损失函数矩阵, 事件子集 B , 权重向量 ω_B , 阈值 α 和 β

输出: 代理人的冲突集、中立集和联盟集; 代理集的支持集、中立集和联盟集

1. 对信息系统中的 PFN 计算其概率描述
2. 选中代理人 x
3. 对 $y \in U, a \in B$ 分别计算 $C_a(x, y)$
4. 结合权重计算代理人对事件子集的冲突度 $C_B(x, y)$
5. 根据冲突度与阈值, 得到代理人 x 的冲突集、中立集和联盟集
6. 返回代理人 x 的冲突集、中立集和联盟集
7. 将信息系统进行概率描述的转化
8. 分别计算每个代理人对事件子集态度的概率
9. 对比获得每个代理人的态度
10. 将代理集划分为支持集, 中立集和反对集
11. 返回支持集, 中立集和反对集

Table 4. Incomplete Pythagorean fuzzy information system of mid-east conflict

表 4. 中东冲突的不完备勾股模糊信息系统

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	<0.1, 0.95>	<0.9, *>	<1, 0>	<0.95, *>	<0.9, 0.2>
x_2	<0.9, 0.2>	<0.6, 0.5>	<0, 1>	<0.1, 0.95>	<*, 0.85>
x_3	<0.89, 0.4>	<0.2, 0.95>	<0.15, 0.98>	<*, 0.9>	<0.65, *>
x_4	<0.5, 0.55>	<0.1, 0.85>	<*, *>	<0.6, 0.5>	<0.4, 0.9>
x_5	<0.95, 0.05>	<*, 1>	<0, *>	<0.05, 0.95>	<0, 1>
x_6	<0.65, 0.6>	<0.95, 0.1>	<0.2, 0.9>	<*, *>	<0.95, 0.2>

Table 5. The dissimilarity matrix for mid-east conflict

表 5. 中东冲突的差异性矩阵

	$p_1 \in +$	$p_1 \in -$	$p_1 \in \circ$
$p_2 \in +$	0	1	0.5
$p_2 \in -$	1	0	0.5
$p_2 \in \circ$	0.5	0.5	0.5

首先, 选取事件子集 $B = \{a_3, a_4, a_5\}$, 并为各事件赋予权重 $\omega_B = (0.4, 0.3, 0.3)$ 。将代理人对事件子集中事件的态度取值转化为概率形式。表 6~8 为代理人对事件的态度概率描述。

Table 6. Agents' attitude toward issue a_3
表 6. 代理人关于事件 a_3 的态度

a_3	$P(f(x,a) \in +)$	$P(f(x,a) \in -)$	$P(f(x,a) \in \circ)$
x_1	1	0	0
x_2	0	1	0
x_3	0	1	0
x_4	0.333	0.333	0.333
x_5	0	1	0
x_6	0	1	0

Table 7. Agents' attitude toward issue a_4
表 7. 代理人关于事件 a_4 的态度

a_4	$P(f(x,a) \in +)$	$P(f(x,a) \in -)$	$P(f(x,a) \in \circ)$
x_1	1	0	0
x_2	0	1	0
x_3	0	1	0
x_4	0	0	1
x_5	0	1	0
x_6	0.333	0.333	0.333

Table 8. Agents' attitude toward issue a_5
表 8. 代理人关于事件 a_5 的态度

a_5	$P(f(x,a) \in +)$	$P(f(x,a) \in -)$	$P(f(x,a) \in \circ)$
x_1	1	0	0
x_2	0	0.925	0.075
x_3	0.633	0	0.367
x_4	0	1	0
x_5	0	1	0
x_6	1	0	0

计算代理人之间关于事件的冲突度(表 9~11)。最后得到代理人之间关于事件集的总冲突度, 如表 12 所示。如, 在事件 a_5 中, 因为有未知值的存在, x_2 和 x_3 根据定义 7 计算冲突度:

$$P(f(x_2, a_5) \in +) = 0, \quad P(f(x_2, a_5) \in -) = 0.925, \quad P(f(x_2, a_5) \in \circ) = 0.075$$

$$P(f(x_3, a_5) \in +) = 0.633, \quad P(f(x_3, a_5) \in -) = 0, \quad P(f(x_3, a_5) \in \circ) = 0.367$$

$$C_{a_5}(x_2, x_3) = [0 \quad 0.925 \quad 0.075] \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.633 \\ 0 \\ 0.367 \end{bmatrix} = 0.793$$

即 x_2 和 x_3 关于事件 a_5 的冲突度为 0.793。

根据给定的阈值, $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.4$, 参考表 12 求出代理人之间关于事件子集冲突集、中立集和联盟集。如表 13 所示。

Table 9. Conflict degrees of issue a_3 between agents

表 9. 代理人之间关于 a_3 的冲突度

a_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.000	1.000	1.000	0.500	1.000	1.000
x_2		0.000	0.000	0.500	0.000	0.000
x_3			0.000	0.500	0.000	0.000
x_4				0.000	0.500	0.500
x_5					0.000	0.000
x_6						0.000

Table 10. Conflict degrees of issue a_4 between agents

表 10. 代理人之间关于 a_4 的冲突度

a_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.000	1.000	1.000	0.500	1.000	0.500
x_2		0.000	0.000	0.500	0.000	0.500
x_3			0.000	0.500	0.000	0.500
x_4				0.000	0.500	0.500
x_5					0.000	0.500
x_6						0.000

Table 11. Conflict degrees of issue a_5 between agents

表 11. 代理人之间关于 a_5 的冲突度

a_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.000	0.963	0.184	1.000	1.000	0.000
x_2		0.000	0.793	0.038	0.038	0.963
x_3			0.000	0.817	0.817	0.184
x_4				0.000	0.000	1.000
x_5					0.000	1.000
x_6						0.000

Table 12. Conflict degrees of issue B between agents
表 12. 代理人之间关于 B 的冲突度

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.000	0.989	0.755	0.650	1.000	0.550
x_2		0.000	0.238	0.361	0.011	0.439
x_3			0.000	0.595	0.245	0.205
x_4				0.000	0.350	0.650
x_5					0.000	0.450
x_6						0.000

Table 13. Conflict set, neutrality sets and alliance set about B
表 13. 代理人关于事件子集 B 的冲突集、中立集和联盟集

B	CO_{β}^{α}	NE_{β}^{α}	AL_{β}^{α}
x_1	$\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_1\}$
x_2	$\{x_1\}$	$\{x_6\}$	$\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$
x_3	$\{x_1\}$	$\{x_4\}$	$\{x_2, x_3, x_5, x_6\}$
x_4	$\{x_1, x_6\}$	$\{x_3\}$	$\{x_2, x_4, x_5\}$
x_5	$\{x_1\}$	$\{x_6\}$	$\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$
x_6	$\{x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$

通过以上给出的权重，计算代理人关于事件子集 B 的整体态度，如表 14 所示。进一步给出代理人对事件子集 B 的支持集、中立集和反对集，如表 15 所示。

Table 14. Agents' attitude toward B
表 14. 代理人关于事件子集 B 的态度

B	$P(f(x, B) \in +)$	$P(f(x, B) \in -)$	$P(f(x, B) \in \circ)$
x_1	1	0	0
x_2	0	0.978	0.023
x_3	0.190	0.700	0.110
x_4	0.133	0.433	0.434
x_5	0	1	0
x_6	0.400	0.500	0.100

Table 15. Positive set, neutral set and negative set of B
表 15. 代理人关于事件子集 B 的支持集、中立集和反对集

POS	NEU	NEG
$\{x_1\}$	$\{x_4\}$	$\{x_2, x_3, x_5, x_6\}$

我们可以得知, 从态度的概率上讲对代理人 x_1 倾向于支持事件集 B , x_2, x_3, x_5, x_6 对事件集整体持有消极态度, 故倾向于反对。

在此事件中, 可以得到对代理人的三划分, 即使在不完备的环境下, 通过充分考虑整个事件所持有的信息数据以预测代理人间冲突演化的结果, 从中提取有效的信息。这有效地避免了在信息不完备的情况下无法完成运算的问题, 也减小了在该环境下可能面临的决策风险, 具有应用价值。

5. 总结与展望

本文研究了不完备勾股模糊信息系统, 并提出在该信息系统下的三支冲突分析模型。对于可能含有未知值的勾股模糊数, 我们通过区域角对其提炼信息, 并获得了概率描述形式。下一步, 通过计算差异性的数学期望, 我们给出了不完备勾股模糊信息系统的冲突度计算方式, 以及代理人之间根据冲突度的划分的冲突集、中立集和联盟集。根据代理人对多个事件的整体态度, 我们定义了代理人对事件集的支持集、中立集和反对集。其运算的可行性与有效性都在实例分析中得到展示。其中针对具有未知值的勾股模糊数的差异性度量不仅在广义正交模糊数的计算领域做出探索, 还体现了三支决策“三的思想”在相应领域的指导意义。

我们的下一步工作将着眼于开发直接填充未知值的方法, 对填充后完备的勾股模糊信息系统进行三支冲突分析模型的构建。另一方面, 我们将尝试在其他不完备的正交模糊信息系统上进行三支冲突分析, 拟根据不同类型的正交模糊信息系统的特性设计差异性度量, 并据此进一步设计其相应的冲突分析模型。

参考文献

- [1] Pawlak, Z. (1998) An Inquiry into Anatomy of Conflicts. *Information Sciences*, **109**, 65-78. [https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(97\)10072-X](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(97)10072-X)
- [2] Pawlak, Z. (2007) Some Remarks on Conflict Analysis. *European Journal of Operational Research*, **166**, 649-654. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2003.09.038>
- [3] Lang, G.M., Miao, D.Q. and Cai, M.J. (2017) Three-Way Decision Approaches to Conflict Analysis Using Decision Theoretic Rough Set Theory. *Information Sciences*, **406**, 185-207. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.04.030>
- [4] Sun, B.Z., Ma, W.M. and Zhao, H.Y. (2016) Rough Set-Based Conflict Analysis Model and Method over Two Universes. *Information Sciences*, **372**, 111-125. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.08.030>
- [5] Fan, Y., Qi, J.J. and Wei, L. (2018) A Conflict Analysis Model Based on Three-Way Decisions. *Proceeding of International Joint Conference on Rough Sets 2018*, Quy Nhon, Vietnam, 20-24 August 2018, 522-532.
- [6] Yao, Y.Y. (2019) Three-Way Conflict Analysis: Reformulations and Extensions of the Pawlak Model. *Knowledge-Based Systems*, **180**, 26-37. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2019.05.016>
- [7] Yager, R.R. and Abbasov, A.M. (2013) Pythagorean Membership Grades, Complex Numbers, and Decision Making. *International Journal of Intelligent Systems*, **28**, 436-452. <https://doi.org/10.1002/int.21584>
- [8] Yager, R.R. (2014) Pythagorean Membership Grades in Multicriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 958-965. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2278989>
- [9] Yager, R.R. (2017) Generalized Orthopair Fuzzy Sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **25**, 1222-1230. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2016.2604005>
- [10] Zhang, X.L. and Xu, Z.S. (2014) Extension of TOPSIS to Multiple Criteria Decision Making with Pythagorean Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **29**, 1061-1078. <https://doi.org/10.1002/int.21676>

-
- [11] 李丹, 王贵军. 勾股模糊环境下海明距离测度的证明及推广[J]. 浙江大学学报(理学版), 2023, 50(4): 402-408.
- [12] Lang, G.M., Miao, D.Q., Zhang, Z.F. and Yao, N. (2017) Conflict Analysis for Pythagorean Fuzzy Information Systems. *Lecture Notes in Computer Science*, **10314**, 359-367. https://doi.org/10.1007/978-3-319-60840-2_26
- [13] Lang, G.M., Miao, D.Q. and Fujita, H. (2019) Three-Way Group Conflict Analysis Based on Pythagorean Fuzzy Set Theory. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **28**, 447-461. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2908123>
- [14] Du, J.L., Liu, S.F. and Liu, Y. (2022) A Novel Approach to Three-Way Conflict Analysis and Resolution with Pythagorean Fuzzy Information. *Information Sciences*, **584**, 65-88. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.10.051>
- [15] Kryszkiewicz, M. (1998) Rough Set Approach to Incomplete Information Systems. *Information Sciences*, **112**, 39-49. [https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(98\)10019-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(98)10019-1)
- [16] Peng, L.S., Zhou, X.Z., Zhao, J.J., et al. (2022) Three-Way Multi-Attribute Decision Making under Incomplete Mixed Environments Using Probabilistic Similarity, *Information Sciences*, **614**, 432-463. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.10.038>
- [17] 杨文昕, 易黄建, 陈跃, 等. 基于不完备信息系统的三支冲突分析[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2022, 50(3): 43-51.
- [18] Suo, L.W.Q. and Yang, H.L. (2022) Three-Way Conflict Analysis Based on Incomplete Situation Tables: A Tentative Study. *International Journal of Approximate Reasoning*, **145**, 51-74. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2022.03.004>
- [19] Yi, H.J., Zhang, H.M., Li, X.N. and Yang, Y.P. (2021) Three-Way Conflict Analysis Based on Hesitant Fuzzy Information Systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, **139**, 12-27. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2021.09.002>