Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(10), 7201-7208
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1110764

完备次黎曼流形上Schrödinger算子的自伴性

陶一涞

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2022年9月19日；录用日期：2022年10月11日；发布日期：2022年10月20日

摘　要

本文研究次黎曼流形上的Schrödinger算子在无界区域内的性质，并得到在完备的次黎曼流形上下有界的该算子必定是本质自伴的。

关键词

次黎曼流形，Schrödinger算子，下有界，本质自伴

The Self-Adjiontness of the Schrödinger Operator on Complete Sub-Riemannian Manifolds

Yilai Tao

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Sep. 19^{th}, 2022; accepted: Oct. 11^{th}, 2022; published: Oct. 20^{th}, 2022

Abstract

This paper studies the properties of the Schrödinger operator on sub-Riemannian manifolds in the unbounded domain. It is further studied that the semibounded operator must be essentially self-adjoint on complete sub-Riemannian manifolds.

文章引用: 陶一涞. 完备次黎曼流形上Schrödinger算子的自伴性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(10): 7201-7208.
DOI: 10.12677/aam.2022.1110764

Keywords

Sub-Riemannian Manifold, Schrödinger Operator, Semibounded, Essentially Self-Adjoint

1. 引言

1962年, Teruo Ikebe和Tosio Kato在 [1]中考虑$\mathbb{R}^m$上的二阶椭圆算子,

$$Tu=\sum_{j,k=1}^{m}[i\frac{\partial}{\partial x_j}+b_j(x)]a_{jk}(x)[i\frac{\partial}{\partial x_k}+b_k(x)]u+q(x)u, \tag{1.1}$$

其中$a_{jk}(x)$是实值函数, $a_{jk}(x)=a_{kj}(x), b_j(x)=0$, $x=(x_1,\cdots,x_m)$, $i=\sqrt{-1}$. 设$T_0=T|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m)}$, 他们提及这样一个问题:"在什么情况下, T_0是$L^2(\mathbb{R}^m)$上的一个本质自伴算子?". Tosio Kato考虑了物理上的一个特殊例子, 即由s个粒子组成的量子力学系统的Schrödinger算子, 该系统是通过静态势相互作用并受到外部静电和磁场的作用. 此例中假设$m=3s$, $a_{jk}=\delta_{jk}, b_j(x)=0$, $q(x)$是外部静电势和粒子间的相互作用势(是一种广义形式的库伦势, 通常具有强奇异性), 由于$q(x)$不满足Stark效应, 所以最后的结果不太理想. 后来Tosio Kato的结论被多位作者推广, 最主要的是Stummel在 [2]中处理了上述例子$a_{jk}(x)=a_{kj}(x), b_j(x)\neq 0$的情形, 并引入$q$的一个具有一般性的充分条件. 虽然他证明出$T_0$的本质自伴性, 但是$q(x)$仍然不满足Stark效应. Wienholtz进一步推广了Stummel的结论, 他在 [3]中考虑了$a_{jk}(x)\neq a_{kj}(x), b_j(x)\neq 0$的情形, 但是他的结论需要$T_0$是下有界的. 最后Teruo Ikebe和Tosio Kato在 [1]中假设$a_{jk}(x), b_j(x)$是足够光滑的实值函数, 对$\forall x\in\mathbb{R}^m$, 矩阵$(a_{jk}(x))$都是对称且正定的, $q\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$, 其中$L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)=\left\{u:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\middle|\forall D\Subset\mathbb{R}^m, u\in L^2(D)\right\}$, 得出$T_0$是本质自伴的. 另外, 1983年Robert S. Strichartz在 [4]中将上述问题推广到完备的黎曼流形M上, 得出当Schrödinger算子是下有界时, 它在$C_0^\infty(M)$上是本质自伴的.

上述这些工作都是依靠椭圆型方程的理论完成的, Paul R.Chernoff利用双曲型方程的理论也得到类似的结果, 有兴趣的读者可以参考 [5].

根据前人的工作, 本文将其推广至完备的次黎曼流形M上来.

定理1.1. 设$(M,H,g_H;g)$是一个完备的次黎曼流形, 且设$L=-\Delta_H+q$在$C_0^\infty(M)$上是下有界的, 那么L在$C_0^\infty(M)$上是本质自伴的.

另外我们还得出关于下有界的一个结论, 这个结论是 [6]中Thereom 3.12的推广.

定理1.2. 设$(M,H,g_H;g)$ 是一个次黎曼流形, 那么以下事实是等价的:

(i) L在$C_0^\infty(M)$上是下有界的.

(ii) 对任意的$\Omega \Subset M$, 算子$L_{M\setminus\overline{\Omega}}$是在$C_0^\infty(M\setminus\overline{\Omega})$上是下有界的.

(iii) 存在$\Omega \Subset M$, 使得算子$L_{M\setminus\overline{\Omega}}$是在$C_0^\infty(M\setminus\overline{\Omega})$上是下有界的.

2. 预备知识

次黎曼几何的简介可以参看 [7] [8]. 设M是$m+d$维光滑流形, TM是M的切丛, H是切丛TM的一个m维子丛, 子丛H称为M的水平丛. 对任意开邻域U, 可如下归纳定义$\{\Gamma^i(U,H)\}_{i\geq 1}$,

$$\Gamma^1(U,H)=\Gamma(U,H),$$
$$\Gamma^{i+1}(U,H)=\Gamma^i(U,H)+\left[\Gamma^1\left(U,H\right),\Gamma^i(U,H)\right] \quad \forall i\in\mathbb{Z}_+,$$

其中$\Gamma(U,H)$ 为 H 在U上的光滑截面空间, 在不引起混淆的前提下, 本文简记为$\Gamma(U)$.

给定一个$m+d$维光滑流形M, H是满足r步括号生成条件的水平分布, g_H是定义在H上的度量, (H,g_H)称为M上的次黎曼结构. 我们把被赋予次黎曼结构(H,g_H)的流形M称为次黎曼流形, 记为(M,H,g_H).

称g为g_H的黎曼延拓, 如果M上的黎曼度量g在H上的限制正好是g_H. 此后, 我们在次黎曼流形(M,H,g_H)上固定一个黎曼延拓g, 记为$(M,H,g_H;g)$. 设V是H在黎曼延拓g下的正交补, 显然$g_V=g|_V$是V的度量. TM具有正交分解

$$TM=H\oplus V,$$

并且诱导了两个投射$\pi_H:TM\to H$ 和$\pi_V:TM\to V$, 此时称V是垂直分布. 由H与V形成的分布也分别记为H与V.

设$(M^{m+d},H,g_H;g)$是次黎曼流形且子丛H的秩为m. 称一个光滑向量场X在M上是水平的, 如果对$\forall p\in M$, 有$X_p\in H_p$. 设u是M上的光滑函数, 称$\nabla_H u$是u的水平梯度, 如果对$\forall q\in M$, $\forall X\in H_q$, 有$g_H((\nabla_H u)_q,X)=du(X)$. 设$\Omega$是$(M,g)$的一个开集, 取其上的一个局部正交标架场$\{e_A\}_{A=1}^{m+d}$, 使得$span\{e_i\}_{i=1}^m=H$且$span\{e_j\}_{j=m+1}^{m+d}=V$, 那么有

$$\nabla_H u=\sum_{i=1}^{n}(e_iu)e_i. \tag{2.1}$$

设X是(M,g)上的向量场, 称div_gX是X的散度, 如果

$$div_gX=\sum_{A=1}^{m+d}\{e_Ag(X,e_A)-g(X,\nabla^R_{e_A}e_A)\}, \tag{2.2}$$

其中∇^R是黎曼联络.

DOI: 10.12677/aam.2022.1110764

设u是$(M^{m+d},H,g_H;g)$上的函数, 称$\Delta_H u$是u的sub-Laplacian, 如果

$$\Delta_H u = div_g(\nabla_H u). \tag{2.3}$$

下面这个定理是次黎曼流形上的散度定理.

定理2.1. 设$(M,H,g_H;g)$是无边的次黎曼流形, 记Δ_H是sub-Laplacian, 则对函数$u,v\in C_0^\infty(M)$, 满足

$$\int_M u\Delta_H v dv_g + \int_M \langle \nabla_H u, \nabla_H v\rangle dv_g = 0.$$

本文还涉及二阶椭圆型方程的相关内容, 在此做简要介绍. 设$\Omega\Subset M$, 在分布意义下, Folland-Stein空间$S_k^p(\Omega)$的定义如下:

$$S_k^p(\Omega) = \left\{u\in L^2(\Omega)\middle|\nabla_H^i u\in L^2(\Omega), \forall i\le k\right\}, \tag{2.4}$$

但$S_{k,0}^p(\Omega)$是$C_0^\infty(\Omega)$在S_k^p-范数下的闭包. 当$p=2,k=1$时, $S_1^2(\Omega)$的对偶空间记为$S_{-1}^2(\Omega)$, 且有$S_1^2(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset S_{-1}^2(\Omega)$.

引理2.2. 假设M是带光滑边界的次黎曼流形, $\Omega\Subset M$且$g\in S_{-1}^2(\Omega)$, 那么Dirichlet方程$\Delta_H f=g$存在唯一解$f\in S_{1,0}^2(\Omega)$.

Δ_H在Folland-Stein空间中满足L^2初始正则性提升, 参考 [9]中第121页定理3.4的证明方法.

定理2.3. 假设对$1<p<\infty$, $f\in L_{loc}^p(\Omega)$且在分布意义下$\Delta_H f=g$. 如果$g\in S_k^p(\Omega)$其中$k\le -1$, 那么$\forall D\Subset\Omega$, $f\in S_{k+2}^p(D)$且

$$\|f\|_{S_{k+2}^p(D)} \le C(\|g\|_{S_k^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}). \tag{2.5}$$

其中C与f,g无关.

当$k\in\mathbb{N}$时, Δ_H在Folland-Stein空间中仍满足L^2正则性提升(参考 [10]的Theorem2.6).

由于本文是研究Schrödinger算子的自伴性, 所以接下来先回顾泛函分析中关于自伴算子的一些内容(具体可参考 [11]). 以下假设$\mathcal{H}$是Hilbert空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$是其配备的内积, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$是它的范数. 设$T:D(T)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$是一个线性算子并且$D(T)$在$\mathcal{H}$中是稠定的. 记

$$D(T^*) = \{y\in\mathcal{H}|\exists u\in\mathcal{H}, 使得\langle Tx,y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x,u\rangle_{\mathcal{H}}, x\in D(T)\}. \tag{2.6}$$

事实上, 由Riesz表示定理知, 向量$y\in\mathcal{H}$属于$D(T^*)$当且仅当映射$x\mapsto\langle Tx,y\rangle_{\mathcal{H}}$是$(D(T),\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$上的一个有界线性泛函, 或者等价地说, $\exists c_y>0$, 使得$|\langle Tx,y\rangle_{\mathcal{H}}|\le c_y\|x\|_{\mathcal{H}}$. 因为$D(T)$在$\mathcal{H}$中是稠密的, 向量$u\in\mathcal{H}$, 满足$\langle Tx,y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x,u\rangle_{\mathcal{H}}, \forall x\in D(T)$完全由y决定, 所以我们得到一个定义良好的映射$T^*:\mathcal{H}\to\mathcal{H}, T^*y=u$, 并且它还是线性的. 因此, 线性算子$T^*$称作$T$的伴随算子. 根据前面的定义, 我们有

$$\langle Tx, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, T^*y\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*). \tag{2.7}$$

定义2.4. 称T是对称的, 如果

$$\langle Tx, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, Ty\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall x, y \in D(T). \tag{2.8}$$

注意对称算子不需要定义域是稠密的. 不过当对称算子T的定义域$D(T)$在$\mathcal{H}$中是稠密的, 此时$T \subset T^*$.

定义2.5. 设T是一个对称算子, 称T是下有界的, 如果存在$c \in \mathbb{R}$, 使得

$$\forall x \in D(T), \quad \langle Tx, x\rangle_{\mathcal{H}} \geq c\|x\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.9}$$

这样的c我们称之为T的下界.

定义2.6. 设T是Hilbert空间$\mathcal{H}$上的一个稠定对称算子, 称T是自伴算子, 如果$T = T^*$; 称T是本质自伴算子, 如果它的闭包$\overline{T}$是自伴算子, 即$(\overline{T})^* = T^*$.

而下有界的算子和自伴算子有着密不可分的联系.

命题2.7 (参考 [11]中的Proposition3.9)**.** 设T是Hilbert空间$\mathcal{H}$上一个下有界的的稠定对称算子. 如果存在$\lambda \in \mathbb{R}$, 使得$Ker(T^* - \lambda I) = \{0\}$, 那么$T$是本质自伴的.

设$(M, H, g_H; g)$是一个次黎曼流形, $L^2(M)$是一个Hilbert空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$是其配备的内积. 众所周知, $C_0^\infty(M)$在$L^2(M)$中是稠密的. Schrödinger算子可定义为:

$$L_M = -\Delta_H + q : C_0^\infty(M) \subset L^2(M) \to L^2(M), \tag{2.10}$$

其中Δ_H是sub-Laplacian. 对任一个开集$\Omega \subset M$, 可类似定义在$C_0^\infty(\Omega)$上的Schrödinger算子L_Ω. 当$\Omega = M$时, 我们把L_M简记为L. 由散度定理可知，L是对称算子. 类似于(2.9), 可定义L是下有界的. 易知当$q \in L^\infty(M)$时, Schrödinger算子L是下有界的.

注记2.8. 当$\Omega \Subset M$, $q \in L^\infty_{loc}(M)$时, L_Ω在$C_0^\infty(\Omega)$上是下有界的. 事实上,

$$\begin{aligned}\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle L_\Omega \phi, \phi\rangle &= \int_\Omega |\nabla_H \phi|^2 + q\phi^2 \\ &\geq \int_\Omega q\phi^2 \\ &\geq -\|q\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \phi^2.\end{aligned}$$

3. 主要结果的证明

首先我们证明定理1.1.

DOI: 10.12677/aam.2022.1110764

Proof. 我们假设$q \in L^{\infty}_{loc}(M) = \left\{ u : M \to \mathbb{R} \middle| \forall D \Subset M, u \in L^{\infty}(D) \right\}$以及$L$的下界是$A$, 其中$A$是一个常数, 即

$$\int_M |\nabla_H \phi|^2 + q\phi^2 \geq A \int_M \phi^2, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(M). \tag{3.1}$$

因为L是对称的, 所以根据命题2.7, 只需要证明存在实数λ, 使得$Ker(L^* - \lambda I) = \{0\}$. 假设$f \in Ker(L^* - \lambda I)$, 即在分布意义下$(-\Delta_H + q)f = \lambda f$.

取M的一个有界集D, 且∂D是C^{∞}. 设χ是一个截断函数并满足$supp \chi \subset D$. 对$\forall \psi \in C_0^{\infty}(D)$,

$$\begin{aligned}
\int_D \Delta_H(\chi f)\psi &= -\int_D \langle \nabla_H(\chi f), \nabla_H \psi \rangle \\
&= -\int_D \langle f\nabla_H \chi + \chi \nabla_H f, \nabla_H \psi \rangle \\
&= -\int_D \langle \nabla_H \chi, f\nabla_H \psi \rangle - \int_D \langle \nabla_H f, \chi \nabla_H \psi \rangle \\
&= -\int_D \langle \nabla_H \chi, f\nabla_H \psi + \psi \nabla_H f \rangle - \int_D \langle \nabla_H f, \chi \nabla_H \psi + \psi \nabla_H \chi \rangle \\
&\quad + \int_D \langle \nabla_H \chi, \psi \nabla_H f \rangle + \int_D \langle \nabla_H f, \psi \nabla_H \chi \rangle \\
&= -\int_D \langle \nabla_H \chi, \nabla_H (f\psi) \rangle - \int_D \langle \nabla_H f, \nabla_H (\chi \psi) \rangle + 2\int_D \langle \nabla_H \chi, \nabla_H f \rangle \psi \\
&= \int_D (f\Delta_H \chi)\psi + \int_D (\chi \Delta_H f)\psi + \int_D 2\langle \nabla_H \chi, \nabla_H f \rangle \psi,
\end{aligned}$$

从而得出, 在分布意义下有$\Delta_H(\chi f) = f\Delta_H \chi + \chi \Delta_H f + 2\langle \nabla_H \chi, \nabla_H f \rangle$.

由于$f \in L^2(M)$, $\Delta_H f = (q - \lambda)f$以及$q \in L^{\infty}_{loc}(M)$, 所以$f\Delta_H \chi + \chi \Delta_H f + 2\langle \nabla_H \chi, \nabla_H f \rangle \in L^2(D) \subset S^2_{-1}(D)$. 那么有$\chi f$满足Dirichlet方程

$$\begin{cases} -\Delta_H(\chi f) = g, \text{在} D \text{内} \\ \chi f = 0, \text{在} \partial D \text{上} \end{cases} \tag{3.2}$$

其中$g = -f\Delta_H \chi - \chi \Delta_H f - 2\langle \nabla_H \chi, \nabla_H f \rangle \in S^2_{-1}(D)$. 由定理2.3知, $\chi f \in S^2_{1,0}(D)$, $f \in S^2_{1,loc}(M) = \left\{ u : S^2_1(M) \to \mathbb{R} \middle| \forall D \Subset M, u \in S^2_1(D) \right\}$.

因为M是完备的, 给定$x_0 \in M$, $0 < r < +\infty$, 取满足如下条件的截断函数

(1) $\varphi_r(x) = 1$, 在$B(x_0, r)$上,

(2) $\varphi_r(x) = 0$, 在$M \setminus B(x_0, 2r)$上,

(3) $|\nabla_H \varphi_r(x)| < \frac{C}{r}$, 其中常数$C > 0$与$r$无关.

DOI: 10.12677/aam.2022.1110764

将$f\varphi_r^2$带入$(-\Delta_H+q)f=\lambda f$计算得,

$$\begin{aligned}\lambda\int_M f^2\varphi_r^2 &= \int_M \langle\nabla_H f,\nabla_H(f\varphi_r^2)\rangle+qf^2\varphi_r^2\\ &=\int_M |\nabla_H(f\varphi_r)|^2+q(f\phi_r)^2-\int_M f^2|\nabla_H\varphi_r|^2\\ &\geq A\int_M (f\varphi_r)^2-\frac{C^2}{r^2}\int_M f^2,\end{aligned}$$

最后一个不等式由(3.1)得出. 让$r\to+\infty$, 可得$(A-\lambda)\int_M f^2\leq 0$. 若$A>0$, 令$\lambda=A$, 那么$A\int_M f^2\leq 0$. 若$A<0$, 令$\lambda=2A$, 那么$-A\int_M f^2\leq 0$. 故在$L^2(M)$上$f=0$, $Ker(\lambda-L^*)=\{0\}$, 于是L是本质自伴的. □

接下来证明定理1.2.

Proof. 由定理内容知, 只需要证明(iii)能够推出(i)即可. 设$\Omega\Subset B_R$, B_R是以半径为R的球. 不失一般性, $\forall\phi\in C_0^\infty(M\setminus\overline{\Omega})$, $\int_{M\setminus\overline{\Omega}}(\nabla_H\phi)^2+q\phi^2\geq 0$. 而根据积分区域的单调性(参见 [10]的Lemma2.10),

$$\forall\phi\in C_0^\infty(M\setminus\overline{B_R}),\quad \int_{M\setminus\overline{B_R}}(\nabla_H\phi)^2+q\phi^2\geq 0. \tag{3.3}$$

令$\eta(x)=\varphi(r(x))\in C_0^\infty(B_{2R})$且满足

$$\eta|_{B_R}\equiv 1 \text{ 且 } \frac{|\nabla_H\eta|^2}{\eta}\leq\frac{C}{R^2},$$

其中$r(x)$是由黎曼度量g诱导的距离函数, C只依赖于φ'. 因此我们取$R\gg 1$使得$\frac{C}{R^2}\leq 1$, 直接计算

$$\begin{aligned}&\int_M|\nabla_H\phi|^2-\int_M|\nabla_H(1-\eta)\phi|^2\\ &\qquad=\int_M(2\eta-\eta^2)|\nabla_H\phi|^2+2\int_M\phi(1-\eta)\langle\nabla_H\eta,\nabla_H\phi\rangle-\int_M|\nabla_H\eta|^2\phi^2\\ &\qquad\geq\int_M(2\eta-\eta^2-|\nabla_H\eta|^2)|\nabla_H\phi|^2-\int_M((1-\eta)^2+|\nabla_H\eta|^2)\phi^2\\ &\qquad\geq\int_M(1-\frac{C}{R^2})\eta|\nabla_H\phi|^2-C_1\int_M\phi^2\geq -C_1\int_M\phi^2.\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\int_M|\nabla_H\phi|^2+q\phi^2 &\geq\int_M|\nabla_H(1-\eta)\phi|^2+q\phi^2-C_1\int_M\phi^2\\ &=\int_M|\nabla_H(1-\eta)\phi|^2+q(1-\eta)^2\phi^2+\int_M(2\eta-\eta^2)q\phi^2-C_1\int_M\phi^2\\ &\geq\int_{M\setminus\overline{B_R}}|\nabla_H(1-\eta)\phi|^2+q(1-\eta)^2\phi^2-C_1\int_M\phi^2\\ &\geq -C_1\int_M\phi^2,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是根据式(3.3), 这意味着L在$C_0^\infty(M)$上是下有界的. □

参考文献

[1] Ikebe, T. and Kato, T. (1962) Uniqueness of the Self-Adjoint Extension of Singular Elliptic Differential Operators. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **9**, 77-92. https://doi.org/10.1007/BF00253334

[2] Stummel, F. (1956) Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen. *Mathematische Annalen*, **132**, 150-176. https://doi.org/10.1007/BF01452327

[3] Wienholtz, E. (1958) Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Mathematische Annalen*, **135**, 50-80. https://doi.org/10.1007/BF01350827

[4] Strichartz, R.S. (1983) Analysis of the Laplacian on the Complete Riemannian Manifold. *Journal of Functional Analysis*, **52**, 48-79. https://doi.org/10.1016/0022-1236(83)90090-3

[5] Chernoff, P.R. (1973) Essential Self-Adjointness of Powers of Generators of Hyperbolic Equations. *Journal of Functional Analysis*, **12**, 401-414. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90003-7

[6] Pigola, S., Rigoli, M. and Setti, A.G. (2008) Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis: A Generalization of the Bochner Technique. Springer Science & Business Media, Berlin.

[7] Dong, Y. (2021) Eells-Sampson Type Theorems for Subelliptic Harmonic Maps from Sub-Riemannian Manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, **31**, 3608-3655. https://doi.org/10.1007/s12220-020-00408-z

[8] 邹文婷. 次黎曼流形上的次椭圆调和映射梯度估计[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3912-3922. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.1011416

[9] 陈恕行. 现代偏微分方程导论[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[10] Gao, L., Lu, L. and Yang, G. (2022) Liouville Theorems of Subelliptic Harmonic Maps. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **61**, 293-307. https://doi.org/10.1007/s10455-021-09811-3

[11] Schmüdgen, K. (2012) Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert Space. Springer Science & Business Media, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4753-1