

# 带有外部治疗的癌症模型的动力学分析

孙莹莹

杭州师范大学数学学院, 浙江 杭州

收稿日期: 2023年7月21日; 录用日期: 2023年8月13日; 发布日期: 2023年8月24日

## 摘要

众所周知, 癌症一直是威胁人类生命健康的重大疾病之一, 关于它的内在发病机理是很多科学家重点关注的研究课题. 本文中我们将充分利用动力系统分支理论知识和数值模拟来研究与癌症相关的各类动力学行为, 力求完整地揭示与癌症相关的分支现象背后的医学意义, 并对病情未来发展趋势的预测提供积极的帮助. 在本文中我们主要研究了刻画肿瘤细胞和免疫效应细胞的二维癌症模型的动力学行为, 得到了平衡点的个数和类型, 证明了余维2的Hopf 分支和余维2的Bogdanov-Takens 分支的存在性. 最后通过数值模拟验证了所得结论.

## 关键词

癌症增长模型, 稳定性, Allee 效应, Hopf 分支, Bogdanov-Takens 分支

# Dynamic Analysis of Cancer Model with External Therapy

Yingying Sun

School of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou Zhejiang

Received: Jul. 21<sup>st</sup>, 2023; accepted: Aug. 13<sup>th</sup>, 2023; published: Aug. 24<sup>th</sup>, 2023

---

## Abstract

As we all know, cancer has always been one of the major diseases threatening life and health, and its intrinsic pathogenesis is an important research topic that many scientists focus on. In this paper, we will make full use of bifurcation theory of dynamical systems and numerical simulations to study various dynamics related to cancer, striving to fully reveal the medical significance of bifurcation related to cancer, and provide positive help for predicting the future development trend of the disease. We mainly study the dynamics of a two-dimensional cancer model involving tumor cells and immune effector cells. We obtain the number and type of equilibrium points, verify the Hopf bifurcation of codimension 2 and the Bogdanov-Takens bifurcation of codimension 2. Finally, the conclusions obtained are verified by numerical simulations.

## Keywords

Cancer Growth Model, Stability, Allee Effect, Hopf Bifurcation, Bogdanov-Takens Bifurcation

---

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 介绍

癌症是一个世界性的问题, 肿瘤细胞的增殖会破坏我们身体周围的组织. 但是, 它的扩散、破坏和建立机制仍然是一个谜. 大多数病例中, 手术、化疗、激素治疗和放疗都未能完全消除癌细胞. 尽管临床医生取得了进步, 但对癌症的诊断和治疗仍存在着很多挑战. 在过去的几十年里, 关于它的生长、发展和控制已经进行了大量的实验, 但是仍然如此反复发生. 肿瘤与免疫系统之间的相互作用是一个复杂的现象, 它已经引起了许多数学建模者的注意. 我们研究了Khajanchi 等人 [1]所设想的描述免疫原性肿瘤非线性动力学的数学模型, 该数学模型类似于猎物-捕食者系统, 它由两个非线性常微分方程组成, 描述了免疫效应细胞(ECs)和肿瘤细胞(TCs)之间的相互作用. 非线性系统的定义

如下:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= s + \frac{pET}{g+T} - mET - dE, \\ \frac{dT}{d\tau} &= aT(1-bT) - nET - \epsilon T. \end{aligned} \tag{1}$$

其中,  $E(\tau)$  和  $T(\tau)$  分别代表  $\tau$  时刻效应免疫细胞和肿瘤细胞的数量. 该模型中所有参数值均为正值. 第一个方程描述了效应细胞数量在  $\tau$  时刻的变化速率,  $s$  是被视为免疫效应细胞的外部来源的控制项,  $\frac{pET}{g+T}$  是肿瘤特异性效应细胞的招募, 它遵循小肿瘤因子以指定免疫反应的饱和效应, 即效应细胞被肿瘤细胞招募. 而  $-mET$  表示免疫效应细胞以  $m$  的速率被肿瘤细胞清除,  $-dE$  表示效应细胞以  $d$  的速率自然死亡. 我们的第二个方程指定了表现出 logistic 增长的肿瘤种群的变化率, 其中  $a$  是内在增长率,  $1/b$  是细胞的最大环境容纳量,  $-nET$  表示肿瘤细胞因与肿瘤特异性效应细胞相互作用而降解,  $n$  表示降解速率,  $-\epsilon T$  表示被外部治疗杀死的肿瘤细胞.

## 2. 模型建立与平衡点分析

### 2.1. 模型建立

经过无量纲化变换(3), 模型(1)变为:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma + \frac{\rho xy}{\eta + y} - \mu xy - \delta x, \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(1 - \beta y) - xy - \omega y. \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} x &= \frac{E}{E_0}, \quad y = \frac{T}{T_0}, \quad t = n\tau T_0, \quad \sigma = \frac{s}{nE_0T_0}, \quad \rho = \frac{p}{nT_0}, \\ \eta &= \frac{g}{T_0}, \quad \mu = \frac{m}{n}, \quad \delta = \frac{d}{nT_0}, \quad \alpha = \frac{a}{nT_0}, \quad \beta = bT_0, \quad \omega = \frac{\epsilon}{nT_0}. \end{aligned} \tag{3}$$

### 2.2. 平衡点分析

根据生物学背景, 我们只在  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  内研究系统(2). 系统(2)只有一个边界平衡点  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$ , 并且所有平衡点  $E(x, y)$  都有如下形式的雅克比矩阵:

$$J(E) = \begin{pmatrix} -\delta + \frac{\rho y}{\eta + y} - \mu y & \mu(-x) + \frac{\rho x}{\eta + y} - \frac{\rho xy}{(\eta + y)^2} \\ -y & -x - \alpha\beta y + \alpha(1 - \beta y) - \omega \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} \det(J(E)) &= \frac{-\rho xy^2 + \delta x(\eta + y)^2 + (\eta + y)(\alpha(2\beta y - 1) + \omega)((\eta + y)(\delta + \mu y) - \rho y)}{(\eta + y)^2}, \\ \text{tr}(J(E)) &= \alpha - \delta - x - 2\alpha\beta y + \frac{\rho y}{\eta + y} - \mu y - \omega. \end{aligned}$$

如果  $\det(J(E)) \neq 0$ , 那么  $E(x, y)$  是一个非退化平衡点; 如果  $\det(J(E)) < 0$ , 则  $E(x, y)$  是双曲鞍点; 如果  $\det(J(E)) = 0$ , 则  $E(x, y)$  是退化平衡点.

通过考虑系统(2)在边界平衡点  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  处的雅可比矩阵, 我们可以很容易地得到以下引理.

**引理1** 系统(2)只有一个边界平衡点  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$ . 如果  $\frac{\sigma}{\delta} + \omega < \alpha$ , 那么  $E_0$  是双曲鞍点; 如果  $\frac{\sigma}{\delta} + \omega > \alpha$ , 那么  $E_0$  是双曲稳定结点; 如果  $\frac{\sigma}{\delta} + \omega = \alpha$ , 那么  $E_0$  是一个退化平衡点.

**引理2** 若  $\frac{\sigma}{\delta} + \omega = \alpha$ , 则  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个退化平衡点, 此外,

- (1) 如果  $\sigma \neq \frac{\alpha\beta\delta^2\eta}{\eta\mu-\rho}$ , 那么  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个鞍结点, 其中包括一个稳定的抛物扇形;
- (2) 如果  $\sigma = \frac{\alpha\beta\delta^2\eta}{\eta\mu-\rho}$ , 并且
  - (a) 如果  $\delta = \frac{(\eta\mu-\rho)^2}{\rho}$ , 那么  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个鞍结点, 其中包括一个稳定的抛物扇形;
  - (b) 如果  $\delta > \frac{(\eta\mu-\rho)^2}{\rho} > 0$ , 那么  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个退化鞍点;
  - (c) 如果  $0 < \delta < \frac{(\eta\mu-\rho)^2}{\rho}$ , 那么  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个稳定的退化结点.

**证明** 当  $\frac{\sigma}{\delta} + \omega = \alpha$  时, 我们有  $\det(J(E_0)) = 0$  并且  $\text{tr}(J(E_0)) = \alpha - \frac{\delta(\delta+\omega)+\sigma}{\delta}$ . 首先, 令  $(u, v) = (x - \frac{\sigma}{\delta}, y)$  将  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  平移到原点, 系统(2)变成了

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sigma - \left(\frac{\sigma}{\delta} + u\right) \left(\delta - \frac{\rho v}{\eta + v} + \mu v\right), \\ \frac{dv}{dt} &= -v \left(\frac{\sigma}{\delta} + u\right) + \alpha v(1 - \beta v) - v\omega. \end{aligned} \tag{4}$$

接着我们做如下变换:

$$u = \frac{\sigma \left(\frac{\rho}{\eta} - \mu\right)}{\delta} X + Y, \quad v = \delta X, \quad t = -\frac{1}{\delta} \tau,$$

并且仍然用  $t$  来表示  $\tau$ , 我们将系统(4)在原点附近进行泰勒展开, 有

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a_{20}X^2 + a_{11}XY + f(X, Y), \\ \frac{dY}{dt} &= Y + b_{20}X^2 + b_{11}XY + b_{30}X^3 + b_{21}X^2Y + b_{40}X^4 + b_{31}X^3Y + g(X, Y), \end{aligned} \tag{5}$$

其中  $f, g$  是关于  $(X, Y)$  的五阶光滑函数,

$$\begin{aligned} a_{20} &= \alpha\beta + \frac{\sigma(\rho - \eta\mu)}{\delta^2\eta}, \quad a_{11} = \frac{1}{\delta}, \\ b_{20} &= \frac{\sigma(\delta^2((\eta\mu - \rho)(\alpha\beta\eta - \eta\mu + \rho) + \delta\rho) - \sigma(\rho - \eta\mu)^2)}{\delta^3\eta^2}, \quad b_{11} = \frac{(\delta^2 + \sigma)(\eta\mu - \rho)}{\delta^2\eta}, \\ b_{30} &= -\frac{\rho\sigma(\delta + \eta\mu - \rho)}{\eta^3}, \quad b_{21} = \frac{\delta\rho}{\eta^2}, \quad b_{40} = \frac{\delta\rho(\sigma(\delta + \eta\mu - \rho) + \delta^2Y)}{\eta^4}, \quad b_{31} = -\frac{\delta^2\rho}{\eta^3}. \end{aligned}$$

根据定理5 [2], 我们知道当  $\sigma \neq \frac{\alpha\beta\delta^2\eta}{\eta\mu-\rho}$  时,  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个鞍结点, 其中包含了一个稳定的抛物扇形. 如果  $\sigma = \frac{\alpha\beta\delta^2\eta}{\eta\mu-\rho}$ , 有  $a_{20} = 0$ . 根据中心流形定理, 可假设  $Y = m_1X^2 + m_2X^3 + o(|X|^3)$ , 并将其替换

为系统(5)的第二个方程. 通过联立系统(5)的第一个方程, 可得

$$m_1 = \frac{\alpha\beta\delta((\rho - \eta\mu)^2 - \delta\rho)}{\eta(\eta\mu - \rho)},$$

$$m_2 = \frac{\alpha\beta\delta(-\alpha\beta\eta((\rho - \eta\mu)^2 - \delta\rho) + \delta^2\rho - (\eta\mu - \rho)((\rho - \eta\mu)^2 - 2\delta\rho))}{\eta^2(\eta\mu - \rho)}.$$

将  $Y = m_1X^2 + m_2X^3 + o(|X|^3)$  带入系统(5)的第一个方程, 可得

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha\beta((\rho - \eta\mu)^2 - \delta\rho)}{\eta(\eta\mu - \rho)}X^3 + O(X^3).$$

当  $\delta = \frac{(\eta\mu - \rho)^2}{\rho}$  时, 将  $\delta = \frac{(\eta\mu - \rho)^2}{\rho}$  代入系统(5)的第一个方程, 可得

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha\beta\mu(\rho - \eta\mu)^2}{\eta\rho}X^4 + O(X^4).$$

根据定理5 [2]进行分析, 首先做一个时间变换  $\tau = -\delta t$ , 我们发现当  $0 < \delta < \frac{(\eta\mu - \rho)^2}{\rho}$  并且  $\eta\mu > \rho$  或者  $\delta > \frac{(\eta\mu - \rho)^2}{\rho} > 0$  并且  $\eta\mu < \rho$  时, 那么  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个结点; 当  $0 < \delta < \frac{(\eta\mu - \rho)^2}{\rho}$  并且  $\eta\mu < \rho$  或者  $\delta > \frac{(\eta\mu - \rho)^2}{\rho} > 0$  并且  $\eta\mu > \rho$  时,  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个鞍点; 当  $\delta = \frac{(\eta\mu - \rho)^2}{\rho}$  时,  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  是一个鞍结点.  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  被两条沿着正负  $y$  轴并趋向点  $E_0(\frac{\sigma}{\delta}, 0)$  的分割线分成了两部分. 一部分是抛物扇形, 另一部分是由两个双曲扇形组成. 此外, 由于  $\frac{\alpha\beta\mu(\rho - \eta\mu)^2}{\eta\rho} > 0$ , 那么抛物扇形在右半平面上.

接下来我们考虑系统(2)的正平衡点的个数和类型. 如果  $E(x, y)$  是系统(2)的正平衡点, 则  $x$  是方程

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{6}$$

的根. 这里

$$b = -\frac{\alpha\beta(\delta + \eta\mu - \rho)}{\mu} - 2\alpha + 2\omega,$$

$$c = \frac{\alpha(\alpha(\beta\eta + 1)(\beta\delta + \mu) - \alpha\beta\rho + \beta\sigma) - \alpha\omega(\beta(\delta + \eta\mu - \rho) + 2\mu) + \mu\omega^2}{\mu},$$

$$d = -\frac{\alpha\beta\sigma(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega)}{\mu}.$$

为了研究正平衡点的类型, 令

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c.$$

由  $f(x) = 0$ , 可得

$$\mu = \alpha\beta \left( \frac{\delta x - \sigma}{x(-\alpha + x + \omega)} - \frac{\rho}{-\alpha(\beta\eta + 1) + x + \omega} \right). \tag{7}$$

系统(2)在平衡点 $E(x, y)$ 处的雅可比矩阵可以化简成

$$J(E) = \begin{pmatrix} -\delta + \rho + \frac{\alpha\beta\eta\rho}{-\alpha(\beta\eta+1)+x+\omega} + \frac{\mu(-\alpha+x+\omega)}{\alpha\beta} & x \left( \frac{\alpha^2\beta^2\eta\rho}{(-\alpha(\beta\eta+1)+x+\omega)^2} - \mu \right) \\ \frac{-\alpha+x+\omega}{\alpha\beta} & -\alpha + x + \omega \end{pmatrix},$$

则 $J(E)$ 的行列式和迹分别为:

$$\det(J(E)) = \frac{A(-\alpha + x + \omega)}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + x + \omega)^2},$$

$$\operatorname{tr}(J(E)) = x + \omega - \alpha - \delta + \rho + \frac{\alpha\beta\eta\rho}{-\alpha(\beta\eta + 1) + x + \omega} + \frac{\mu(-\alpha + x + \omega)}{\alpha\beta},$$

其中

$$A = 2\mu x^3 - (\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) (\alpha^2((\beta\eta + 1)(\beta\delta + \mu) - \beta\rho) - \alpha\omega(\beta(\delta + \eta\mu - \rho) + 2\mu) + \mu\omega^2) \\ + 2x(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega)(\alpha(\beta(\delta + \eta\mu - \rho) + 2\mu) - 2\mu\omega) \\ + x^2(5\mu\omega - \alpha(\beta(\delta + 4\eta\mu - \rho) + 5\mu)).$$

我们将(7)代入 $\det(J(E))$ , 则 $\det(J(E))$ 可以重新表示为

$$\det(J(E)) = \frac{\mu B f'(x) + \mu f(x)(\alpha - x - \omega)}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + x + \omega)^2} \\ = \frac{\mu B}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + x + \omega)^2} f'(x), \quad (8)$$

其中

$$B = x^2 + (2\omega - \alpha(\beta\eta + 2))x + (\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega).$$

根据三阶代数方程的根公式, 我们让

$$\Delta_2 = \frac{\hat{\Delta}_2}{\mu^2}, \quad (9)$$

$$\Delta_3 = -\frac{4}{\mu^2} \Delta_2 (k_3^2 - 3k_1 k_2) + \frac{1}{\mu^4} (k_2 k_3 - 9k_1)^2.$$

这里

$$\hat{\Delta}_2 = \alpha^2 (\beta^2 (\delta^2 - \delta(\eta\mu + 2\rho) + (\rho - \eta\mu)^2) + \beta\mu(\delta + \eta\mu - \rho) + \mu^2) \\ - \alpha\mu(\beta\omega(\delta + \eta\mu - \rho) + 3\beta\sigma + 2\mu\omega) + \mu^2\omega^2, \\ k_1 = \alpha\beta\mu\sigma(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega), \quad (10) \\ k_2 = \alpha(\beta(\delta + \eta\mu - \rho) + 2\mu) - 2\mu\omega, \\ k_3 = \alpha^2((\beta\eta + 1)(\beta\delta + \mu) - \beta\rho) - \alpha\omega(\beta(\delta + \eta\mu - \rho) + 2\mu) + \alpha\beta\sigma + \mu\omega^2.$$

由于方程(6)的最大正根数是由该方程的常数项决定的, 因此我们在讨论系统(2)的正平衡点的个数和类型时, 分为以下两种情况:  $\omega < \alpha(\beta\eta + 1)$  和  $\omega \geq \alpha(\beta\eta + 1)$ .

**(I)  $\omega < \alpha(\beta\eta + 1)$**

在这种情况下, 系统(2)只有一个边界平衡点 $E_0(\frac{\sigma}{\beta}, 0)$ , 且最多有三个正平衡点. 根据图 1 中的 $f(x)$  的图像, 我们有下面的引理:

**引理3** 当 $\omega < \alpha(\beta\eta + 1)$  并且 $x < \alpha - \omega$  时, 或者 $x > \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$ 时, 系统(2)至少有一个正平衡点, 最多有三个正平衡点. 此外, 根据盛金公式和盛金定理:

(1) 当 $\Delta_3 < 0$  时, 根据盛金定理5, 我们知道 $\Delta_2 > 0$  并且根据盛金的公式IV, 系统(2)有三个不同的平衡点:

- (a) 根据一元三次方程的韦达定理, 当 $b < 0$  并且 $c > 0$  时, 系统(2)有三个不同的正平衡点:  $E_2$ 是双曲鞍点, 并且如果 $\text{tr}(J(E_i)) < 0$ , 那么 $E_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 3$ ) 是双曲稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_i)) > 0$ , 那么 $E_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 3$ ) 是双曲不稳定的结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_i)) = 0$ , 那么 $E_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 3$ )为弱焦点或中心, 其中 $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \alpha - \omega$  或 $\alpha\beta\eta + \alpha - \omega < x_1 < x_2 < x_3$ . (参见图 1(a)).
- (b) 在其他情况下, 系统(2)有唯一的正平衡点和两个不同的负平衡点. 如果 $\text{tr}(J(E_3)) < 0$ , 则 $E_3$  是一个双曲稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_3)) > 0$ , 则 $E_3$  是一个双曲不稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_3)) = 0$ , 则 $E_3$  是一个弱焦点或中心. 由于 $E_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2$ ) 是负平衡点, 所以我们不做讨论. (参见图 1(f)).

(2) 当 $\Delta_3 = 0$ 时,

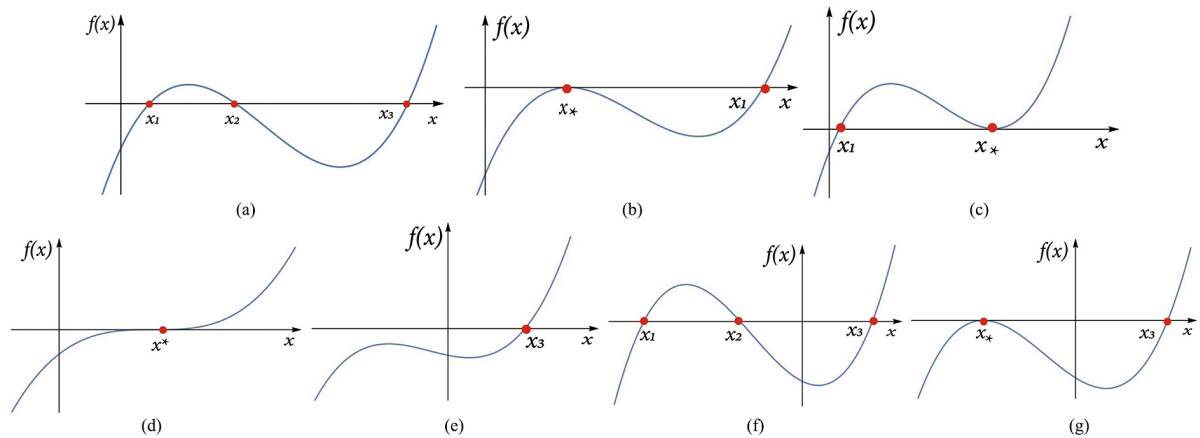
- (a) 若 $\Delta_2 > 0$ , 那么函数 $f(x)$  有三个实根, 其中 $x_*$  是一个二重根.
  - i. 当 $b < 0$ 且 $c > 0$  时, 系统(2)有两个不同的正平衡点: 一个退化平衡点 $E_*(x_*, y_*)$  和一个基本平衡点 $E_1(x_1, y_1)$ (或 $E_3(x_3, y_3)$ ). 如果 $\text{tr}(J(E_i)) < 0$ , 则 $E_1(x_1, y_1)$ (或 $E_3(x_3, y_3)$ ) 是一个双曲稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_i)) > 0$ , 则 $E_1(x_1, y_1)$ (或 $E_3(x_3, y_3)$ ) 是一个双曲不稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_i)) = 0$ , 则 $E_1(x_1, y_1)$ (或 $E_3(x_3, y_3)$ ) 是一个弱焦点或中心, 其中 $x_1 < x_*$  (参见图 1(b)) 并且 $x_1 < x_3$  (参见图 1(c)).
  - ii. 如果 $c < 0$ , 系统(2)有唯一的正平衡点 $E_3(x_3, y_3)$ . 如果 $\text{tr}(J(E_3)) < 0$ , 则 $E_3(x_3, y_3)$  是一个双曲稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_3)) > 0$ , 则 $E_3(x_3, y_3)$  是一个双曲不稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_3)) = 0$ , 那么 $E_3(x_3, y_3)$  是一个弱焦点或中心. 由于 $E_*(x_*, y_*)$  是一个负平衡点, 所以我们不讨论它. 其中,  $x_* < x_3$ . (参见图 1(g)).

(b) 若 $\Delta_2 = 0$ , 那么系统(2)有一个实三重根. 也就是说, 系统只有一个正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ , 这是一个退化平衡点, 其中,  $x^* = \frac{\alpha\beta(\delta+\eta\mu-\rho)+2\alpha\mu-2\mu\omega}{3\mu}$ ,  $y^* = \frac{\alpha(\mu-\beta(\delta+\eta\mu-\rho))-\mu\omega}{3\alpha\beta\mu}$  (参见图 1(d)).

(3) 当 $\Delta_3 > 0$ 时, 函数 $f(x)$  有一个实根和一对共轭复根. 也就是说, 系统有唯一的正平衡点 $E_3(x_3, y_3)$ . 如果 $\text{tr}(J(E_3)) < 0$ ,  $E_3(x_3, y_3)$  是一个双曲稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_3)) > 0$ , 则 $E_3(x_3, y_3)$  是一个双曲不稳定结点或焦点; 如果 $\text{tr}(J(E_3)) = 0$ , 那么 $E_3(x_3, y_3)$  是一个弱焦点或中心.  $E_i(x_i, y_i)$ ( $i = 1, 2$ ) 在复平面上, 所以我们不讨论它. (参见图 1(e)).

**证明** 由(8)可知, 当 $x < \alpha - \omega$  或 $x > \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$  且  $\frac{\mu(x^2+(2\omega-\alpha(\beta\eta+2))x+(\alpha-\omega)(\alpha\beta\eta+\alpha-\omega))}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta+1)+x+\omega)^2} > 0$  时, 有 $f'(x) < 0 \implies \det(J(E)) > 0$ ,  $f'(x) > 0 \implies \det(J(E)) < 0$  并且 $f'(x) = 0 \implies \det(J(E)) = 0$ .

很容易看出  $\det(J(E_i)) < 0, (i = 1, 3), \det(J(E_2)) > 0, \det(J(E_*)) = 0, \det(J(E^*)) = 0$ , 因此  $E_1, E_2$  和  $E_3$  都是基本平衡点并且  $(E_i), (i = 1, 3)$  是一个双曲鞍点, 而  $E_*$  和  $E^*$  都是退化平衡点.



**Figure 1.** Roots of  $f(x) = 0$  when  $\omega < \alpha(\beta\eta + 1)$ . (a) Three single positive roots  $x_1, x_2, x_3$ . (b)(c) Two positive roots: a double root  $x_*$  and a single root  $x_1$  (or  $x_3$ ). (d) A unique triple positive root  $x^*$ . (e) A real root and a pair of conjugate complex roots. (f) Two negative roots  $x_1, x_2$  and a positive root  $x_3$ . (g) A double negative root  $x_*$  and a positive root  $x_3$

**图 1.** 当  $\omega < \alpha(\beta\eta + 1)$  时,  $f(x) = 0$  的根的情况. (a) 三个不同的正根  $x_1, x_2, x_3$ . (b)(c) 两个正根: 一个二重根  $x_*$  和一个正根  $x_1$  (或  $x_3$ ). (d) 一个正的三重根  $x^*$ . (e) 一个实根和一对共轭复根. (f) 两个负根  $x_1, x_2$  和一个正根  $x_3$ . (g) 一个负的二重根  $x_*$  和一个正根  $x_3$

**引理4** 当  $\omega < \alpha(\beta\eta + 1)$  且  $\alpha - \omega < x < \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$  时, 系统(2)至少有一个正平衡点, 最多有三个正平衡点. 此外, 根据盛金公式和盛金定理可知

- (1) 当  $\Delta_3 < 0$  时, 根据盛金定理5和金的公式IV, 我们知道  $\Delta_2 > 0$ , 则系统(2)有三个不同的平衡点:
  - (a) 根据一元三次函数的韦达定理, 当  $b < 0$  且  $c > 0$  时, 系统(2)有三个不同的正平衡点:  $E_i(x_i, y_i) (i = 1, 3)$  是稳定的双曲鞍点. 并且如果  $\text{tr}(J(E_i)) < 0$ , 那么  $E_2$  是双曲稳定结点或焦点; 如果  $\text{tr}(J(E_i)) > 0$ , 那么  $E_2$  是双曲不稳定的结点或焦点; 并且如果  $\text{tr}(J(E_i)) = 0$ , 那么  $E_2$  是一个弱焦点或中心, 其中  $\alpha - \omega < x_1 < x_2 < x_3 < \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$ . (参见图 1(a)).
  - (b) 在其他情况下, 系统(2)有一个唯一的正平衡点和两个不同的负平衡点.  $E_3$  是一个双曲鞍点并且由于  $E_i(x_i, y_i) (i = 1, 2)$  是负平衡点, 所以我们不讨论. (参见图 1(f)).
- (2) 当  $\Delta_3 = 0$  时,
  - (a) 若  $\Delta_2 > 0$ , 那么函数  $f(x)$  有三个实根, 其中  $x_*$  是一个二重根.
    - i. 当  $b < 0$  且  $c > 0$  时, 系统(2)有两个不同的正平衡点: 一个退化平衡点  $E_*(x_*, y_*)$  和一个双曲鞍点  $E_1(x_1, y_1)$  (或  $E_3(x_3, y_3)$ ); 如果  $\text{tr}(J(E_i)) < 0$ , 则  $E_1(x_1, y_1)$  (或  $E_3(x_3, y_3)$ ) 是一个双曲稳定结点或焦点; 如果  $\text{tr}(J(E_i)) > 0$  则  $E_1(x_1, y_1)$  (或  $E_3(x_3, y_3)$ ) 是一个双曲不稳定结点或焦点; 如果  $\text{tr}(J(E_i)) = 0$ , 则  $E_1(x_1, y_1)$  (或  $E_3(x_3, y_3)$ ) 是一个弱焦点或中心点, 其中  $x_1 < x_*$  (参见图 1(b)) 并且  $x_1 < x_3$  (参见图 1(c)).
    - ii. 如果  $c < 0$ , 系统(2)有唯一的正平衡点  $E_3(x_3, y_3)$ , 并且  $E_3$  是一个双曲鞍点. 由于  $E_*(x_*, y_*)$  是一个负平衡点, 所以我们没有讨论它, 其中,  $x_* < x_3$  (参见图 1(g)).



(b) 若  $\Delta_2 = 0$ , 那么函数  $f(x)$  有一个三重正实根. 也就是说, 系统只有一个正平衡点

$$E^* \left( \frac{\alpha\beta(\delta+\eta\mu-\rho)+2\alpha\mu-2\mu\omega}{3\mu}, \frac{\alpha(\mu-\beta(\delta+\eta\mu-\rho))-\mu\omega}{3\alpha\beta\mu} \right), \text{ 这是一个退化平衡点. (参见图 1(d)).}$$

(3) 当  $\Delta_3 > 0$  时, 系统(2)有一个实根和一对共轭复根. 也就是说, 系统有唯一的正平衡点  $E_3(x_3, y_3)$ , 并且这是一个双曲鞍点.  $E_i(x_i, y_i) (i = 1, 2)$  在复平面上, 所以我们不讨论它.(参见图 1(e)).

**证明** 由(8)可知, 当  $\alpha - \omega < x < \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$ ,  $\frac{\mu(x^2+(2\omega-\alpha(\beta\eta+2))x+(\alpha-\omega)(\alpha\beta\eta+\alpha-\omega))}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta+1)+x+\omega)^2} < 0$  时, 有  $f'(x) < 0 \implies \det(J(E)) < 0$ ;  $f'(x) > 0 \implies \det(J(E)) > 0$ ;  $f'(x) = 0 \implies \det(J(E)) = 0$ . 容易看出  $\det(J(E_i)) > 0, (i = 1, 3)$ ,  $\det(J(E_2)) < 0$ ,  $\det(J(E_*)) = 0$ ,  $\det(J(E^*)) = 0$  所以  $E_1, E_2$  和  $E_3$  都是基本平衡点并且只有  $E_2$  是双曲鞍点, 而  $E_*$  和  $E^*$  都是退化平衡点.

## (II) $\omega \geq \alpha(\beta\eta + 1)$

**引理5** 当  $\omega \geq \alpha(\beta\eta + 1)$  时, 系统(2)最多有两个正平衡点. 此外, 根据盛金公式和盛金定理:

(1) 当  $\Delta_3 < 0$  时, 则根据盛金定理5和盛金的公式IV, 我们知道  $\Delta_2 > 0$ , 系统(2)有三个不同的平衡点:

(a) 当  $b > 0$  且  $c > 0$  时, 函数  $f(x)$  有三个不相等的负根, 也就是说系统(2)没有正平衡点(参见图 2(a)).

(b) 当  $b < 0$  且  $c > 0$  或者  $c < 0$  时, 系统(2)有两个正平衡点  $E_i(x_i, y_i) (i = 2, 3)$ . (参见图 2(b)).

i. 当  $x < \alpha - \omega$  或者  $x > \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$  时,  $E_2(x_2, y_2)$  是一个双曲鞍点, 并且如果  $\text{tr}(J(E_3)) < 0$ , 那么  $E_3(x_3, y_3)$  是一个双曲稳定结点或者焦点; 如果  $\text{tr}(J(E_3)) > 0$ , 那么  $E_3(x_3, y_3)$  是一个双曲不稳定结点或者焦点; 如果  $\text{tr}(J(E_3)) = 0$ , 那么  $E_3(x_3, y_3)$  是一个弱焦点或中心, 其中,  $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < \alpha - \omega$  或者  $x_1 < 0 < \alpha\beta\eta + \alpha - \omega < x_2 < x_3$ .

ii. 当  $\alpha - \omega < x < \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$  时,  $E_3(x_3, y_3)$  是一个双曲鞍点, 并且如果  $\text{tr}(J(E_2)) < 0$ , 那么  $E_2(x_2, y_2)$  是一个双曲稳定结点或者焦点; 如果  $\text{tr}(J(E_2)) > 0$ , 那么  $E_2(x_2, y_2)$  是一个双曲不稳定结点或者焦点; 如果  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$ , 那么  $E_2(x_2, y_2)$  是一个弱焦点或中心, 其中,  $x_1 < 0 < \alpha - \omega < x_2 < x_3 < \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$ .

(2) 当  $\Delta_3 = 0$  时,

(a) 若  $\Delta_2 > 0$ , 那么函数  $f(x)$  有三个实根, 其中  $x_*$  是一个二重根.

i. 当  $c > 0$  且  $-b < 0$  时, 系统(2)没有正平衡点. (参见图 2(c)和参见图 2(d)).

ii. 当  $b < 0$  且  $c > 0$  或者  $c < 0$  时, 系统(2)有一个正平衡点  $E(x_*, y_*)$ , 并且  $E(x_*, y_*)$  是一个退化平衡点. (参见图 2(e)).

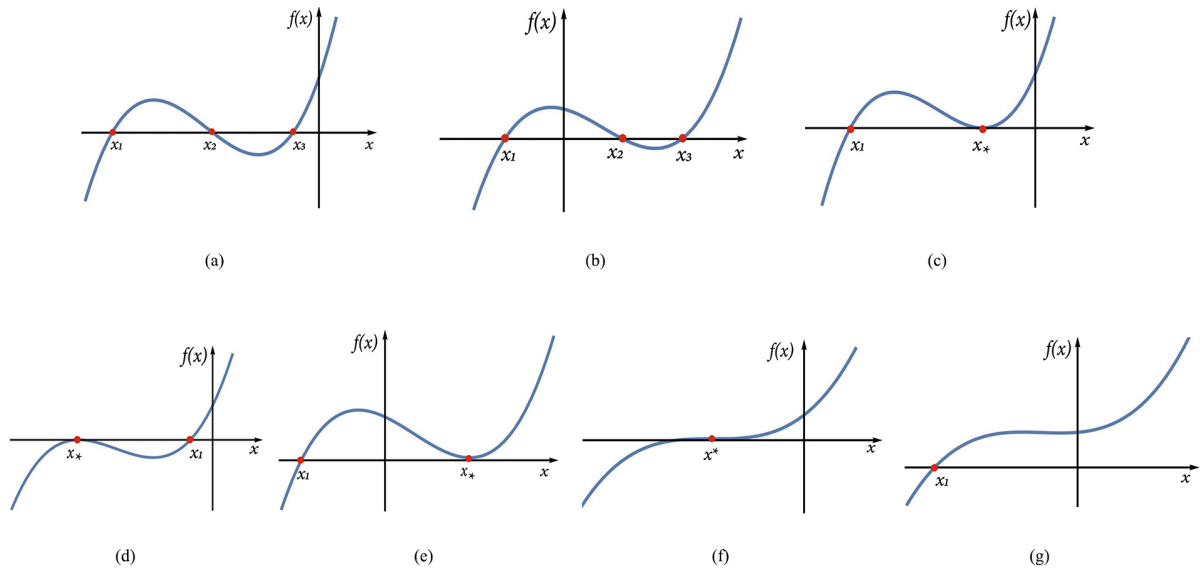
(b) 若  $\Delta_2 = 0$ , 那么函数  $f(x)$  有一个三重负实根. 也就是说, 系统(2)没有正平衡点. (参见图 2(f)).

(3) 当  $\Delta_3 > 0$  时, 则函数  $f(x)$  有一个负实根和一对共轭复根. 也就是说, 系统(2)没有正平衡点. (参见图 2(g)).

**证明** 由(8)可知, 当  $x < \alpha - \omega$  或  $x > \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$  且  $\frac{\mu(x^2+(2\omega-\alpha(\beta\eta+2))x+(\alpha-\omega)(\alpha\beta\eta+\alpha-\omega))}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta+1)+x+\omega)^2} > 0$  时, 有  $f'(x) < 0 \implies \det(J(E)) > 0$ ,  $f'(x) > 0 \implies \det(J(E)) < 0$  并且  $f'(x) = 0 \implies \det(J(E)) = 0$ . 很容

易看出 $\det(J(E_2)) < 0$ ,  $\det(J(E_3)) > 0$ ,  $\det(J(E_*) = 0$ , 因此 $E_2$  和 $E_3$  都是基本平衡点并且只有 $(E_2)$  是一个双曲鞍点, 并且 $E_*$  是退化平衡点.

当 $\alpha - \omega < x < \alpha\beta\eta + \alpha - \omega$ ,  $\frac{\mu(x^2+(2\omega-\alpha(\beta\eta+2))x+(\alpha-\omega)(\alpha\beta\eta+\alpha-\omega))}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta+1)+x+\omega)^2} < 0$ 时, 我们有 $f'(x) < 0 \implies \det(J(E) < 0$ ;  $f'(x) > 0 \implies \det(J(E) > 0$ ;  $f'(x) = 0 \implies \det(J(E) = 0$ . 很容易看出 $\det(J(E_2)) > 0$ ,  $\det(J(E_3)) < 0$ ,  $\det(J(E_*) = 0$ , 因此 $E_2$  和 $E_3$  都是基本平衡点并且只有 $(E_3)$  是一个双曲鞍点, 并且 $E_*$  是退化平衡点.



**Figure 2.** Roots of  $f(x) = 0$  when  $\omega \geq \alpha(\beta\eta + 1)$ . (a) Three single negative roots  $x_1, x_2, x_3$ . (b) A negative root  $x_1$  and two positive root  $x_2, x_3$ . (c)(d) Two negative roots: a double negative root  $x_*$  and a negative root  $x_1$ . (e) A negative root  $x_1$  and a double positive root  $x_*$ . (f) A unique triple negative root  $x_*$ . (g) A real negative root and a pair of conjugate complex roots

**图 2.** 当 $\omega \geq \alpha(\beta\eta + 1)$  时,  $f(x) = 0$  的根的情况. (a) 三个不同的负根 $x_1, x_2, x_3$ . (b) 一个负根 $x_1$  和两个正根 $x_2, x_3$ . (c)(d) 两个负根: 一个二重根 $x_*$  和一个负根 $x_1$ . (e) 一个负根 $x_1$  和一个正的二重根 $x_*$ . (f) 一个负三重根 $x_*$ . (g) 一个负实根和一对共轭复根

### 3. 分支分析

#### 3.1. 余维2的尖点分支

令

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_* = -\frac{\Upsilon}{\alpha^2\beta^2\eta x_*}, \\ \rho &= \rho_* = -\frac{(-\alpha(\beta\eta + 1) + x_* + \omega)^2 (\alpha\beta(\omega - \alpha) + x_*(\alpha\beta - \mu))}{\alpha^2\beta^2\eta x_*}, \\ \sigma &= \sigma_* = x_* (-\alpha + x_* + \omega), \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\mathcal{Y} = (x_* + \omega - \alpha)(\alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) + x_*(\alpha(2\beta\omega + \mu) - \mu\omega - 2\alpha^2\beta(\beta\eta + 1)) + x_*^2(\alpha\beta - \mu)).$$

并且  $\delta_*, \rho_*, \sigma_*$  是根据  $f(x_*) = 0, f'(x_*) = 0, \text{tr}(J(E_*)) = 0$  得到的.

**定理1** 当  $(\sigma, \rho, \eta, \mu, \delta, \alpha, \beta, \omega) \in \Gamma_1$  时,  $\delta, \rho, \sigma$  满足(11), 那么  $E_*(x_*, y_*)$  是一个尖点. 此外, 当  $\omega = \omega_*$  时,  $E_*(x_*, y_*)$  是一个余维2的尖点.

**证明** 接下来我们证明了平衡点  $E_*(x_*, y_*)$  是一个余维2的尖点. 依次进行以下线性变换. 首先让

$$\begin{aligned} X &= x - x_*, & Y &= y - y_*, \\ \delta &= \delta_*, & \rho &= \rho_*, & \sigma &= \sigma_*, & y &= y_* = \frac{\alpha - x_* - \omega}{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

将系统(2)在(0,0)点泰勒展开, 可得改写成如下形式(为简单起见, 我们仍然用  $x, y, t$  分别替换  $X, Y, \tau$ )

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + O(|x, y|^3), \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x + b_2y + b_3y^2 + b_4xy + O(|x, y|^3), \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha - x_* - \omega, & a_2 &= \alpha\beta(\alpha - x_* - \omega), & a_3 &= \frac{\alpha\beta(\alpha - x_* - \omega)}{x_*}, \\ a_4 &= \frac{\alpha\beta(\alpha\beta(\omega - \alpha) + x_*(\alpha\beta - \mu))}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega}, & b_1 &= \frac{-\alpha + x_* + \omega}{\alpha\beta}, \\ b_2 &= -\alpha + x_* + \omega, & b_3 &= -\alpha\beta, & b_4 &= -1. \end{aligned} \tag{13}$$

接着, 令

$$v = x, \quad u = y,$$

我们得到

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= b_3u^2 + b_4uv + b_2u + b_1v + O(|u, v|^3), \\ \frac{dv}{dt} &= a_4u^2 + a_3uv + a_2u + a_1v + O(|u, v|^3), \end{aligned} \tag{14}$$

然后, 做变换

$$X = u, \quad Y = b_3u^2 + b_4uv + b_2u + b_1v,$$

则系统(14)可以被改写如下形式(为了方便起见, 我们依然用  $x, y$  代替  $X, Y$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + O(|x, y|^3), \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$b_{20} = (-\alpha + x_* + \omega) \left( \frac{\alpha\beta(-\alpha + x_* + \omega) - \mu x_*}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(-\alpha + x_* + \omega)}{x_*} \right),$$

$$b_{02} = -\frac{\alpha\beta}{-\alpha + x_* + \omega},$$

$$b_{11} = \frac{\alpha\beta(\alpha - 2x_* - \omega)}{x_*}.$$

此外, 令  $dt = d\tau(1 - b_2x)$ , 则系统(15)变成(我们仍然用  $t$  代替  $\tau$ )

$$\frac{dx}{dt} = y(1 - b_{02}x),$$

$$\frac{dy}{dt} = (1 - b_{02}x)(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + O(|x, y|^3)),$$
(16)

做变换  $X = x, Y = y(1 - b_2x)$ , 则系统(16)转换为(我们仍然用  $x, y$  分别替换  $X, Y$ ):

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{20}x^2 + b_{11}xy + O(|x, y|^3).$$
(17)

当  $b_{11} = 0$ , 即  $\omega = \omega_* = \alpha - 2x_*$  时, 然后有  $\sigma = x_*(-\alpha + x_* + \omega) = -x_*^2 \leq 0$  成立, 但在本文中  $\sigma \in \Gamma_1$ , 这两种情况之间存在矛盾, 所以  $b_{11} \neq 0$  始终成立. 所以,  $E_*(x_*, y_*)$  是一个余维2的尖点.

### 3.2. 余维2的Bogdanov-Takens 分支

在本节中, 我们研究系统(2)在一个小的参数扰动下会发生余维2的BT 分支. 实际上, 我们有以下的定理:

**定理2** 当  $\delta = \delta_*, \rho = \rho_*, \sigma = \sigma_*$  时, 即(11)中的条件都满足时, 系统(2)有一个余维二的尖点  $E_*(x_*, y_*)$ . 如果我们选择  $\sigma$  和  $\delta$  作为分支参数, 那么系统(2)在平衡点  $E_*(x_*, y_*)$  附近邻域内存在余维二的Bogdanov-Takens 分支.

**证明**

$$\frac{dx}{dt} = (\lambda_1 + \sigma) - x(\delta + \lambda_2) + \frac{\rho xy}{\eta + y} + \mu(-x)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -xy + \alpha y(1 - \beta y) - \omega y,$$
(18)

其中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是靠近  $(0, 0)$  的小参数. 我们只关心在  $E_*(x_*, y_*)$  附近, 系统(2)的情况. 做变换:

$$X = x - x_*, \quad Y = y - y_*.$$

系统(18)可以重写为(我们仍然用 $x, y$  替换 $X, Y$ )

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= m_1 + m_2x + m_3y + m_4xy + m_5y^2 + P_1(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \\ \frac{dy}{dt} &= m_6 + m_7x + m_8y + m_9xy + m_{10}y^2 + P_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $P_1(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$  和 $P_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ 是至少具有三阶导数的 $(x, y)$  函数. 它们的系数取决于 $\lambda_1$  和 $\lambda_2$ , 并且

$$\begin{aligned} m_1 &= \lambda_1 - \lambda_2x_*, \quad m_2 = \alpha - \lambda_2 - x_* - \omega, \quad m_3 = \alpha\beta(\alpha - x_* - \omega), \\ m_4 &= \frac{\alpha\beta(\alpha - x_* - \omega)}{x_*}, \quad m_5 = \frac{\alpha\beta(\alpha\beta(\omega - \alpha) + x_*(\alpha\beta - \mu))}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega}, \\ m_6 &= 0, \quad m_7 = \frac{-\alpha + x_* + \omega}{\alpha\beta}, \quad m_8 = -\alpha + x_* + \omega, \quad m_9 = -1, \quad m_{10} = -\alpha\beta. \end{aligned}$$

令

$$v = x, \quad u = y.$$

可得如下系统:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= m_6 + m_7v + m_8u + m_9uv + m_{10}u^2 + P_1(u, v, \lambda_1, \lambda_2), \\ \frac{dv}{dt} &= m_1 + m_2v + m_3u + m_4uv + m_5u^2 + P_2(u, v, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \tag{20}$$

继续做变换:

$$\begin{aligned} X &= u, \\ Y &= m_6 + m_7v + m_8u + m_9uv + m_{10}u^2 + P_1(u, v, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned}$$

我们可以将上面的系统(20)改写成如下形式(我们仍然用 $x, y$  分别表示 $X, Y$ )

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= n_1 + n_2x + n_3y + n_4x^2 + n_5xy + n_6y^2 + P_3(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $P_3(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$  是至少具有三阶导数的 $(x, y)$  函数. 它们的系数取决于 $\lambda_1$  和 $\lambda_2$ , 并且

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2x_*)(-\alpha + x_* + \omega)}{\alpha\beta}, \quad n_2 = \lambda_2(-\alpha + 2x_* + \omega) - \lambda_1, \quad n_3 = -\lambda_2, \\ n_4 &= \frac{(\alpha - x_* - \omega)(\alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) - \alpha\beta x_*(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) + \mu x_*^2)}{x_*(\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega)} - \alpha\beta\lambda_2, \\ n_5 &= \frac{\alpha\beta(\alpha - 2x_* - \omega)}{x_*}, \quad n_6 = -\frac{\alpha\beta}{-\alpha + x_* + \omega}. \end{aligned}$$

为了从系统(21)中移 $y^2$ 项, 我们取

$$dt = (1 - n_6x) d\tau,$$

则系统(21)变为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(1 - n_6x), \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - n_6x)(n_4x^2 + n_5xy + n_2x + n_6y^2 + n_3y + n_1) + P_3(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \quad (22)$$

再令 $X = x, Y = y(1 - n_6x)$ , 并分别将 $X, Y$ 重写为 $x, y$ , 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= f_1 + f_2x + f_3y + f_4x^2 + f_5xy + P_4(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $P_4(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ 是至少具有三阶导数的 $(x, y)$ 函数. 它们的系数取决于 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ , 并且

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2x_*)(-\alpha + x_* + \omega)}{\alpha\beta}, \quad f_2 = \lambda_2(\omega - \alpha) + \lambda_1, \quad f_3 = -\lambda_2, \\ f_4 &= \alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + 2\lambda_2 + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} \\ &\quad + \frac{\alpha\beta(\lambda_2(\omega - \alpha) + \lambda_1)}{\alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*, \\ f_5 &= \alpha\beta\left(-\frac{\lambda_2}{-\alpha + x_* + \omega} + \frac{\alpha - \omega}{x_*} - 2\right). \end{aligned}$$

易知当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = f_3 = 0, \\ f_4 &= \frac{\alpha\beta(x_*(\alpha\beta\eta + \alpha - \eta\mu - \omega) - (\alpha - \omega)(2\alpha\beta\eta + \alpha - \omega))}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_* \neq 0, \\ f_5 &= \alpha\beta\left(\frac{\alpha - \omega}{x_*} - 2\right) \neq 0. \end{aligned}$$

为了从系统(23)中移除 $x$ 项, 我们令

$$X = \frac{f_2}{2f_4} + x, \quad Y = y.$$

则系统变为(仍然用 $x, y$ 分别表示 $X, Y$ )

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= r_3x^2 + r_4xy + r_2y + r_1 + P_5(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \quad (24)$$

这里的 $P_5(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$  是至少具有关于 $x, y$  的三阶导数的函数. 它们的系数关于 $\lambda_1$  和 $\lambda_2$  可导, 并且

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 x_*)(-\alpha + x_* + \omega)}{\alpha\beta} - \frac{(\lambda_2(\omega - \alpha) + \lambda_1)^2}{4r_3}, \\
 r_2 &= -\lambda_2 - \frac{\alpha\beta(\lambda_2(\omega - \alpha) + \lambda_1)\left(-\frac{\lambda_2}{-\alpha + x_* + \omega} + \frac{\alpha - \omega}{x_*} - 2\right)}{2r_3}, \\
 r_3 &= \alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + 2\lambda_2 + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} \\
 &\quad + \frac{\alpha\beta(\lambda_2(\omega - \alpha) + \lambda_1)}{\alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*, \\
 r_4 &= \alpha\beta\left(-\frac{\lambda_2}{-\alpha + x_* + \omega} + \frac{\alpha - \omega}{x_*} - 2\right).
 \end{aligned}$$

对变量做最后一次变换

$$X = \frac{r_4^2}{r_3}x, \quad Y = \frac{r_4^3}{r_3^2}y, \quad \tau = \frac{r_3}{r_4}t.$$

可得到(仍然用 $x, y, t$  分别替换 $X, Y, \tau$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= y, \\
 \frac{dy}{dt} &= s_1 + s_2y + x^2 + xy + P_6(x, y, \lambda_1, \lambda_2),
 \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $P_6(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$  是至少具有三阶导数的 $(x, y)$  函数. 它们的系数关于 $\lambda_1$  和 $\lambda_2$  可导, 并且

$$s_1 = \frac{r_1 r_4^4}{r_3^3}, \quad s_2 = \frac{r_2 r_4}{r_3}.$$

最后我们将 $s_1$  和 $s_2$  展开成关于 $\lambda_1$  和 $\lambda_2$  的形式, 得到

$$\begin{aligned}
 s_1 &= g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + g_3\lambda_1^2 + g_4\lambda_2\lambda_1 + g_5\lambda_2^2 + O(|\lambda_1, \lambda_2|^3), \\
 s_2 &= k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_1^2 + k_4\lambda_2\lambda_1 + k_5\lambda_2^2 + O(|\lambda_1, \lambda_2|^3),
 \end{aligned} \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{\alpha^3\beta^3\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)^4(-\alpha + x_* + \omega)}{\left(\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*\right)^3}, \\
 g_2 &= -\frac{\alpha^3\beta^3x_*\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)^4(-\alpha + x_* + \omega)}{\left(\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*\right)^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_3 &= \frac{11\alpha^4\beta^4(\alpha - 2x_* - \omega)^4(\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega)^4}{4(\alpha - x_* - \omega)^4G^4}, \\
 g_4 &= \frac{\alpha^4\beta^4\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)^4(7\alpha x_*^4 - 7x_*^4\omega - 18x_*^5)(\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega)^4}{2(\alpha - x_* - \omega)^4G^4} \\
 &\quad - \frac{4\alpha^4\beta^4\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)^3}{\alpha\beta\left(\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*\right)^3}, \\
 g_5 &= -\frac{3\alpha^4\beta^4x_*(\alpha - 2x_* - \omega)^5(-\alpha(\beta\eta + 1) + x_* + \omega)^4}{(-\alpha + x_* + \omega)^4(\alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) - \alpha\beta x_*(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) + \mu x_*^2)^4} \\
 &\quad - \frac{\alpha^4\beta^4(\alpha - \omega)^2(-\alpha + 2x_* + \omega)^4(-\alpha(\beta\eta + 1) + x_* + \omega)^4}{4(-\alpha + x_* + \omega)^4(\alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) - \alpha\beta x_*(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) + \mu x_*^2)^4} \\
 &\quad + \frac{4\alpha^3\beta^3x_*(\alpha - 2x_* - \omega)^3(\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega)^3}{(\alpha - x_* - \omega)^3(\alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) - \alpha\beta x_*(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) + \mu x_*^2)^3}, \\
 k_1 &= -\frac{\alpha^2\beta^2\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)^2}{2\left(\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*\right)^2}, \\
 k_2 &= \frac{\alpha\beta\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)\left(-\frac{\alpha\beta(\omega - \alpha)\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)}{2\left(\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*\right)} - 1\right)}{\alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + \omega) + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_*}, \\
 k_3 &= \frac{\alpha^3\beta^3\left(\frac{\alpha-\omega}{x_*} - 2\right)^2}{(\alpha - x_* - \omega)K_{31}^3} - \frac{6\alpha^4\beta^4\lambda_2^2K_{32}(\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega)^4}{(\alpha - x_* - \omega)^8G^5}, \\
 k_4 &= -\frac{2\alpha^3\beta^3x_*^2(\alpha - 2x_* - \omega)^2(\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega)^3}{(\alpha - x_* - \omega)^4G^3}, \\
 k_5 &= \frac{-\alpha\beta K_{51}K_{52}x_*^3(\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega)}{(\alpha - x_* - \omega)^4G^3},
 \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
 G &= (\alpha^3\beta^2\eta + \alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2\eta\omega - 2\alpha^2\beta\omega + \alpha\beta\omega^2 - \alpha^2\beta^2\eta x_* - \alpha^2\beta x_* + \alpha\beta x_*\omega + \mu x_*^2), \\
 K_{31} &= \alpha\beta(-\alpha(\beta\eta + 1) + \eta\mu + \omega) + \frac{\alpha\beta(\alpha - \omega)^2}{x_*} + \mu x_* \\
 &\quad + \frac{\alpha\beta\eta(\alpha^2\beta^2\eta - \alpha(\beta\eta\mu + \mu) + \mu\omega)}{\alpha\beta\eta + \alpha - x_* - \omega}, \\
 K_{32} &= \alpha^5\beta^2\eta x_*^4 + \alpha^5\beta x_*^4 - 3\alpha^4\beta^2\eta x_*^4\omega - 8\alpha^4\beta^2\eta x_*^5 - 4\alpha^4\beta x_*^4\omega - 10\alpha^4\beta x_*^5 + 3\alpha^3\beta^2\eta x_*^4\omega^2 \\
 &\quad + 16\alpha^3\beta^2\eta x_*^5\omega + 19\alpha^3\beta^2\eta x_*^6 + 6\alpha^3\beta x_*^4\omega^2 + 30\alpha^3\beta x_*^5\omega + 31\alpha^3\beta x_*^6 - \alpha^2\beta^2\eta x_*^4\omega^3 \\
 &\quad - 8\alpha^2\beta^2\eta x_*^5\omega^2 - 19\alpha^2\beta^2\eta x_*^6\omega - 14\alpha^2\beta^2\eta x_*^7 - 4\alpha^2\beta x_*^4\omega^3 - 30\alpha^2\beta x_*^5\omega^2 \\
 &\quad - 62\alpha^2\beta x_*^6\omega - 38\alpha^2\beta x_*^7 - \alpha^2\mu x_*^6 + \alpha\beta x_*^4\omega^4 + 10\alpha\beta x_*^5\omega^3 + 31\alpha\beta x_*^6\omega^2 + 38\alpha\beta x_*^7\omega
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+ 16\alpha\beta x_*^8 + 2\alpha\mu x_*^6\omega + 3\alpha\mu x_*^7 - \mu x_*^6\omega^2 - 3\mu x_*^7\omega - 2\mu x_*^8, \\
 K_{51} = &x_* (\alpha(7\beta\omega + \mu) - \mu\omega + x_*(4\alpha\beta - \mu) - \alpha^2\beta(3\beta\eta + 7)) \\
 &+ \alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha(2\beta\eta + 3) - 3\omega), \\
 K_{52} = &\alpha\beta(\alpha - \omega)^2 + x_* (\alpha^2\beta(\beta\eta - 1) + \alpha(\beta\omega + \mu) - \mu\omega - \mu x_*).
 \end{aligned}$$

因为

$$\frac{|\partial(s_1, s_2)|}{|\partial(\lambda_1, \lambda_2)|} = \frac{S_1}{S_2} \neq 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
 S_1 = &\alpha^4\beta^4(\alpha - 2x_* - \omega)^5(-\alpha(\beta\eta + 1) + x_* + \omega)(\alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) \\
 &+ 2x_*^2(\mu - \alpha\beta) + \alpha\beta x_*(\alpha - \omega)), \\
 S_2 = &2x_*(\alpha - x_* - \omega)^3(\alpha\beta(\alpha - \omega)(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) - \alpha\beta x_*(\alpha\beta\eta + \alpha - \omega) + \mu x_*^2)^5.
 \end{aligned}$$

那么, 系统(3.2) 存在一个余维二的Bogdanov-Takens 分支.

### 3.3. Hopf 分支

在这一部分中, 我们的目的是分析系统(2)产生Hopf分支的条件. 并且Hopf 分支将发生在平衡点 $E_*(x_*, y_*)$  处. 产生Hopf 分支的一个基本条件是 $\text{tr}(J(E_*)) = 0$  和 $\text{det}(J(E_*)) > 0$ , 这使得特征值 $\lambda_{1,2}$  位于虚轴上. 除此之外, 这对纯虚特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm i\theta$ , 其中 $\theta = \sqrt{h_1 p_2 - h_2 p_1}$ . 下面的定理我们给出了产生Hopf分支的条件.

**定理3** 假设 $F(x_*) = 0, \text{tr}(J(E_*)) = 0$ , 如果第一李雅普诺夫系数 $\sigma_1 > 0$ (或 $\sigma_1 < 0$ ), 那么系统(2)在 $E_*(x_*, y_*)$  处发生次临界(或超临界) Hopf 分支, 其中

$$\sigma_1 = \frac{\theta(3H_5 + H_7 + P_6 + 3P_8) + 2H_2P_2 - 2H_4P_4 - H_3(H_2 + H_4) + P_3(P_2 + P_4)}{8\theta}.$$

**证明** 令 $X = x - x_*, Y = y - y_*$ , 则平衡点 $E_*(x_*, y_*)$  被移到了原点(0, 0), 系统(2)变成了

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= h_5x^2y + h_7xy^3 + h_3xy + h_1x + h_8y^4 + h_6y^3 + h_4y^2 + h_2y, \\
 \frac{dy}{dt} &= p_3xy + p_1x + p_4y^2 + p_2y,
 \end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}
 h_1 &= -\delta + \frac{\rho y_*}{\eta + y_*} - \mu y_*, \quad h_2 = \frac{\eta \rho x_*}{(\eta + y_*)^2} - \mu x_*, \quad h_3 = \frac{\eta \rho}{(\eta + y_*)^2} - \mu, \\
 h_4 &= -\frac{\eta \rho x_*}{(\eta + y_*)^3}, \quad h_5 = -\frac{\eta \rho}{(\eta + y_*)^3}, \quad h_6 = \frac{\eta \rho x_*}{(\eta + y_*)^4}, \\
 h_7 &= \frac{\eta \rho}{(\eta + y_*)^4}, \quad h_8 = -\frac{\eta \rho x_*}{(\eta + y_*)^5}, \quad p_1 = -y_*, \\
 p_2 &= \alpha - x_* - 2\alpha\beta y_* - \omega, \quad p_3 = -1, \quad p_4 = -\alpha\beta.
 \end{aligned}$$

做变换

$$X = \frac{1}{h_2}x, \quad Y = \frac{1}{\theta}\left(\frac{h_1}{h_2}x + y\right),$$

则系统(27)变成(我们仍然用 $x, y, t$  分别替换 $X, Y, \tau$ )

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \theta y + H_2x^2 + H_3xy + H_4y^2 + H_5x^3 + H_6x^2y + H_7xy^2 + H_8y^3 + H_9x^4 + H_{10}x^3y \\ &\quad + H_{11}x^2y^2 + H_{12}xy^3 + H_{13}y^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\theta x + P_2x^2 + P_3xy + P_4y^2 + P_5x^3 + P_6x^2y + P_7xy^2 + P_8y^3 + P_9x^4 + P_{10}x^3y \\ &\quad + P_{11}x^2y^2 + P_{12}xy^3 + P_{13}y^4. \end{aligned}$$

这里

$$P_4 = \theta\left(-\alpha\beta - \frac{\eta\rho(y_*(\frac{\rho}{\eta+y_*} - \mu) - \delta)}{(\eta + y_*)^3(\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu)}\right),$$

$$P_5 = \frac{\eta\rho(\delta + y_*(\mu - \frac{\rho}{\eta+y_*}))^2(x_*(\eta + y_*)(\mu - \frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2})^2 - (\delta + y_*(\mu - \frac{\rho}{\eta+y_*}))^2)}{\theta(\eta + y_*)^4(\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu)},$$

$$P_6 = \frac{\eta\rho(y_*(\frac{\rho}{\eta+y_*} - \mu) - \delta)(3(\delta + y_*(\mu - \frac{\rho}{\eta+y_*}))^2 - x_*(\eta + y_*)(\mu - \frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2})^2)}{(\eta + y_*)^4(\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu)},$$

$$P_7 = -\frac{3\eta\theta\rho(\delta + y_*(\mu - \frac{\rho}{\eta+y_*}))^2}{(\eta + y_*)^4(\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu)},$$

$$P_8 = \frac{\eta\theta^2\rho(y_*(\frac{\rho}{\eta+y_*} - \mu) - \delta)}{(\eta + y_*)^4(\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu)},$$

$$P_9 = -\frac{\eta\rho(\delta + \eta\mu - \rho + 2\mu y_*)(\delta\eta + y_*(\delta + \eta\mu - \rho + \mu y_*))^4}{\theta(\eta + y_*)^7(\eta(\eta\mu - \rho) + \mu y_*(2\eta + y_*))},$$

$$P_{10} = \frac{\eta\rho(y_*(\frac{\rho}{\eta+y_*} - \mu) - \delta)^3\left(\frac{4(y_*(\frac{\rho}{\eta+y_*} - \mu) - \delta)}{\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu} + 3(\eta + y_*)\right)}{(\eta + y_*)^5},$$

$$P_{11} = \frac{3\eta\theta\rho(\delta + y_*(\mu - \frac{\rho}{\eta+y_*}))^2(-\eta - \frac{2(y_*(\frac{\rho}{\eta+y_*} - \mu) - \delta)}{\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu} - y_*)}{(\eta + y_*)^5},$$

$$P_{12} = -\frac{\eta\theta^2\rho(\delta\eta + y_*(\delta + \eta\mu - \rho + \mu y_*))(\eta(4\delta + \eta\mu - \rho) + y_*(4\delta + 6\eta\mu - 4\rho + 5\mu y_*))}{(\eta + y_*)^5(\eta(\eta\mu - \rho) + \mu y_*(2\eta + y_*))},$$

$$P_{13} = -\frac{\eta\theta^3\rho(y_*(\frac{\rho}{\eta+y_*} - \mu) - \delta)}{(\eta + y_*)^5(\frac{\eta\rho}{(\eta+y_*)^2} - \mu)}.$$

运用软件Mathematica 和Matlab, 我们得到第一李雅普诺夫系数和第二李雅普诺夫系数, 如下:

$$\sigma_1 = \frac{\theta(3H_5 + H_7 + P_6 + 3P_8) + 2H_2P_2 - 2H_4P_4 - H_3(H_2 + H_4) + P_3(P_2 + P_4)}{8\theta},$$

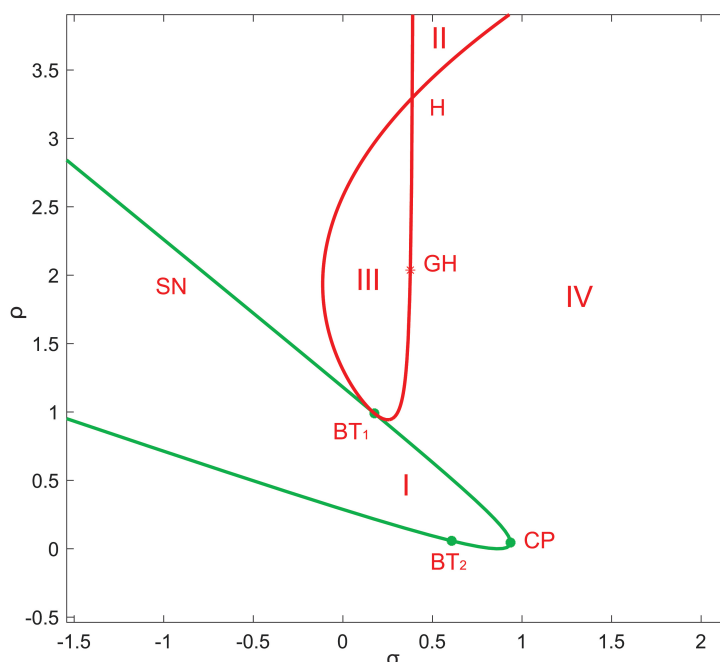
$$\sigma_2 = \frac{1}{288\theta^3} (4(-5H_3 + 10P_2 + 9P_4)H_2^3 + (H_3(P_3 - 40H_4) + 4H_4(P_2 + 5P_4) - 2P_3(9P_2 + 5P_4))H_2^2 + (-5H_3^3 + (9P_2 + 13P_4)H_3^2 + (-40H_4^2 - 18P_3H_4 + 18P_2^2 + P_3^2 + 10P_4^2 + 8P_2P_4)H_3 + 40P_2^3 - 36P_4^3 - 9P_2P_3^2 - 20P_2P_4^2 + 40P_2^2P_4 - 13P_3^2P_4 - 8H_4P_3(P_2 + P_4) - 20H_4^2(P_2 + 2P_4))H_2 + 20(P_3 - 2H_4)P_4^3 + P_4^2(H_3(18H_4 - P_3) - 4P_2(H_4 - 10P_3)) - 5H_3^3H_4 + H_3^2P_2(5H_4 - P_3) + 5P_2P_3(-2H_4^2 - P_3H_4 + 4P_2^2 + P_3^2) + H_3(-20H_4^3 - 19P_3H_4^2 + (10P_2^2 + P_3^2)H_4 + 19P_2^2P_3) + (-40H_4^3 - 18P_3H_4^2 + H_4(20P_2^2 - 9P_3^2) + H_3^2(9H_4 - P_3) + 2H_3P_2(4H_4 + 9P_3) + 5(P_3^3 + 8P_2^2P_3))P_4 + \theta(2(30H_5 + 19H_7 - 8P_6 + 15P_8)H_2^2 + (3H_3(7H_6 + 11H_8 + 5P_5 + P_7) + 6P_2(-7H_6 + 3H_8 + 13P_5 - 5P_7) + 12P_4(-5H_6 + 4(H_8 + P_5) - 5P_7) + P_3(-3H_5 + 17H_7 - 7P_6 + 21P_8) + 2H_4(3H_5 + 25H_7 - 5P_6 + 45P_8))H_2 - 12H_4P_2(H_6 + P_7) + 2P_4^2(15H_5 - 8H_7 + 19P_6 + 30P_8) + H_3^2(3H_5 + 5H_7 - P_6 - 3P_8) + 10P_2^2(6H_5 - H_7 + 2P_6 - 3P_8) - P_3^2(3H_5 + H_7 - 5P_6 - 3P_8) - 10H_4^2(3H_5 - 2H_7 + P_6 - 6P_8) + H_3(12P_3(H_8 + P_5) + 3H_4(5H_6 + 13H_8 + 3(P_5 + P_7))) + P_2(27H_5 - 5H_7 + 19P_6 + 3P_8)) + P_4(3P_3(H_6 + 5H_8 + 11P_5 + 7P_7) + 6H_4(-5H_6 + 13H_8 + 3P_5 - 7P_7) + 2P_2(45H_5 - 5H_7 + 25P_6 + 3P_8) + H_3(21H_5 - 7H_7 + 17P_6 - 3P_8)) + P_3(3P_2(3H_6 + 3H_8 + 13P_5 + 5P_7) + H_4(3H_5 + 19H_7 - 5P_6 + 27P_8))) + \theta^2(-9H_7(H_6 + H_8 + P_5 + P_7) + 9P_6(H_6 + H_8 + P_5 + P_7) - 9H_5(H_6 - 3(H_8 + P_5) + P_7) + 9(H_6 - 3(H_8 + P_5) + P_7)P_8 + 6H_3(5H_9 - H_{11} - 3H_{13} + 2P_{10}) + 6P_2(20H_9 + 2H_{11} + 5P_{10} + 3P_{12}) + 6P_4(22H_9 + 4H_{11} - 6H_{13} + 7P_{10} + 9P_{12}) - 6H_4(3H_{10} + 5H_{12} + 2P_{11} + 20P_{13}) - 6H_2(9H_{10} + 7H_{12} - 6P_9 + 4P_{11} + 22P_{13}) + 6P_3(-2H_{12} + 3P_9 + P_{11} - 5P_{13}))).$$

### 4. 数值模拟

在本节中, 我们借助常微分方程软件Matlab和Auto07p [3], 通过选择参数值来进行数值模拟, 从而验证理论结果.

我们通过设置以下参数分析肿瘤细胞和免疫细胞的相互作用, 通过分析癌症系统的动力学行为揭示模型(1)背后的动力学行为. 这组参数取自于Kuznetsov *et al.* [4]:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.1181, \rho = 1.131, \eta = 20.19, \mu = 0.00311, \\ \delta &= 0.3743, \alpha = 1.636\beta = 0.002, \omega = 0.2038376828. \end{aligned} \tag{28}$$



**Figure 3.** The two-parameter bifurcation of the system (2) for parameters  $\sigma$  and  $\rho$ .  $H$  and  $SN$  represent Hopf bifurcation and Saddle node bifurcation, respectively (to ensure the integrity of the bifurcation, the bifurcation at  $\sigma$  is also provided here)

**图 3.** 系统(2)关于参数 $\sigma$ 和 $\rho$ 的二参数分支图. 其中 $H, SN$ 分别代表Hopf分支曲线和鞍结分支曲线(为了保证分支的完整性, 这里同时给出 $\sigma$ 时的分支图)

取上述(28)中的参数值时, 可得到 $E_0(0.315522, 0)$ ,  $E_1(1.40671, 7.778)$ ,  $E_2(0.363784, 326.521)$ 三个平衡点. 为简单起见, 我们选取 $\sigma$ 和 $\rho$ 作二参数分支. 我们得到二参数分支图包括: Hopf分支曲线 $H$ (红色)和鞍结分支曲线 $SN$ (绿色). 我们找到一个广义的Hopf分支点 $GH(1.4156998, 5.0313264)$ , 此时 $\sigma = 0.37669404, \rho = 2.0372754$ . 并且找到了极限环的鞍结分支的尖点 $CP$ , 此时 $\sigma = 0.93605836, \rho = 0.045525486$ . 另外还有两个 $BT$ 分支点 $BT_1(1.2536126, 54.568998)$ , 此时 $\sigma = 0.17616709, \rho = 0.989990005$ ;  $BT_2(1.564771, -40.5283418)$ , 此时 $\sigma = 0.60750163, \rho = 0.058035927$ , 参见图3. 整个分支图可划分为四个区域:  $I - IV$ , 每个区域详细的信息和相图, 参见图4: (I)  $\sigma = 0.6606, \rho = 0.35$ : 一个稳定结点 $(0.21778, 371.1433)$ 和一个鞍点 $(0.69623, 0)$ ; (II)  $\sigma = 0.4948, \rho = 3.6$ : 一个稳定的焦点 $(1.42585, 1.92801)$ ; (III)  $\sigma = 0.375, \rho = 2.037$ : 一个鞍点 $(0.08666, 411.217)$ 和一个极限环包含了一个不稳定的焦点 $(1.4156, 5.0517)$ ; (IV)  $\sigma = 1, \rho = 0.1$ : 一个稳定结点 $(0.52461, 277.3685)$ , 一个鞍点 $(1.2371, 59.6167)$ , 一个边界平衡点并且是一个稳定结点 $(1.603, 0)$ .

由系统(2)的分支图可知, 随着免疫效应细胞的外部控制项的增加, 正平衡点的个数由三个逐渐变为一个(只剩一个Hopf分支点), 这表示肿瘤细胞和免疫效应细胞出现了周期性共存.

## 5. 总结

在本文中, 我们主要研究了刻画肿瘤细胞和免疫效应细胞的二维癌症模型的动力学行为, 得到

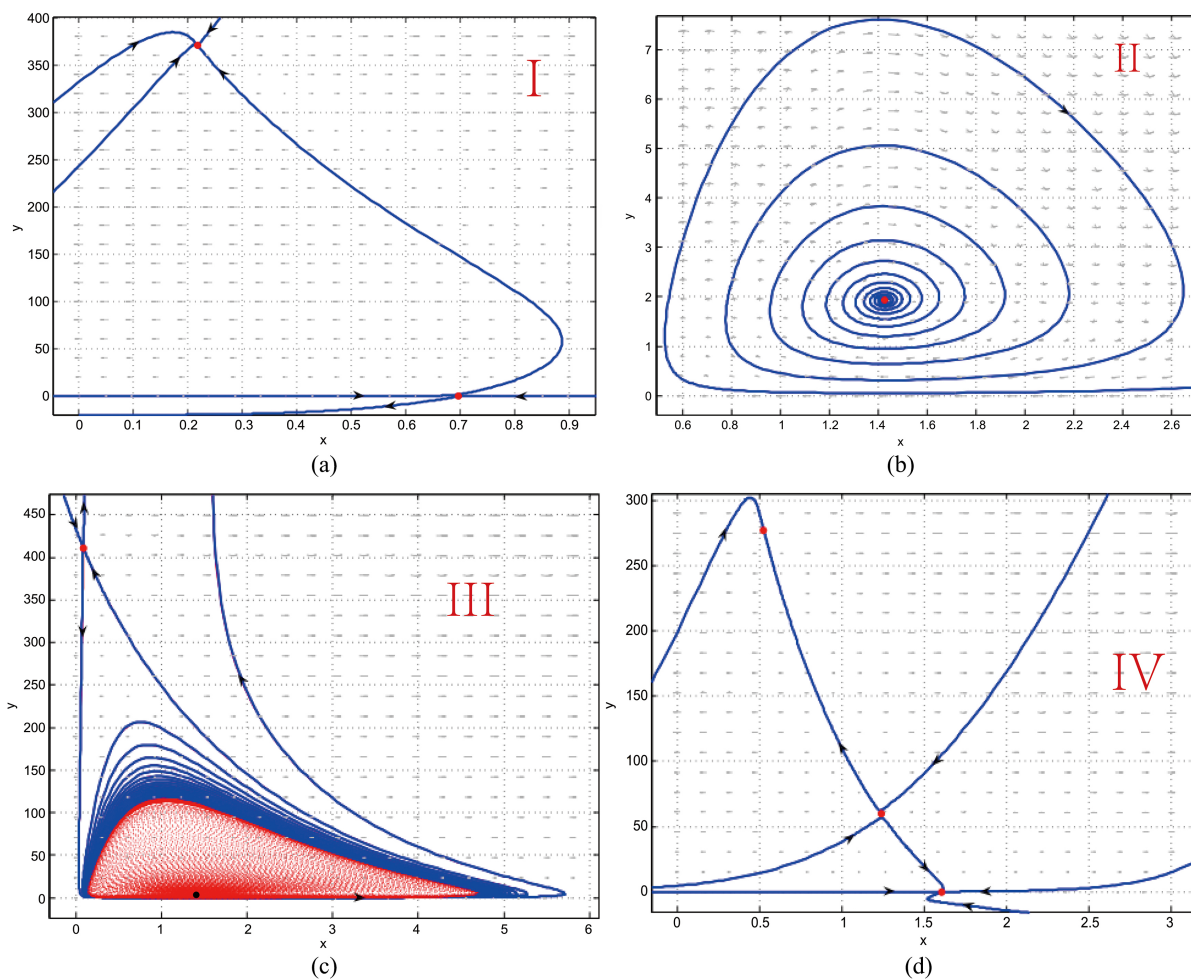


Figure 4. The phase portraits of  $I - IV$  in Figure 3  
 图 4. 图 3 中区域  $I - IV$  的相图

了平衡点的个数和类型, 余维2的Hopf 分支, 余维2的鞍结分支和BT 分支. 最后通过数值模拟验证了所得结论. 值得一提的是, 由于癌症模型的动力学行为极其复杂, 我们得到的理论和数值模拟结果并不太令人满意, 需要在今后的研究工作中继续努力.

### 参考文献

[1] Khajanchi, S. and Ghosh, D. (2015) The Combined Effects of Optimal Control in Cancer Remission. *Applied Mathematics and Computation*, **271**, 375-388.  
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.09.012>

[2] Zhang, Z., Huang, W. and Dong, Z. (1992) *Qualitative Theory of Differential Equations*. Peking University Press, Beijing.

- 
- [3] Doedel, E.J., Fairgrieve, T.F., Sandstede, B., Champneys, A.R., Kuznetsov, Y.A. and Wang, X. (2007) Auto-07p: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations. US. [https://xueshu.baidu.com/usercenter/paper/show?paperid=3dfceed0faf42fa33cd5cec3c728e459&site=xueshu\\_se](https://xueshu.baidu.com/usercenter/paper/show?paperid=3dfceed0faf42fa33cd5cec3c728e459&site=xueshu_se)
- [4] Kuznetsov, V.A., Makalkin, I.A., Taylor, M.A. and Perelson, A.S. (1994) Nonlinear Dynamics of Immunogenic Tumors: Parameter Estimation and Global Bifurcation Analysis. *Bulletin of Mathematical Biology*, **56**, 295-321. <https://doi.org/10.1007/BF02460644>
- [5] Fan, S. (1989) A New Extracting Formula and a New Distinguishing Means on the One Variable Cubic Equation. *Natural Science Journal of Hainan Teachers College*, **2**, 91-98.

## 附录

本部分给出了文中证明过程中用到的一些基本概念和定理.

定理4[盛金公式 [5]]一元三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (29)$$

的重根判别式为:

$$\begin{cases} A = b^2 - 3ac, \\ B = bc - 9ad, \\ C = c^2 - 3bd. \end{cases} \quad (30)$$

其总判别式为:

$$\Delta = B^2 - 4AC. \quad (31)$$

当  $A = B = 0$  时, 则盛金公式I为:

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a} = -\frac{c}{b} = -\frac{3d}{c}. \quad (32)$$

当  $\Delta = B^2 - 4AC > 0$  时, 则盛金公式II为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - (\sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2})}{3a}, \\ x_{2,3} = \frac{-b + (\frac{1}{2}(\sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{3i}(\sqrt[3]{Y_1} - \sqrt[3]{Y_2}))}{3a}, \end{cases} \quad (33)$$

其中

$$Y_{1,2} = Ab + \frac{3a}{2} (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}),$$

$$i^2 = -1.$$

当  $\Delta = B^2 - 4AC = 0$  时, 盛金公式III为:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{a} + K, \\ x_2 &= x_3 = -\frac{K}{2}, \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$K = \frac{B}{A}, (A \neq 0).$$

当 $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ 时, 盛金公式IV为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - 2\sqrt{A} \cos \frac{\theta}{3}}{3a}, \\ x_{2,3} = \frac{-b + \sqrt{A} (\cos \frac{\theta}{3} \pm \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3})}{3a}, \end{cases} \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos T, \\ T &= \frac{2Ab - 3aB}{2\sqrt{A^3}} (A > 0, -1 < T < 1). \end{aligned}$$

**定理5**[盛金定理 [5]]一元三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (36)$$

的重根判别式为:

$$\begin{cases} A = b^2 - 3ac, \\ B = bc - 9ad, \\ C = c^2 - 3bd, \end{cases} \quad (37)$$

其总判别式为:

$$\Delta = B^2 - 4AC. \quad (38)$$

盛金定理在不同的参数条件下, 可分为如下定理:

**盛金定理1:**当 $A = B = 0$ 时, 若 $b = 0$ , 则必定有 $c = d = 0$ (此时, 方程有一个三重实根0, 盛金公式I仍成立).

**盛金定理2:**当 $A = B = 0$ 时, 若 $b \neq 0$ , 则必定有 $c \neq 0$ (此时, 适用盛金公式I解题).

**盛金定理3:**当 $A = B = 0$ 时, 则必定有 $C = 0$ (此时, 适用盛金公式I解题).

**盛金定理4:**当 $A = 0$ 时, 若 $B \neq 0$ , 则必定有 $\Delta > 0$ (此时, 适用盛金公式II解题).

**盛金定理5:**当 $A < 0$ 时, 则必定有 $\Delta > 0$ (此时, 适用盛金公式II解题).

**盛金定理6:**当 $\Delta = 0$ 时, 若 $A = 0$ , 则必定有 $B = 0$ (此时, 适用盛金公式I解题).

**盛金定理7:**当 $\Delta = 0$ 时, 若 $B \neq 0$ , 盛金公式III一定不存在 $A \leq 0$ 的值(此时, 适用盛金公式III解题).

**盛金定理8:**当 $\Delta < 0$ 时, 盛金公式IV一定不存在 $A \leq 0$ 的值(此时, 适用盛金公式IV解题).

**盛金定理9:**当 $\Delta < 0$ 时, 盛金公式IV一定不存在 $T \leq -1$ 或 $T \geq 1$ 的值, 即 $T$ 必满足 $-1 < T < 1$ .

**定理6**[Zhang *et al.* [2]]对于系统

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y) \frac{dy}{dt} = y + Q_2(x, y), \quad (39)$$



我们假设 $O(0, 0)$ 是系统(39)的一个孤立临界点,  $S_\delta(O)$ 是 $O(0, 0)$ 附近一个充分小的邻域, 而 $P_2, Q_2$ 是不小于2阶的 $S_\delta(O)$ 中的解析函数. 因此, 对于足够小的 $\delta$ , 存在一个解析函数 $\Phi(x)$ 满足

$$\Phi(x) + Q_2(x, \Phi(x)) \equiv 0, |x| < \delta.$$

令

$$\Psi(x) = P_2(x, \Phi(x)) = a_m x^m + [x]_{m+1},$$

其中,  $a_m \neq 0, m \geq 2$ . 则有如下一些性质.

1. 如果 $m$ 为奇数, 且 $a_m > 0$ , 则 $O(0, 0)$ 是一个不稳定的结点.
2. 如果 $m$ 为奇数, 且 $a_m < 0$ , 则 $O(0, 0)$ 是一个鞍点, 它的四个分隔线沿 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi,$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 方向分别趋于 $O(0, 0)$ .
3. 如果 $m$ 为偶数, 则 $O(0, 0)$ 为鞍结点. 即 $S_\delta(O)$ 被两个分隔线分为两部分, 它们沿着 $y$ 的正半轴和 $y$ 的负半轴趋向于 $O(0, 0)$ . 一部分是抛物型扇区, 另一部分是由两个双曲型扇区组成. 此外, 如果 $a_m > 0$ (或 $< 0$ ), 则抛物面扇区在右(或左)半平面上.