Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(7), 3261-3267**
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127325

求解绝对值方程的一般不精确不动点迭代法

姜壹鑫

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月18日；录用日期：2023年7月13日；发布日期：2023年7月24日

摘 要

不动点迭代法是求解绝对值方程的一种有效方法，为了提高计算效率，在不动点迭代法的基础上，利用矩阵分裂，提出了一种一般形式下的不精确不动点迭代法。在合理的条件下，证明了该方法的收敛性。最后，通过数值例子验证了该方法的有效性和可行性。

关键词

绝对值方程，不动点迭代法，收敛性

A General Inexact Fixed Point Iteration Method for Solving Absolute Value Equation

Yixin Jiang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 18^{th}, 2023; accepted: Jul. 13^{th}, 2023; published: Jul. 24^{th}, 2023

Abstract

The fixed point iteration method is an effective method to solve the absolute value equation. In order to improve the computational efficiency, an inexact fixed point iteration method in general form is proposed by using matrix splitting on the basis of fixed point iteration method. Under reasonable conditions, the convergence of the proposed method

文章引用: 姜壹鑫. 求解绝对值方程的一般不精确不动点迭代法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(7): 3261-3267.
DOI: 10.12677/aam.2023.127325

is proved. Finally, a numerical example is given to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords

Absolute Value Equation, Fixed Point Iteration Method, Convergence

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

绝对值方程是指形如

$$Ax - |x| = b, \tag{1.1}$$

的方程, 其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ 是一个未知向量, $|x|$ 表示 x 各分量绝对值的向量, 即 $|x| = (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)^T$. 特别的, 绝对值方程 (1.1) 是下式广义绝对值方程 [1] 的一种特殊形式

$$Ax - B|x| = b, \tag{1.2}$$

其中 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 在文献 [2–4] 中, 广义绝对值方程也曾被进一步研究.

绝对值方程在科学计算和工程应用等许多领域都有着广泛的应用, 因此, 它受到许多学者的广泛关注并且成为一个热门课题. 近年来, 绝对值方程的求解方法更是层出不穷, 如预处理AOR迭代法 [5], 修正的广义牛顿法 [6], 类SOR迭代法 [7, 8], 不动点迭代法 [9] 等, 为了提高计算效率, 在文献 [10] 中, 利用系数矩阵 A 的位移分裂, 提出了一种位移分裂不动点迭代方法.

在本文中, 基于 A 的一般分裂, 提出了一般的不精确不动点迭代法, 并且研究了该方法的收敛性. 本文的剩余部分组织如下, 在第 2 节中, 我们提出了一般的不精确不动点迭代法. 在第 3 节中, 得到了该方法的收敛性. 在第 4 节中, 我们给出了带有实验结果的数值例子. 最后, 在 5 节中, 我们得出一些结论.

2. 迭代方法

首先, 我们回顾绝对值方程 (1.1) 的一种等价 2×2 块 [9] 形式, 令 $y = |x|$, 则绝对值方程 (1.1) 等价于

$$\begin{cases} Ax - y = b, \\ -|x| + y = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ -H(x) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 $H(x) := \mathrm{diag}(\mathrm{sgn}(x))$.

其次, 我们回忆求解绝对值方程 (1.1) 的不动点迭代方法. 假设 (2.1) 的系数矩阵可以分裂为

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ -H(x) & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H(x) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 A 为非奇异矩阵时, 基于上述分裂, 建立了求解绝对值方程的的不动点迭代方法 [9]:

方法 2.1 不动点迭代方法

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$, 给定初始向量 $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, 并且 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 直到迭代序列 $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛, 有

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = A^{-1}(y^{(k)} + b), \\ y^{(k+1)} = (1-\tau)y^{(k)} + \tau|x^{(k+1)}|. \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $\tau > 0$.

在求解绝对值方程 (1.1) 时, 由于系数矩阵 A 是较大且稀疏的, 在求解时往往比较浪费时间, 因此, 我们采用分裂迭代法逼近系数矩阵 A 的解, 提出一种一般不精确不动点迭代方法.

方法 2.2 一般不精确不动点迭代方法

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 且 $A = M - N$ 是非奇异矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$, 给定初始向量 $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, 并且 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 直到迭代序列 $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛, 有

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}(y^{(k)} + b), \\ y^{(k+1)} = (1-\tau)y^{(k)} + \tau|x^{(k+1)}|. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\alpha > 0$, $\tau > 0$.

当 $M = \frac{\alpha I + A}{2}$, $N = \frac{\alpha I - A}{2}$ 时, 得到求解绝对值方程 (1.1) 的位移分裂不动点迭代方法, 然而, 该方法首次提出是用作求解广义绝对值方程 (1.2) [10]. 其次, 当 $M = (\alpha+1)H, N = \alpha H - S$ 时, 得到我们所提出的一般不动点不精确迭代方法, 其中 $H = \frac{A+A^*}{2}$, $S = \frac{A-A^*}{2}$.

3. 收敛性

在本节中, 我们将研究求解绝对值方程的一般不精确不动点迭代法的收敛性. 首先给出一些引理, 这些引理将用于求解绝对值方程的一般不精确不动点迭代法的收敛性分析.

引理 3.1[11, 12] 对于任意向量 $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, 则:

(1) $\|x - y\| \le \|x - y\|$;

(2) 如果 $0 \le x \le y$, 那么有 $\|x\|_p \le \|y\|_p$, 其中 $\|\cdot\|_p$ 表示向量的 p-范数;

(3) 如果 $x \le y$ 且 P 是非负矩阵, 那么有 $Px \le Py$.

引理 3.2[11] 当且仅当 $|b| < 1$ 且 $|a| < 1 + b$ 时, 实二次方程 $x^2 - ax + b = 0$ 两个根的模都小于1.

引理 3.3[12] 对于任意矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 如果 $0 \le A \le B$, 那么有 $\|A\|_p \le \|B\|_p$, 其中 $\|\cdot\|_p$ 表示矩阵的 p-范数.

设绝对值方程有唯一解, 并且 (x^*, y^*) 是 (2.1) 的一个精确解, 则

$$\begin{cases} x^* = M^{-1}Nx^* + M^{-1}(y^* + b), \\ y^* = (1-\tau)y^* + \tau|x^*|, \end{cases} \tag{3.1}$$

设 $(x^{(k)}, y^{(k)})$ 是由 (2.3) 生成的向量序列, 因此迭代误差可以表示为

$$\varphi_k^x = x^* - x^{(k)} \text{ 且 } \varphi_k^y = y^* - y^{(k)}.$$

定理 3.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, 则 $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非奇异的. 定义

$$\nu = \|M^{-1}N\|,\ \beta = \|M^{-1}\|,\ \gamma = |1-\tau|,$$

有

$$\psi^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \|\varphi^x_{k+1}\| \\ \|\varphi^y_{k+1}\| \end{pmatrix},$$

则

$$\|\psi^{(k+1)}\|_\infty \le \|L(\alpha,\tau)\|_\infty \cdot \|\psi^{(k)}\|_\infty, \tag{3.2}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示向量或矩阵的 ∞-范数,
有

$$L(\alpha,\tau) := \begin{pmatrix} \nu & \beta \\ \tau\nu & \tau\beta+\gamma \end{pmatrix},$$

当且仅当 ν 和 τ 满足以下条件时, $\|L(\alpha,\tau)\|_\infty < 1$,

$$\nu+\beta < 1 \text{ 且 } 0 < \tau < \frac{2}{\nu+\beta+1}, \tag{3.3}$$

因此, 如果 (3.3) 成立, 迭代序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛于绝对值方程 (1.1) 任意初始向量的的唯一解 x^*.

证明 由 (2.3) 和 (3.1), 得到

$$\varphi^x_{k+1} = M^{-1}N\varphi^x_k + M^{-1}\varphi^y_k, \tag{3.4}$$

$$\varphi^y_{k+1} = (1-\tau)\varphi^y_k + \tau(|x^*| - |x^{(k+1)}|). \tag{3.5}$$

根据 (3.4), 有

$$\|\varphi^x_{k+1}\| \le \nu\|\varphi^x_k\| + \beta\|\varphi^y_k\|. \tag{3.6}$$

同理, 由 (3.5) 和引理3.1, 得到

$$\begin{aligned} \|\varphi^y_{k+1}\| &\le \gamma\cdot\|\varphi^y_k\| + \tau\||x^*| - |x^{(k+1)}|\| \\ &\le \gamma\cdot\|\varphi^y_k\| + \tau\|x^* - x^{(k+1)}\| \\ &= \gamma\cdot\|\varphi^y_k\| + \tau\|\varphi^x_{k+1}\|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

结合 (3.6) 和 (3.7), 发现

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \|\varphi^x_{k+1}\| \\ \|\varphi^y_{k+1}\| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \nu & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \|\varphi^x_k\| \\ \|\varphi^y_k\| \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

在 (3.8) 式左乘非奇异矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}$, 根据引理3.1, 有

$$\begin{pmatrix} \|\varphi^x_{k+1}\| \\ \|\varphi^y_{k+1}\| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \nu & \beta \\ \tau\nu & \tau\beta+\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \|\varphi^x_k\| \\ \|\varphi^y_k\| \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

即

$$\psi^{(k+1)} \le L(\alpha,\tau)\cdot\psi^{(k)}. \tag{3.10}$$

在不等式 (3.10) 的两边取 $\infty-$范数, 由引理3.1得到 (3.2). 因此, 可以得出

$$0 \le \|\psi^{(k)}\|_\infty \le \|L(\alpha,\tau)\|_\infty\cdot\|\psi^{(k-1)}\|_\infty \le \cdots \le \|L(\alpha,\tau)\|^k_\infty\cdot\|\psi^{(0)}\|_\infty.$$

由 $L(\alpha,\tau)$, 有 $\|L(\alpha,\tau)\|_\infty = \max\{\nu+\beta, (\nu+\beta)\tau+\gamma\}$, 当且仅当

$$\begin{cases} \nu+\beta < 1, \\ (\nu+\beta)\tau+\gamma < 1, \end{cases} \tag{3.11}$$

满足 $\|L(\alpha,\tau)\|_\infty < 1$,
求解 (3.11)时, 有

$$\begin{cases} \nu+\beta<1, \\ 0<\tau<\frac{2}{\nu+\beta+1}, \end{cases}$$

即 (3.3)成立, 则

$$\lim_{k\to\infty} \|\psi^{(k)}\|_\infty = 0,$$

因为 $\|\psi^{(k)}\|_\infty = \max\{\|\varphi_k^x\|, \|\varphi_k^y\|\}$, 有

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k^x\| = 0 \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k^y\| = 0,$$

因此, 在条件 (3.3) 下, 迭代序列 $\{(x^{(k)}, y^{(k)})\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛于 (x^*, y^*), 得证.

4. 数值实验

在本节中，给出了一个例子来证明一般不动点不精确方法的可行性和有效性，我们从迭代步数(“IT”)、运行时间(“CPU”)和相对残差(“RES”)这三个方面将该方法与不动点迭代方法，位移分裂不动点迭代方法进行了比较。

$$\text{RES} := \frac{\|Ax^{(k)} - |x^{(k)}| - b\|_2}{\|b\|_2}.$$

我们在计算时, 所有的初始向量 $x^{(0)}$ 和 $y^{(0)}$ 都选择为零向量, 当 RES $\le 10^{-6}$ 或者最大迭代步长超过 50 时, 所有的迭代都要终止. 我们的计算工具是一台配备1.60 GHZ的中央处理器(Intel(R)Core(TM)i5-8250U)和内存为4 GB的个人计算机上使用MATLAB R2020b进行计算的.

例 4.1 设绝对值方程的系数矩阵 $A = \widehat{D} + I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其中

$$\widehat{D} = \text{Tridiag}(-I, D, -I) = \begin{bmatrix} D & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -I & D & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & D & -I \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -I & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

是一个块三对角矩阵,

$$D = \text{tridiag}(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

是一个三对角矩阵, $n = m^2$. 设 $x^* = (-0.5, -1, -0.5, \ldots, -0.5, -1, \ldots)^T \in \mathbb{R}^n$ 是绝对值方程的精确解. 在表 1中方法一表示不动点迭代方法, 位移分裂不动点迭代法用方法二表示, 方法三是我们所提出的一般不精确不动点迭代方法, 并且给出了当 m 取不同的值时, $\tau = 1.2$, $\alpha = 0.5$ 时的 IT、CPU 和 RES.

从表 1中发现当迭代步数达到规定的最大迭代步数时方法二并没有收敛到精确解, 可以看出当终止计算时, 方法三的迭代步数和计算所需要的时间都是最小的, 因此, 不难得出方法三是最有效的.

5. 总结

本文提出了求解绝对值方程的一般不精确不动点迭代方法, 通过收敛性分析, 得到了该方法的收敛条件, 通过数值例子验证了该方法的有效性和可行性.

Table 1. Numerical results
表 1. 数值结果

m	IT, CPU, RES	方法一	方法二	方法三
m=20	IT	25	50	11
	CPU	0.0601	0.0515	0.0018
	RES	9.9306e-7	1.8579	9.7395e-7
m=40	IT	26	50	11
	CPU	0.1255	0.2262	0.0039
	RES	6.9026e-7	1.8527	9.0560e-7
m=60	IT	26	50	11
	CPU	0.2906	0.6040	0.0075
	RES	7.2304e-7	1.8509	8.7745e-7
m=80	IT	26	50	11
	CPU	0.4914	0.9424	0.0121
	RES	7.3941e-7	1.8500	8.6221e-7
m=100	IT	26	50	11
	CPU	0.9746	1.7626	0.0273
	RES	7.4923e-7	1.8494	8.5266e-7

基金项目

感谢甘肃省优秀研究生“创新之星”科研计划项目(2023CXZX-327)和西北师范大学研究生科研资助项目(2022KYZZ-S116)对本文的支持。

参考文献

[1] Rohn, J. (2004) A Theorem of the Alternatives for the Equation $Ax + B|x| = b$. *Linear and Multilinear Algebra*, **52**, 421-426. https://doi.org/10.1080/0308108042000220686

[2] Mangasarian, O.L. (2007) Absolute Value Programming. *Computational Optimization and Applications*, **36**, 43-53. https://doi.org/10.1007/s10589-006-0395-5

[3] Mangasarian, O.L. (2009) A Generalized Newton Method for Absolute Value Equations. *Optimization Letters*, **3**, 101-108. https://doi.org/10.1007/s11590-008-0094-5

[4] Mangasarian, O.L. and Meyer, R.R. (2006) Absolute Value Equations. *Linear Algebra and its Applications*, **419**, 359-367. https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.05.004

[5] Li, C.-X. (2017) A Preconditioned AOR Iterative Method for the Absolute Value Equations. *International Journal of Computational Methods*, **14**, Article 1750016. https://doi.org/10.1142/S0219876217500165

[6] Li, C.-X. (2016) A Modified Generalized Newton Method for Absolute Value Equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **170**, 1055-1059. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0956-4

[7] Ke, Y.-F. and Ma, C.-F. (2017) SOR-Like Iteration Method for Solving Absolute Value Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **311**, 195-202. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.05.035

[8] Guo, P., Wu, S.-L. and Li, C.-X. (2019) On the SOR-Like Iteration Method for Solving Absolute Value Equations. *Applied Mathematics Letters*, **97**, 107-113. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.03.033

[9] Ke, Y.-F. (2020) The New Iteration Algorithm for Absolute Value Equation. *Applied Mathematics Letters*, **99**, Article 105990. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.07.021

[10] Li, X., Li, Y.-X. and Dou, Y. (2022) Shift-Splitting Fixed Point Iteration Method for Solving Generalized Absolute Value Equations. *Numerical Algorithms*, **93**, 695-710. https://doi.org/10.1007/s11075-022-01435-3

[11] Berman, A. and Plemmons, R. (1979) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic Press, Cambridge, MA. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-092250-5.50009-6

[12] Varga, R.S. (2000) Matrix Iterative Analysis. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-05156-2