Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(7), 3268-3276
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127326

碰撞动力学方程导出分数阶扩散极限的方法研究

郭文雅

成都理工大学数理学院，四川 成都

收稿日期：2023年6月18日；录用日期：2023年7月13日；发布日期：2023年7月24日

摘 要

碰撞动力学方程(Boltzmann方程)是描述物质中微观粒子运动的重要方程，该方程中包含微观粒子之间的碰撞过程，因此可以用来研究物质中的输运现象。当物质中微观粒子(如分子或粒子)的运动呈现出一定的长时间规律且不满足Fick扩散定律时，我们就会遇到分数阶扩散的现象。通常情况下，此时我们可以通过碰撞动力学方程推导出分数阶扩散的极限。本文将探究对碰撞动力学方程的缩放方程的估计进而导出分数阶扩散极限来实现导出分数阶扩散极限。

关键词

Boltzmann方程，碰撞动力学方程，反常扩散极限

Research on the Method of Deriving Fractional Diffusion Limits from Collision Dynamics Equations

Wenya Guo

College of Mathematics and Physics, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Jun. 18th, 2023; accepted: Jul. 13th, 2023; published: Jul. 24th, 2023

文章引用: 郭文雅. 碰撞动力学方程导出分数阶扩散极限的方法研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(7): 3268-3276.
DOI: 10.12677/aam.2023.127326

Abstract

The Boltzmann equation of collision dynamics is an important equation for describing the motion of microscopic particles, which includes microscopic particles. The collision process between particles can be used to study the Transport phenomenon. When the transport of microscopic particles (such as molecules or particles) exhibit a certain long-term pattern and does not satisfy Fick's diffusion law, we will encounter the phenomenon of fractional diffusion. Normally, at this point, we can derive the limit of fractional diffusion through the collision dynamics equation. This article will explore the scaling equation for collision dynamics equations. The estimation is then used to achieve the derivation of fractional diffusion limits.

Keywords

Boltzmann Equation, Collisional Kinetic Equations, Anomalous Diffusion Limit

1. 引言

随着科学与工程技术的发展，气体动理学在稀薄气体动力学、超新星核爆炸、惯性约束核聚变、微流、等离子等众多高科技领域中受到越来越多的关注 [1–7]。关于从气体分子动理学方程推导出各种流体力学方程的这一课题，可以追溯到Maxwell [8–10]和Boltzmann [11–13]的工作，他们的研究表明Boltzmann方程与流体力学方程有着紧密的联系。Boltzmann方程能够解释热力学的原子论本质，能够预测稀薄气体的动理学行为，同样在统计物理、微电机系统、页岩气开发和航空航天中都有着重要的应用 [14]。在碰撞动力学方程中，分子间的反弹和相互作用被考虑在内，它能够描述分子之间的长程相关性和非平衡态下的涨落等效应，从而描述一些非高斯扩散过程，如分数阶扩散过程。

在碰撞动力学方程中，我们可以使用分数阶微积分的方法来描述非高斯扩散。具体来说，我们可以引入分数阶时间导数和空间导数来描述分子的运动过程，从而导出一个分数阶微分方程。通过对该方程的求解，我们可以得到反常扩散的极限。具体的导出方法，一般需要使用表观

速度法(mesoscopic velocity approach)、扩散极限法(diffusion limit approach)或者矩量法(moment method)等技巧。总体而言，碰撞动力学方程结合分数阶微积分的方法可以用来描述许多的非高斯扩散过程，具有很高的应用价值。它在物理化学、生物物理、材料科学等领域中有着广泛的应用。近年来有多篇研究使用表观速度法研究了碰撞动力学方程导出的反常扩散极限问题。Carrillo使用表观速度法和弱收敛理论研究了一类随机微分方程的极限行为，给出了弱收敛和局部极限定理，并证明了在反常扩散条件下，该类方程可以在适当条件下趋于热方程 [15]。Jepps等人在文献 [16]使用分数阶导数理论和表观速度法，研究了随机微分方程的反常扩散极限。研究结果表明，随机微分方程中的一种延迟随机势能，可以导致系统出现反常扩散。Arizmendi等人利用表观速度法和非平衡统计力学理论，对一类高度不稳定或非理想系统中的玻尔兹曼方程进行建模，并得到了该系统中的转移密度函数。研究发现该转移密度函数的形式可以用于描述该系统的反常扩散现象 [17]。在适当的尺度和平衡速率分布下，我们知道碰撞动力学方程的渐近方程可以得到反常扩散极限。Mellet采用扩散极限法分析Boltzmann方程的解析解满足适当的缩放方程，进而研究缩放方程可以导出分数阶扩散极限 [18]；在其另一篇文献中采用矩量法进行研究，引入辅助函数进而来导出分数阶扩散极限 [19]。Bobylev主要研究了Maxwell分子的非线性空间均匀Boltzmann方程的理论，采用扩散极限法探讨了具有不同初值条件的初始值问题的解的存在性和唯一性 [20]。Pareschi涉及到碰撞动力学方程的矩量法和反常扩散的研究，并提供了一些重要的理论结果和数值模拟方法，考虑了一维弹性碰撞Maxwell分子气体的Boltzmann方程，该方程在某些情况下存在具有α稳定性的非高斯解，这些解的特点是具有重尾和轻尾，在一定范围内，这些重尾分布的自相似性依然保持着，而在无穷远距离处，这些分布将指数级地衰减 [21]。在本文中主要讨论碰撞方程导出反常扩散极限中常见的扩散极限法。

2. 研究内容

碰撞动力学方程描述的是带有碰撞项的输运过程，具有非线性和非平衡特性。该方程是微观和宏观之间的桥梁，可以用来研究多种物理系统的输运行为，例如气体、液体和等离子体。对于一些特定的情况，如弱碰撞和小偏离平衡态，碰撞动力学方程可以通过扩散限制或扩散极限的方法来简化，并且可以构建用于描述输运过程的更简单的宏观模型。扩散极限法是碰撞动力学方程形式上的简化方法，适用于气体灌注、微纳米加热和激波前缘等物理问题。该方法在计算和分析过程中考虑了扩散过程，并忽略了碰撞项，因此得到的结果与Fick 定律相似。扩散极限法主要包括Chapman-Enskog 展开和Burnett 展开两种方法，其中Chapman-Enskog 展开在二维或三维的情况下更适用，而Burnett 展开更适用于高维情况。与扩散极限法不同，矩量法是描述输运过程的基本方法之一，它通过计算输运矩量（动量、能量等）的时间演化方程来描述输运过程。该方法在计算和分析过程中考虑了碰撞项，并且可以在较宽的范围内获得精确的输运模型，因此被广泛应用于天体物理学、等离子体物理学和材料科学等领域。由于矩量法需要计算大量高阶输运矩量的演化方程，因此在实际应用中往往使用数值模拟方法进行求解。

扩散极限法则是利用根据尺度分析的方法，将原方程扩散项的系数设为很小，来简化方程，得到反常扩散的极限问题。需要注意的是，这种方法通常是比较复杂的，需要借助于数值模拟、统计分析等工具来验证所得结论。同时，也需要结合具体的反常扩散模型来进行引用扩散极限法得到的反常扩散极限方程，以保证结果合理可靠。

Boltzmann方程描述了稀疏气体在没有外力情况下产生碰撞，得到的碰撞动力学方程。经典的碰撞动力学方程一般形式为：

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = L(f) \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ f(x,v,0) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{1}$$

该方程描述了气体粒子分布函数$f(x,v,t)$的演化，其中碰撞时间$t \geq 0$，碰撞位置$x \in \mathbb{R}^N$，碰撞速度$v \in \mathbb{R}^N$。$L(f)$为Boltzmann方程的线性碰撞算子，是由碰撞核$\sigma(v,v')$所决定，描述了粒子与周围介质的相互作用，其形式为：

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} [\sigma(v,v')f(v') - \sigma(v',v)f(v)]dv' \tag{2}$$

其中碰撞核$\sigma(v,v')$是非负的，v, v'分别表示粒子碰撞前后的速度。

长时间碰撞演化下，碰撞系统存在唯一正的归一化速率分布平衡函数$F(v)$，并且是关于v的偶函数，即有：

$$F = F(v) > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} F(v) = 1, \quad L(f) = 0$$

在研究当平均自由程极限较小时，极限会产生分数阶反常扩散方程中，引入尺度变量$\theta(\varepsilon^\alpha)(0 < \alpha \leq 2)$:

$$x' = \varepsilon x \quad t' = \theta(\varepsilon)t \tag{3}$$

以及尺度分布函数：

$$f^\varepsilon(x',v',t') = f(x,v,t) \tag{4}$$

其中ε为小参数，也就是平均自由程，将x'，v'，t'代入方程(1)可得：

$$\theta(\varepsilon)\partial_t f^\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = L(f^\varepsilon) \tag{5}$$

从动力学方程(5)推导出扩散型方程是由Birkhoff和Wigner [22]，Bensoussan [23]以及Larsen和Keller [24]最开始研究。

命题1 设碰撞算子满足以下函数形式 [18]：

$$L(f) = \rho F - f, \quad \rho =< f >= \int_{\mathbb{R}^N} f(v)dv \tag{6}$$

其中碰撞核对应于$\sigma(v,v') = F(v)$。若速率分布$F(v) \sim \frac{1}{|v|^{N+\alpha}}$满足幂律重尾分布，当$\varepsilon \to 0$时，$f^\varepsilon$收敛于函数形式$\rho(x,t)F(v)$，这里$\rho(x,t)$是以下分数阶反常扩散方程的解：

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \kappa(-\Delta_x)^{\frac{\alpha}{2}}\rho = 0 \quad (x,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ \rho(x,0) = \rho_0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{7}$$

其中系数κ其表达式可为以下式子。当$\alpha \in (0,2]$时，

$$\kappa = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\omega^2}{1+\omega^2} \frac{k_0}{|\omega|^{N+\alpha}} d\omega \tag{8}$$

式(7)中的分数阶微分算子$(-\Delta_x)^{\frac{\alpha}{2}}$定义如下：

$$(-\Delta_x)^{\frac{\alpha}{2}} \rho(x,t) = c_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho(x,t)-\rho(y,t)}{\|x-y\|^{N+\alpha}} dy \tag{9}$$

其中系数$c_{n,\alpha}$由下式给出：

$$c_{n,\alpha} = \frac{\alpha 2^{\alpha-1} \Gamma(\frac{\alpha+N}{2})}{\pi^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{2-\alpha}{2})} \tag{10}$$

这里$\Gamma(x)$是Gamma函数，即

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \tag{11}$$

在Fourier空间中，我们可以得到(9)式的等价：

$$(-\Delta_x)^{\frac{\alpha}{2}} \rho = \mathcal{F}^{-1}(|k|^\alpha \mathcal{F}(\rho)(k)) \tag{12}$$

其中$\mathcal{F}$表示在空间向量的Fourier变换，在$0 < \alpha \leq 2$时都是成立的。

众所周知，使用扩散极限法导出反常扩散极限先将碰撞动力学方程化为输运方程；对输运方程进行Chapman-Enskog展开，得到连续介质方程；引入扩散极限假设，即假设输运方程在长时间和长距离尺度下可以有效地通过扩散过程描述；对于扩散极限下的连续介质方程，应用标准的扩散方程理论，即Fick扩散方程，来求解反常扩散系数；将反常扩散系数表示为原始的碰撞动力学方程中的物理量的函数。在本文中将介绍使用扩散极限法导出反常扩散极限，采用线性的Boltzmann方程来进行探究其导出的反常扩散极限，过程如下：

步骤一:f^ε的先验估计

方程(5)的解$f^\varepsilon(\theta(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha)$满足以下等式：

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\alpha \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(f^\varepsilon)^2}{2} F^{-1} dv dx &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} L(f^\varepsilon) f^\varepsilon F^{-1} dv dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2N}} [(\rho^\varepsilon)^2 F - (f^\varepsilon)^2 F^{-1}] dv dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{2N}} [f^\varepsilon - \rho^\varepsilon F]^2 F^{-1} dv dx
\end{aligned} \tag{13}$$

在$t \geq 0$时，从上式可以推导出以下两个估计：

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(f^\varepsilon(t,\cdot))^2}{F} dv dx \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{f_0^2}{F} dv dx = \|f_0\|_{L^2(F^{-1})} \tag{14}$$

和

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} [f^\varepsilon - \rho^\varepsilon F]^2 F^{-1} dv dx dt \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \|f_0\|_{L^2(F^{-1})} \tag{15}$$

根据Cauchy-Schwarz不等式可以得出：

$$\rho^{\varepsilon}(t,x)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f^{\varepsilon}}{F^{\frac{1}{2}}}F^{\frac{1}{2}}dv\le\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(f^{\varepsilon})^2}{F}dv\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

和$L(f^{\varepsilon})$的估计一样，$\rho^{\varepsilon}(x,t)$估计的表达式如下：

$$\sup_{t\ge0}\int_{\mathbb{R}^N}(\rho^{\varepsilon}(t,\cdot))^2dx\le\|f_0\|_{L^2(F^{-1})} \tag{17}$$

步骤二：缩放方程进行Laplace-Fourier变换

定义$\widehat{f^{\varepsilon}}$为$f^{\varepsilon}$的Laplace-Fourier变换，且和$f^{\varepsilon}$一样，都是关于$(x,t)$的函数，其定义为：

$$\widehat{f^{\varepsilon}}(p,k,v)=\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty}e^{-pt}e^{-ik\cdot x}f^{\varepsilon}(x,v,t)dxdt \qquad p>0,k\in\mathbb{R} \tag{18}$$

然后与此同时$\widehat{f^{\varepsilon}}$满足下式：

$$\varepsilon^{\alpha}\partial_t\widehat{f^{\varepsilon}}+\varepsilon v\cdot\nabla_x\widehat{f^{\varepsilon}}=L(\widehat{f^{\varepsilon}}) \tag{19}$$

将f^{ε}的Laplace变换式子带入上式推导出：

$$\varepsilon^{\alpha}\rho\widehat{f^{\varepsilon}}-\varepsilon^{\alpha}\widehat{f}_0+\varepsilon iv\cdot k\widehat{f^{\varepsilon}}=<\widehat{f^{\varepsilon}}>F-\widehat{f^{\varepsilon}} \tag{20}$$

其中$\widehat{f}_0$为方程初值f_0的Laplace变换所得的式子。将上式改写为$\widehat{f^{\varepsilon}}$的等式：

$$\widehat{f^{\varepsilon}}=\frac{F}{1+\varepsilon^{\alpha}p+\varepsilon iv\cdot k}\widehat{\rho^{\varepsilon}}+\frac{\varepsilon^{\alpha}\widehat{f}_0}{1+\varepsilon^{\alpha}p+\varepsilon iv\cdot k} \tag{21}$$

其中$\widehat{\rho^{\varepsilon}}$为$\rho^{\varepsilon}$的Laplace-Fourier变换形式，并且满足$\widehat{\rho^{\varepsilon}}(p,k)=<\widehat{f^{\varepsilon}}>(p,k)$。对(21)式子两端进行积分可得：

$$\widehat{\rho^{\varepsilon}}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(v)}{1+\varepsilon^{\alpha}p+\varepsilon iv\cdot k}dv\right)\widehat{\rho^{\varepsilon}}+\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon^{\alpha}\widehat{f}_0}{1+\varepsilon^{\alpha}p+\varepsilon iv\cdot k}dv\right) \tag{22}$$

根据的归一化条件$\int_{\mathbb{R}^N}F(v)dv=1$可以将上式改写为：

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\widehat{f}_0}{1+\varepsilon^{\alpha}p+\varepsilon iv\cdot k}dv+a^{\varepsilon}\widehat{\rho^{\varepsilon}}=0 \tag{23}$$

其中

$$a^{\varepsilon}(p,k)=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int_{\mathbb{R}^N}(\frac{1}{1+\varepsilon^{\alpha}p+\varepsilon iv\cdot k}-1)F(v)dv \tag{24}$$

对于方程(29)的第一个式子，当$\varepsilon\to0$时，

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\widehat{f}_0}{1+\varepsilon^{\alpha}p+\varepsilon iv\cdot k}dv\to\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}_0dv=\widehat{\rho_0} \tag{25}$$

根据假设$f_0\in L^2(F^{-1})$时，可得出$f_0\in L_x^2(L_v^1)$，通过Parseval equality [25]可推导出f_0的Fourier变

换$\widehat{f_0}$也属于$L_x^2(L_v^1)$，意味着$\widehat{f_0}$对于所有的k在v上时可积的。

步骤三：$a^\varepsilon(p,k)$在$\varepsilon \to 0$时的估计

将$a^\varepsilon(p,k)$分解为两部分，对于这两部分分别进行估计。

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(p,k) &= -\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon^\alpha p+\varepsilon iv\cdot k}{1+\varepsilon^\alpha p+\varepsilon iv\cdot k}F(v)dv \\ &= -p\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1+\varepsilon^\alpha p}{(1+\varepsilon^\alpha p)^2+\varepsilon^2(v\cdot k)^2}F(v)dv \\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(\varepsilon v\cdot k)^2}{(1+\varepsilon^\alpha p)^2+\varepsilon^2(v\cdot k)^2}F(v)dv \\ &= d_1^\varepsilon(p,k)+d_2^\varepsilon(p,k) \end{aligned} \tag{26}$$

对于$d_1^\varepsilon(p,k)$，当$\varepsilon \to 0$时，

$$d_1^\varepsilon(p,k) = -p\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1+\varepsilon^\alpha p}{(1+\varepsilon^\alpha p)^2+\varepsilon^2(v\cdot k)^2}F(v)dv \to -p\int_{\mathbb{R}^N}F(v)dv = -p \tag{27}$$

后续将会对$d_2^\varepsilon(p,k)$进行当$\varepsilon \to 0$时的估计，将会采用对积分区间进行划分，分成$|v| \le 1$和$|v| \ge 1$进行探讨，详细参考文献 [18]。

步骤四：总结与概括

将步骤一到三所有估计项代入方程(23)可得：

$$\widehat{\rho_0} + (-p-\kappa|k|^\alpha)\widehat{\rho^\varepsilon} = 0 \tag{28}$$

对于任何$\alpha \in (0,2]$，$p>0$，$k \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$的都处处成立。

从方程(14)有界序列到提取一个子序列，将会得出存在一个$\eta \in L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}))$，以至于$\widehat{\rho^\varepsilon}$弱收敛于$\eta$在$L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}))$。一方面，$\widehat{\rho^\varepsilon}$在$L^\infty(a,\infty;L^2(\mathbb{R}))$是有界的，对于任何$a>0$都成立；另一方面，对于所有的$\varphi=\varphi(t)\in\mathcal{D}(0,\infty)$，它的拉普拉斯变换$\mathcal{L}\varphi$属于$L^1(0,\infty)$，对于所有的$\psi=\psi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，它的Fourier变换$\mathcal{F}\psi$属于$\mathcal{S}(\mathbb{R})$，以至于：

$$<\widehat{\rho^\varepsilon},\varphi\otimes\psi>=<\rho^\varepsilon,\mathcal{L}\varphi\otimes\mathcal{F}\psi>\longrightarrow<\eta,\mathcal{L}\varphi\otimes\mathcal{F}\psi>=<\widehat{\eta},\varphi\otimes\psi>$$

当$\varepsilon\to0$，$\widehat{\rho^\varepsilon}\rightharpoonup\widehat{\eta}$，在$L^\infty(a,\infty;L^2(\mathbb{R}))$上，对于任何$a>0$都成立，则方程(28)可改写为：

$$\widehat{\rho_0} + (-p-\kappa|k|^\alpha)\widehat{\eta} = 0 \tag{29}$$

对于任何的$p\ge0$，$k\in\mathbb{R}^N$都处处成立。最后，ρ是分数阶扩散方程(7)的唯一的解满足：

$$\widehat{\rho_0} + (-p-\kappa|k|^\alpha)\widehat{\rho} = 0 \tag{30}$$

对于任何的$p\ge0$，$k\in\mathbb{R}$都处处成立，同时以至于$\widehat{\eta}=\widehat{\rho}$处处成立，因为Laplace变换和Fourier变换都是一对一的映射，所以$\eta=\rho$。故我们最终可以根据方程(15)推导出$f^\varepsilon\rightharpoonup\rho F$对于任何$T>0$在$L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}))$都成立。

3. 总结

稀薄气体的数学理论已然形成了一个庞大的体系，除了基本的Boltzmann方程外，还有大量动力学模型，本论文仅仅涉猎了冰山一角，这些典型的非线性和非局部微分方程在科学技术中发挥着日益重要的作用，并且已经成为数学物理领域重点研究对象之一。Boltzmann方程本身就是在统计平均意义下推导出来的数学模型，因此用概率测度这一工具进行研究是必然的，文章中采用扩散极限法将线性Boltzmann方程推导至分数阶扩散极限，线性Boltzmann方程中的碰撞算子是我们实现推导至分数阶反常扩散极限的创新之处，若采用非线性算子在推导过程中将不会推导至反常扩散极限，因为线性碰撞算子在采用简洁形式(6)时，是我们实现分数阶扩散极限的基本条件。本文从扩散极限的角度进行切入，采用扩散极限法对碰撞方程的扩散极限进行研究是一种创新性思考，在此基础上，可以进一步探究在外力场下Boltzmann方程的反常扩散极限。

参考文献

[1] Hénon, M. (1982) Vlasov Equation. *Astronomy and Astrophysics: A European Journal*, **114**, 211-212.

[2] Wigner, E.P. (1997) On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. In: Wightman, A.S., Ed., *Part I: Physical Chemistry. Part II: Solid State Physics*, Springer, Berlin, Heidelberg, 110-120. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59033-7_9

[3] Waldeer, K. (2003) The Direct Simulation Monte Carlo Method Applied to a Boltzmann-Like Vehicular Traffic Flow Model. *Computer Physics Communications*, **156**, 1-12. https://doi.org/10.1016/S0010-4655(03)00368-0

[4] Bird, G. (1970) Direct Simulation and the Boltzmann Equation. *Physics of Fluids*, **13**, 2676-2681. https://doi.org/10.1063/1.1692849

[5] 魏金波, 张显文. Boltzmann方程的永久型解[J]. 数学物理学报, 2007, 27(2): 240-247.

[6] 晋守博, 陈攀峰, 孙善辉. 耗散线性Boltzmann方程的解的正则性[J]. 数学物理学报, 2011, 31(6): 1662-1668.

[7] 何雅玲, 王勇, 李庆. 格子Boltzmann方法的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 32-33.

[8] Maxwell, J.C. (1860) Illustrations of the Dynamical Theory of Gases I. *Philosophical Magazine*, **19**, 19-32. https://doi.org/10.1080/14786446008642818

[9] Maxwell, J.C. (1860) Illustrations of the Dynamical Theory of Gases II. *Philosophical Magazine*, **20**, 21-32. https://doi.org/10.1080/14786446008642902

[10] Maxwell, J.C. (1867) On the Dynamical Theory of Gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **157**, 49-88.

[11] Boltzmann, L. (1872) Weitere Studien über das wärmegleichgewicht unter gasmolekülen. *Stizungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien*, **66**, 275-370.

[12] Boltzmann, L. (1875) Über das wärmegleichgewicht Vongasen auf Welche äussere kaäfte wirken. *Stizungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien*, **72**, 427-457.

[13] Boltzmann, L. (1876) Über die aufstellung und integration der gleichungen, welche die molekularbewegungen ingasenbestimmen. *Stizungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien*, **74**, 503-552.

[14] 马志婷. 矩封闭系统的扩散极限[D]: [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2021. https://doi.org/10.27266/d.cnki.gqhau.2021.000115

[15] Bolly, F. and Carrillo, J.A. (2011) Stochastic Mean-Field Limit: Non-Lipschitz Forces and Swarming. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **21**, 2179-2210. https://doi.org/10.1142/S0218202511005702

[16] Jepps, L.G.S., Warwick, P., *et al.* (2000) The Fluctuating Nonlinear Schrödinger Equation: A Stochastic Theory of Anomalous Diffusion. *Physica A*, **283**, 48-67.

[17] Arizmendi, C.M., Ledesma, A., Espinosa, J., *et al.* (2014) Beyond Fick's Laws: Transition Density Functions for Highly Nonideal Systems. *Journal of Chemical Theory and Computation*, **10**, 1801-1810.

[18] Mellet, A., Mischler, S. and Mouhot, C. (2011) Fractional Diffusion Limit for Collisional Kinetic Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **199**, 493-525. https://doi.org/10.1007/s00205-010-0354-2

[19] Mellet, A. (2010) Fractional Diffusion Limit for Collisional Kinetic Equations: A Moments Method. *Indiana University Mathematics Journal*, **59**, 1333-1360. https://doi.org/10.1512/iumj.2010.59.4128

[20] Bobylev, A.V. (1995) The Theory of the Nonlinear Spatially Uniform Boltzmann Equation for Maxwell Molecules. *Physical Review*, **18**, 1-90.

[21] Pareschi, L. and Toscani, G. (2006) Self-Similarity and Decay of Heavy-Tailed Velocity Distributions for the Boltzmann Equation. *Journal of Statistical Physics*, **124**, 747-779. https://doi.org/10.1007/s10955-006-9025-y

[22] Birkhoff, G. and Wigner, E. (1961) Nuclear Reactor Theory, Vol. 11. American Mathematical Society, Providence.

[23] Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicolaou, G.C. (1979) Boundary Layers and Homogenization of Transport Processes. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **15**, 53-157. https://doi.org/10.2977/prims/1195188427

[24] Larsen, E.W. and Keller, J.B. (1974) Asymptotic Solution of Neutron Transport Problems for Small Mean Free Paths. *Journal of Mathematical Physics*, **15**, 75-81. https://doi.org/10.1063/1.1666510

[25] Rubinšteĭn, A.I. (1978) Parseval's Equality. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, **6**, 102-108.