Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(8), 3566-3575
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.128355

广义*Nekrasov*矩阵新的判定条件

黄　琦，庹　清[*]，朱开心

吉首大学数学与统计学院，湖南　吉首

收稿日期：2023年7月16日；录用日期：2023年8月6日；发布日期：2023年8月16日

摘　要

广义*Nekrasov*矩阵是一类应用广泛的特殊矩阵。本文主要研究*Nekrasov*矩阵的判定问题，通过构造新的放缩因子，从而给出了一组新的广义*Nekrasov*矩阵的判定条件，推广和改进了已有的结果，并用数值算例说明改进后方法的优越性。

关键词

广义*Nekrasov*矩阵，弱*Nekrasov*矩阵，判定条件

New Decision Conditions for Generalized *Nekrasov* Matrix

Qi Huang, Qing Tuo[*], Kaixin Zhu

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jul. 16th, 2023; accepted: Aug. 6th, 2023; published: Aug. 16th, 2023

Abstract

Generalized *Nekrasov* matrices are a kind of special matrices which are widely used. This paper mainly studies the *Nekrasov* matrices decision problem. In this paper, a new set of iterative decision conditions for generalized *Nekrasov* matrices are given by constructing new reduction factors. The existing results are extended and improved, and the superiority of the improved method is illustrated by numerical examples.

Keywords

Generalized *Nekrasov* Matrix, Weak *Nekrasov* Matrix, Decision Condition

[*]通讯作者。

文章引用: 黄琦, 庹清, 朱开心. 广义 Nekrasov 矩阵新的判定条件[J]. 应用数学进展, 2023, 12(8): 3566-3575.
DOI: 10.12677/aam.2023.128355

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

近年来，广义 *Nekrasov* 矩阵是矩阵理论，经济数学，数值分析等众领域有广泛应用的一类重要特殊矩阵，因此，判定一个矩阵是否为广义 *Nekrasov* 矩阵有着重要的意义。许多学者对广义 *Nekrasov* 矩阵判定条件的研究已经取得诸多研究成果(见文[1]-[10])。其中，文[2]分别从构造新的递进判别系数和二次划分指标集这两种不同的思路出发，提出了判定广义 *Nekrasov* 矩阵的新方法；文[3]通过构造特殊的正对角矩阵，采用对非占优行区间的划分判定的方法，得到了广义 *Nekrasov* 矩阵的一类判别法；文[5]引入了参数 p，为判定条件构造了小于 1 的迭代递进系数，从而拓宽了判定范围；文[4]改进了文[3]的主要结论，利用不同的划分方式对非占优行下指标集进行划分，构造特殊的正对角矩阵，结合不等式的放缩技巧，给出了新的判定条件和迭代算法，使得对矩阵进行判定所需的迭代次数较少。本文从矩阵的元素出发，通过构造新的放缩因子，进而给出新的广义 *Nekrasov* 矩阵判定条件，改进了文[4]的主要结果，并用数值方法说明了该判定方法的优越性和实用性。

用表示 n 阶复方阵集，$\langle n\rangle=\{1,2,\cdots,n\}$ 为自然数集，设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，记

$$R_1\left(A\right)=\sum_{j>1}\left|a_{1j}\right|,\left(j\in\langle n\rangle\right),$$

$$R_i\left(A\right)=\sum_{j<i}\left|a_{ij}\right|\frac{R_j\left(A\right)}{\left|a_{jj}\right|}+\sum_{j>i}\left|a_{ij}\right|,\left(2\le i\le n,j\in\langle n\rangle\right).$$

$$l_1\left(A\right)=0,l_i\left(A\right)=\sum_{j<i}\left|a_{ij}\right|\frac{R_j\left(A\right)}{\left|a_{jj}\right|},\left(2\le i\le n,j\in\langle n\rangle\right).$$

将 $\langle n\rangle=\{1,2,\cdots,n\}$ 进行划分，并按照矩阵的行下标区域所满足的条件进行划分

$$N_1=\left\{i\in\langle n\rangle:0<\left|a_{ii}\right|\le R_i\left(A\right)\right\},$$

$$N_2=\left\{i\in\langle n\rangle:\left|a_{ii}\right|>R_i\left(A\right)\right\}.$$

定义 1 [3]设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若 $\forall i\in\langle n\rangle$，都有 $\left|a_{ii}\right|>R_i\left(A\right)$，则称 A 为弱 *Nekrasov* 矩阵，记作 $A\in N^0$；若不等式严格成立，则称 A 为 *Nekrasov* 矩阵，记作 $A\in N$；若存在正对角矩阵 D，使 $AD\in N$，则称 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵，记作 $A\in N^*$。

引理 1 [3]设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若存在 $\tilde{N}_2\subseteq N_2$，$\tilde{N}_1=\langle n\rangle-\tilde{N}_2$，使 $\left(\left|a_{ii}\right|-\alpha_i\right)\left(\left|a_{jj}\right|-\beta_j\right)>\beta_i\alpha_j$，有，其中 $\alpha_i=l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in\tilde{N}_1,\\ t>i}}\left|a_{it}\right|$，$\beta_i=\sum_{\substack{t\in\tilde{N}_2,\\ t>i}}\left|a_{it}\right|$，则 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。

引理 2 [4]设矩阵为 *Nekrasov* 矩阵，则 $\left|a_{ii}\right|\ne 0,\forall i\in\langle n\rangle$。

引理 3 [5]设矩阵为 *Nekrasov* 矩阵，则 $N_2\ne\varnothing$。

引理 4 [6]设矩阵，对矩阵 $B=AD$，若 $D=diag\left\{d_1,d_2,\cdots,d_n\right\}$ 为正对角矩阵，且对 $\forall i\in\langle n\rangle$，当 $d_i\le 1$ 时，有 $l_i\left(B\right)\le l_i\left(A\right)$。

若 N_1 为空集，则 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。若 N_2 为空集，则 A 不是广义 *Nekrasov* 矩阵。所以本文假设 N_1，N_2 不为空集，且对角元 $\left|a_{ii}\right|\ne 0$。

2020 年，在文献[4]的定理 2.1 给出了如下结果：

定理 1 [4] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若

$$\left(|a_{ii}|-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in\hat{N}_1^{(1)}\\t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in\hat{N}_2^{(1)}\\t>i}}|a_{it}|\frac{R_t^{(1)}(A)}{|a_{tt}|}\right)\left(R_j(A)-\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{jt}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}\right)$$

$$>\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{it}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}\right)\left(l_j(A)+\sum_{\substack{t\in\hat{N}_1^{(1)}\\t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in\hat{N}_2^{(1)}\\t>j}}|a_{jt}|\frac{R_t^{(1)}(A)}{|a_{tt}|}\right)\forall i\in\hat{N}_1^{(1)},j\in N_2,$$

$$\left(R_i^{(1)}(A)-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in\hat{N}_1^{(1)}\\t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in\hat{N}_2^{(1)}\\t>i}}|a_{it}|\frac{R_t^{(1)}(A)}{|a_{tt}|}\right)\left(R_j(A)-\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{jt}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}\right)$$

$$>\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{it}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}\right)\left(l_j(A)+\sum_{\substack{t\in\hat{N}_1^{(1)}\\t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in\hat{N}_2^{(1)}\\t>j}}|a_{jt}|\frac{R_t^{(1)}(A)}{|a_{tt}|}\right)\forall i\in\hat{N}_2^{(1)},j\in N_2,$$

则 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。

其中

$$\hat{N}_1^{(1)}=\left\{i\in\langle n\rangle\,|\,0<|a_{ii}|\le R_i^{(1)}(A)\right\},\hat{N}_2^{(1)}=\left\{i\in\langle n\rangle\,|\,R_i(A)\ge|a_{ii}|>R_i^{(1)}(A)\right\},$$

$$R_i^{(1)}(A)=l_i(A)+\sum_{\substack{i\in N_1\\t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{i\in N_2\\t>i}}|a_{it}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}.$$

我们对该定理的条件进行改进，得到判定范围更广的新条件。

2. 主要结果

$$r=\max_{i\in N_2}\frac{l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}|a_{it}|+\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{it}|}{|a_{ii}|},$$

$$Q_i(A)=l_i(A)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}|a_{it}|+r\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{it}|,(i\in N_2),$$

$$P_i(A)=l_i(A)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}|a_{it}|+\frac{Q_t(A)}{|a_{tt}|}\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{it}|,\ \delta_{1,i}=\frac{P_i(A)}{|a_{ii}|},(i\in N_2),$$

$$N_1^{(1)}=\left\{i\in N_1\,|\,0<|a_{ii}|\le l_i(A)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right\},N_2^{(1)}=N_1\setminus N_1^{(1)},$$

$$\delta_{2,i}=\frac{|a_{ii}|+l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}|a_{it}|+\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}}{2|a_{ii}|}.$$

定理 2 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$

$$\left(\left|a_{ii}\right|-l_i\left(A\right)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\t>i}}\left|a_{it}\right|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{2,t}\right)\left(\left|a_{jj}\right|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>j}}\left|a_{jt}\right|\delta_{1,t}\right)$$
$$>\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{1,t}\right)\left(l_j\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\t>j}}\left|a_{jt}\right|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\t>j}}\left|a_{jt}\right|\delta_{2,t}\right),\ \forall i\in N_1^{(1)},j\in N_2, \tag{1}$$

$$\left(\left|a_{ii}\right|\delta_{2,i}-l_i\left(A\right)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\t>i}}\left|a_{it}\right|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{2,t}\right)\left(\left|a_{jj}\right|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>j}}\left|a_{jt}\right|\delta_{1,t}\right)$$
$$>\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{1,t}\right)\left(l_j\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\t>j}}\left|a_{jt}\right|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\t>j}}\left|a_{jt}\right|\delta_{2,t}\right),\ \forall i\in N_2^{(1)},j\in N_2, \tag{2}$$

则 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。

证明：若存在某个 j_0 使得 $R_{j_0}\left(A\right)=l_{j_0}\left(A\right)+\sum_{t>i_0}\left|a_{j_0t}\right|=0$，即 $\left|a_{j_0t}\right|=0,t\in\langle n\rangle,t\neq j_0$，则 $\forall i\in N_1^{(1)},j_0\in N_2$，(1) 式两边相等且等于 0，与已知条件矛盾，故对 $\forall j\in N_2$，$R_j\left(A\right)=l_j\left(A\right)+\sum_{t>j}\left|a_{jt}\right|>0$，即 $\left|a_{jt}\right|\neq 0,t\in\langle n\rangle,t\neq j$。

由 r 的定义可知，$0<r<1$，且对于 $\forall i\in N_2$，有 $0<r\le\frac{R_i\left(A\right)}{\left|a_{ii}\right|}<1$，则

$$r\left|a_{ii}\right|\ge l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}\left|a_{it}\right|+\frac{R_t\left(A\right)}{\left|a_{tt}\right|}\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\ge l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}\left|a_{it}\right|+r\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|=Q_i\left(A\right),$$

故 $0<\frac{Q_i\left(A\right)}{\left|a_{ii}\right|}\le r<1$，再由 $P_i\left(A\right)$ 的定义

$$0<\frac{P_i\left(A\right)}{\left|a_{ii}\right|}\le\frac{Q_i\left(A\right)}{\left|a_{ii}\right|}\le r<1, \tag{3}$$

则 $\forall i\in N_2$，$0<\delta_{1,i}=\frac{P_i\left(A\right)}{\left|a_{ii}\right|}<1$。

对于 $\forall i\in N_2^{(1)}$，有 $\left|a_{ii}\right|>l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}\left|a_{it}\right|+\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{1,t}$，

$$\delta_{2,i}-1=\frac{\left|a_{ii}\right|+l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}\left|a_{it}\right|+\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{1,t}}{2\left|a_{ii}\right|}-1=\frac{1}{2}+\frac{l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}\left|a_{it}\right|+\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{1,t}}{2\left|a_{ii}\right|}-1$$
$$=\frac{l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}\left|a_{it}\right|+\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{1,t}}{2\left|a_{ii}\right|}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{l_i\left(A\right)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\t>i}}\left|a_{it}\right|+\sum_{\substack{t\in N_2,\\t>i}}\left|a_{it}\right|\delta_{1,t}}{\left|a_{ii}\right|}-1\right)<0,$$

$$\delta_{2,i}-\frac{l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\ t>i}}|a_{it}|+\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}}{|a_{ii}|}=\frac{|a_{ii}|+l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\ t>i}}|a_{it}|+\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}-2\left(l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\ t>i}}|a_{it}|+\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)}{2|a_{ii}|}$$

$$=\frac{|a_{ii}|-\left(l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\ t>i}}|a_{it}|+\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)}{2|a_{ii}|}>0,$$

所以对于 $\forall i\in N_2^{(1)}$，有 $0<\frac{l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\ t>i}}|a_{it}|+\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}}{|a_{ii}|}<\delta_{2,i}<1$。

再由式(1)和(2)，有

$$|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{1,t}>0,\forall j\in N_2, \tag{4}$$

$$|a_{ii}|-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}>0,\forall i\in N_1^{(1)}, \tag{5}$$

$$|a_{ii}|\delta_{2,i}-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}>0,\forall i\in N_2^{(1)}. \tag{6}$$

构造正对角矩阵 $X=diag(x_1,x_2,x_3)$，其中

$$x_i=\begin{cases}1 & i\in N_1^{(1)},\\ \delta_{2,i} & i\in N_2^{(1)},\\ \delta_{1,i} & i\in N_2,\end{cases}$$

易知，对任意的 $i\in\langle n\rangle$，都有 $x_i\le 1$，所以 X 为正对角矩阵，记 $B=AX=(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ij}x_j,(i,j\in\langle n\rangle)$。由引理 4 知，对任意的 $i\in\langle n\rangle$，都有 $l_i(B)\le l_i(A)$，$\forall i\in\langle n\rangle$。

设 $\tilde{N}_2=\{j\in\langle n\rangle:|b_{jj}|>R_j(B)\}$，若 $\tilde{N}_2=\varnothing$，则

$$|a_{ii}|\le l_i(B)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}+\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t},\forall i\in N_1^{(1)}, \tag{7}$$

$$|a_{ii}|\delta_{2,i}\le l_i(B)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}+\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t},\forall i\in N_2^{(1)}, \tag{8}$$

$$|a_{ii}|\delta_{1,i}\le l_i(B)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}+\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t},\forall i\in N_2. \tag{9}$$

由 $l_i(B)\le l_i(A)$，$\forall i\in\langle n\rangle$ 及不等式(7)，(8)，(9)得

$$|a_{ii}|-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\le\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t},\forall i\in N_1^{(1)}, \tag{10}$$

$$|a_{ii}|\delta_{2,i}-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\le\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t},\forall i\in N_2^{(1)}, \tag{11}$$

$$|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{1,t}\le l_j(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)},\\ t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)},\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{2,t},\forall j\in N_2, \tag{12}$$

由式(4)，(5)和式(10)，(12)可得

$$\begin{aligned}&\left(|a_{ii}|-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\right)\left(|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{1,t}\right)\\ &\le\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)\left(l_j(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{2,t}\right),\ \forall i\in N_1^{(1)},j\in N_2,\end{aligned} \tag{13}$$

由式(4)，(6)和(11)，(12)可得

$$\begin{aligned}&\left(|a_{ii}|\delta_{1,i}-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\right)\left(|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{1,t}\right)\\ &\le\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)\left(l_j(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{2,t}\right),\ \forall i\in N_2^{(1)},j\in N_2,\end{aligned} \tag{14}$$

式(13)，(14)分别与条件(1)，(2)矛盾，故 $\tilde{N}_2\ne\varnothing$ 。

对 $\forall i\in N_1^{(1)}\subseteq N_1, j\in N_2$ ，由式(1)得

$$\begin{aligned}&\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right)\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right)\\ &=\left(|a_{ii}|-l_i(B)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\right)\left(|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{jt}|\delta_{1,t}\right)\\ &\ge\left(|a_{ii}|-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\right)\left(|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{jt}|\delta_{1,t}\right)\\ &>\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)\left(l_j(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{2,t}\right)\\ &\ge\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)\left(l_j(B)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{2,t}\right)\\ &>\beta_i(B)\alpha_j(B).\end{aligned}$$

对 $\forall i \in N_2^{(1)} \subseteq N_1, j \in N_2$，由式(2)得

$$
\begin{aligned}
&\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right)\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right)\\
&=\left(|a_{ii}|\delta_{2,i}-l_i(B)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\right)\left(|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{1,t}\right)\\
&\geq\left(|a_{ii}|\delta_{2,i}-l_i(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}\right)\left(|a_{jj}|\delta_{1,j}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{1,t}\right)\\
&>\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)\left(l_j(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{2,t}\right)\\
&\geq\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}\right)\left(l_j(B)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>j}}|a_{jt}|\delta_{2,t}\right)\\
&>\beta_i(B)\alpha_j(B).
\end{aligned}
$$

综上所述，对 $\forall i \in N_1, j \in N_2$，有 $\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right)\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right)>\beta_i(B)\alpha_j(B)$。由引理 1 可得 $B\in N$，所以 $A\in N^*$，即 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。

定理 2：设矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 $\forall i\in N_1^{(1)}$，存在 $t\in N_2^{(1)}$，使得 $|a_{it}|\neq 0$，且满足

$$|a_{ii}|>l_i(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)},\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}+\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}, \tag{15}$$

则 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。

证明：由定理 2 的证明可得 $\forall i\in N_2$，$0<\delta_{1,i}<1$，$\forall i\in N_2^{(1)}$，有 $0<\dfrac{l_i(A)+\sum\limits_{\substack{t\in N_1,\\ t>i}}|a_{it}|+\sum\limits_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}}{|a_{ii}|}<\delta_{2,i}<1$。

构造正对角矩阵 $D=diag(d_1,d_2,d_3)$，其中

$$d_i=\begin{cases}1 & i\in N_1^{(1)},\\ \delta_{2,i} & i\in N_2^{(1)},\\ \delta_{1,i} & i\in N_2.\end{cases}$$

易知，对任意的 $i\in\langle n\rangle$，都有 $d_i\leq 1$，所以 D 为正对角矩阵，记 $B=AD=(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ij}d_j$。由引理 4 知，对任意的 $i\in\langle n\rangle$，都有 $l_i(B)\leq l_i(A)$，下证 $B\in N$。

对 $\forall i\in N_1^{(1)}$，由式(15)得

$$|b_{ii}|=|a_{ii}|>l_i(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}+\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}=R_i(B).$$

对 $\forall i\in N_2$，由式(3)得

$$|b_{ii}|=\delta_{1,i}|a_{ii}|=P_i(A)=l_i(A)+\sum_{\substack{t\in N_1,\\ t>i}}|a_{it}|+\frac{Q_i(A)}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|>l_i(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{2,t}+\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{it}|\delta_{1,t}=R_i(B).$$

对 $\forall i \in N_2^{(1)}$，有

$$|b_{ii}| = |a_{ii}|\delta_{2,i} > \frac{l_i(A) + \sum\limits_{\substack{t \in N_1, \\ t>i}} |a_{it}| + \sum\limits_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{1,t}}{|a_{ii}|} |a_{ii}| > l_i(A) + \sum_{\substack{t \in N_1^{(1)} \\ t>i}} |a_{it}| + \sum_{\substack{t \in N_2^{(1)} \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{2,t} + \sum_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{1,t} = R_i(B).$$

综上所述，对 $i \in \langle n \rangle$，都有 $R_i(B) < |b_{ii}|$，所以 $B \in N$，故 $A \in N^*$，即 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。

注 1：对任意的 $i \in N_2$，都有 $0 < \delta_{1,i} \le \frac{R_i(A)}{|a_{ii}|} < 1$；同时对任意 $i \in N_2^{(1)}$，都有 $0 < \frac{l_i(A) + \sum\limits_{\substack{t \in N_1, \\ t>i}} |a_{it}| + \sum\limits_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{1,t}}{|a_{ii}|} < \delta_{2,i} < 1$，故相较于定理 1 来说，本文将非占优行区间快速缩小，同时将 $\delta_{2,i}$ 进行放大，逆向对非占有行进一步细分，获得了更加简捷快速的判定条件。后面的数值算例说明其判定范围优于定理 1。

注 2：由定理 2 的证明过程可得 $|a_{jj}|\delta_{1,j} - \sum\limits_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{jt}|\delta_{1,t} > 0, \forall j \in N_2$，令

$$\mu = \max_{j \in N_2} \frac{l_j(A) + \sum\limits_{\substack{t \in N_1^{(1)} \\ t>j}} |a_{jt}| + \sum\limits_{\substack{t \in N_2^{(1)} \\ t>j}} |a_{jt}|\delta_{2,t}}{|a_{jj}|\delta_{1,j} - \sum\limits_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{jt}|\delta_{1,t}}$$

$$= \max_{j \in N_2} \frac{l_j(A) + \sum\limits_{\substack{t \in N_1^{(1)} \\ t>j}} |a_{jt}| + \sum\limits_{\substack{t \in N_2^{(1)} \\ t>j}} |a_{jt}|\delta_{2,t}}{l_j(A) + \sum\limits_{\substack{t \in N_1^{(1)} \\ t>j}} |a_{jt}| + \sum\limits_{\substack{t \in N_2^{(1)} \\ t>j}} |a_{jt}|\delta_{2,t} + \left(\frac{Q_t(A)}{|a_{tt}|} - \delta_{1,t}\right) \sum\limits_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{jt}|}.$$

易知 $0 < \mu \le 1$，由式(1)和式(2)得

$$|a_{ii}| > l_i(A) + \sum_{\substack{t \in N_1^{(1)} \\ t>i}} |a_{it}| + \sum_{\substack{t \in N_2^{(1)} \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{2,t} + \mu \sum_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{1,t}, \ \forall i \in N_1^{(1)},$$

$$\delta_{2,t}|a_{ii}| > l_i(A) + \sum_{\substack{t \in N_1^{(1)} \\ t>i}} |a_{it}| + \sum_{\substack{t \in N_2^{(1)} \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{2,t} + \mu \sum_{\substack{t \in N_2, \\ t>i}} |a_{it}|\delta_{1,t}, \ \forall i \in N_2^{(1)},$$

则定理 2 改进了文献[3]的定理 1。

3. 数值算例

例 1

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 20 & 0.1 & 0.1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 20 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 8 & 1 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 3 & 2 \\ 1.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

经过 Matlab 程序计算，可得，根据定理 1，$N_1^{(1)}=\varnothing$，$N_2^{(1)}=\{1\}$，$R_1^{(1)}=1.0856$，$i=1$，$j=7$ 时，

$$\left(R_1^{(1)}(A)-l_1(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>1}}|a_{1t}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>1}}|a_{1t}|\frac{R_t^{(1)}(A)}{|a_{tt}|}\right)\left(R_7(A)-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>i}}|a_{7t}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}\right)=0.1049$$

$$=\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>1}}|a_{1t}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}\right)\left(l_7(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>7}}|a_{jt}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>7}}|a_{7t}|\frac{R_t^{(1)}(A)}{|a_{tt}|}\right).$$

由上述结果可得，定理 1 无法判定矩阵 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。同样可以验证文献[3]和文献[4]都无法判断矩阵 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵，而定理 2 可以直接判定 A 是广义 *Nekrasov* 矩阵。

可得 $N_1=\{1\}$，$N_2=\{2,3,4,5,6,7\}$，根据定理 2，$N_1^{(1)}=\varnothing$，$N_2^{(1)}=\{1\}$，当 $i=1, j=7$ 时，

$$\left(|a_{11}|\delta_{2,t}-l_1(A)-\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>1}}|a_{1t}|-\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>1}}|a_{1t}|\delta_{2,t}\right)\left(|a_{66}|\delta_{1,6}-\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>6}}|a_{6t}|\delta_{1,t}\right)=0.1973$$

$$>\left(\sum_{\substack{t\in N_2,\\ t>1}}|a_{1t}|\delta_{1,t}\right)\left(l_6(A)+\sum_{\substack{t\in N_1^{(1)}\\ t>6}}|a_{6t}|+\sum_{\substack{t\in N_2^{(1)}\\ t>6}}|a_{6t}|\delta_{2,t}\right)=0.0226,$$

其中正对角矩阵 $X=diag\{0.2173,0.3298,0.1616,0.1771,0.0001,0.0025\}$。

$$B=\begin{bmatrix}2.6518 & 1.3036 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.6630 & 4.3455 & 0.0330 & 0.0162 & 0.5314 & 0 & 0\\ 1.9889 & 0.8691 & 6.5970 & 0 & 0.1762 & 0.00012 & 0\\ 0 & 0.0217 & 0.3298 & 1.2930 & 0.1771 & 0.0001 & 0.0025\\ 0 & 0 & 0.3298 & 0.4849 & 1.4270 & 0.0037 & 0.005\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0025 & 0.0025\\ 0 & 0 & 0.0660 & 0 & 0 & 0 & 0.0744\end{bmatrix}.$$

例 2

$$A=\begin{bmatrix}40 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 1 & 30 & 9 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 30 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 9\\ 0 & 2 & 0 & 30 & 12 & 7 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 4 & 39 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 10 & 2 & 0 & 6\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0.1 & 0 & 6 & 30 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 29\end{bmatrix}.$$

经过 *Matlab* 计算，可得 $N_1=\{1\}$，$N_2=\{2,3,4,5,6,7\}$，根据定理 2，有 $N_1^{(1)}=\varnothing$，$N_2^{(1)}=\{6,7\}$，当 $i=6, j=8$ 时，不满足定理 1 的条件，但是利用本文定理 2 可以判断矩阵 A 为广义 *Nekrasov* 矩阵。

4. 结论

通过进行数值实验，可以得出定理 2 对广义 *Nekrasov* 矩阵的判定范围比定理 1 更加广泛，故本文给出的主要判定条件改进了现有的结果。

致　谢

感谢庹清老师对本文章的悉心指导。

基金项目

国家自然科学基金项目(11461027)；湖南省研究生科研创新项目(CX20231071)。

参考文献

[1] Li, W. (1998) On Nekrasov Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **281**, 87-96. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10031-9

[2] 苏安兵, 刘建州, 丁碧文. 广义 Nekraosv 矩阵的新判定方法[J]. 数学理论与应用, 2016, 36(4): 1-7.

[3] 郭爱丽. 广义 Nekrasov 矩阵的判别法[J]. 贵州工程应用技术学院学报, 2018, 36(3): 69-74.

[4] 郭爱丽, 左建军. 广义 Nekrasov 矩阵的判别法及其迭代算法[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2020, 35(3): 356-366.

[5] 王银燕, 徐仲, 陆全. 广义 Nekrasov 矩阵的实用判定准则[J]. 数值计算与计算机应用, 2014, 35(3): 171-180.

[6] 郭爱丽, 何颖子. 广义 Nekrasov 矩阵的迭代算法[J]. 贵州工程应用技术学院学报, 2021, 39(3): 7-12.

[7] 石玲玲. 广义 Nekrasov 矩阵的判定条件[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(24): 264-269.

[8] Pang, M. and Li, Z. (2003) Generalized Nekrasov Matrices and Applications. *Journal of Computational Mathematics*, **2003**, 183-188.

[9] Wang, Y. and Gao, L. (2019) An Improvement of the Infinity Norm Bound for the Inverse of {P1, P2}-{P1, P2}-Nekrasov Matrices. *Journal of Inequalities and Applications*, **2019**, 1-12. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2134-3

[10] 张劲松, 李红. 广义严格对角占优矩阵的几个判定条件[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(3): 181-185.