

具有接种效应带时变时滞的SVEIR模型的稳定性分析

王海玲

厦门大学嘉庚学院信息科学与技术学院, 福建 漳州

收稿日期: 2022年5月27日; 录用日期: 2022年6月19日; 发布日期: 2022年6月28日

摘要

考虑了一类受接种疫苗影响的带时变时滞的SVEIR疾病传播模型, 针对不同取值下的病毒基本再生数 R_0 , 分别采取Liapunov函数法和Routh-Hurwitz判别法对模型平衡点的存在性、稳定性、分岔性进行研究。最后对不同的 R_0 进行数值模拟, 验证理论分析结果的正确性。

关键词

疫苗效应, 时滞, SVEIR模型, 稳定性

Stability Analysis of SVEIR Models with Inoculated Effect and Time-Varying Delay

Hailing Wang

School of Information Science and Technology, Xiamen University Tan Kah Kee College, Zhangzhou Fujian

Received: May 27th, 2022; accepted: Jun. 19th, 2022; published: Jun. 28th, 2022

Abstract

In this paper, we consider a SVEIR disease transmission model with time-varying delay affected by vaccination, for the basic regeneration number of virus R_0 under different values, Liapunov function method and Routh-Hurwitz criterion were used to study the existence, stability and bifurcation of model equilibrium points. Finally, the numerical simulation of different R_0 is carried out to verify the correctness of theoretical analysis results.

Keywords

Vaccine Effect, Delay, SVEIR Model, Stability

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自 2020 年新型冠状病毒发生以来, 已有众多学者致力于新冠肺炎疫情传播机理与特性的研究, 并建立各种新冠肺炎病毒传播的动力学模型, 通过模型对疫情的发展趋势做预测分析, 详见参考文献[1] [2] [3] [4]。还有许多学者针对经典的 SEIR 模型通过改变模型参数研究各类病毒传播模型的动力学性质, 如参考文献[5] [6] [7]。但是由于新冠肺炎的潜伏期较长, 具有一定的时变滞后性, 因此, 控制时滞也是一种常见的模型引入方式。很多学者开始选择采用时变系统描述传染病的动力学特性, 如文献[8]基于季节性变化的 SIR 模型研究了流感类传染病的疫苗接种和治疗策略。文献[9]将传染率定义为时间、易感染人口数、感染人口数和总人口数的非线性函数。文献[10]讨论了潜伏期时滞的时变 SEIR 模型的最优疫苗接种策略。文献[11]研究了基于时滞 SIR 模型关于 H1N1 型流感的最优疫苗接种策略, 并考虑了疫苗起效的延迟。

本文在经典 SEIR 模型的基础上, 通过引入潜伏期时滞因素、疫苗接种率因素及接种疫苗的免疫率因素, 更加真实地描述传染病的传播规律。研究了一类具有疫苗接种影响效应的带时变时滞的 SVEIR 模型, 其微分方程形式如式(1)所示。数值仿真结果表明, 在满足各种约束的条件下, 接种疫苗可以有效地抑制传染病的传播。

$$\begin{cases} S'(t) = a - (d + b(t))S(t) - (\alpha_1 E(t) + \alpha_2 I(t))S(t) \\ V'(t) = b(t)S(t) - dV(t) - (\beta_1 E(t) + \beta_2 I(t))V(t) \\ E'(t) = (\alpha_2 S(t - \tau) + \beta_2 V(t - \tau))I(t - \tau) - (d + k + \alpha(\gamma'))E(t) \\ I'(t) = kE(t) - (d + e + r)I(t) \\ R'(t) = \alpha(\gamma')E(t) + rI(t) - dR(t) + b(t)c(t)S(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $S(t)$: 为易感者; $V(t)$: 接种疫苗者; $E(t)$: 为潜伏者; $I(t)$: 为感染者;

$R(t)$: 为治愈者; a : 人口常数输入率; d : 自然死亡率; k : 潜伏者的确诊率;

α_1 : 易感者与潜伏期接触时的传播率; α_2 : 易感者与确诊患者接触时的传播率;

β_1 : 接种者与潜伏期接触时的传播率; β_2 : 接种者与确诊患者接触时的传播率;

γ_1 : 接种者人群潜伏期移出率; γ_2 : 未接种者人群潜伏期移出率; δ : 疾病传播率;

$\alpha(\gamma') = \gamma_1 \delta + (1 - \delta) \gamma_2$: 潜伏期人群受疫苗接种信息影响的移出率; τ : 平均潜伏期;

e : 因病死亡率; r : 染病者的治愈率; $b(t)$: 易感者的疫苗接种率, 满足 $0 \leq b(t) \leq 1$;

$c(t)$: 接种人群的成功免疫率, 且 $c(t) = c_0 + c_1 \exp(-t/c_2)$, 其中, c_0, c_1, c_2 为非负参数, 并满足: $c(0) = c_0 + c_1$, $c(+\infty) = c_0$ 。

2. 模型的建立

由于系统(1)里 $R(t)$ 项是独立存在的, 故只需研究系统(1)的子系统(2)。

$$\begin{cases} S'(t) = a - (d + b(t))S(t) - (\alpha_1 E(t) + \alpha_2 I(t))S(t) \\ V'(t) = b(t)S(t) - dV(t) - (\beta_1 E(t) + \beta_2 I(t))V(t) \\ E'(t) = (\alpha_2 S(t - \tau) + \beta_2 V(t - \tau))I(t - \tau) - (d + k + \alpha(\gamma'))E(t) \\ I'(t) = kE(t) - (d + e + r)I(t) \end{cases} \quad (2)$$

由现实生活可知, $S(t), V(t), E(t), I(t)$ 都是正数, 故系统(2)的初始状态空间为 $\Omega = \{(S(t), V(t), E(t), I(t)) | S(t) \geq 0, V(t) \geq 0, E(t) \geq 0, I(t) \geq 0\}$ 。

由于 Ω 具有正不变性, 因此, 只需考虑初始条件处于 Ω 内的解, 并验证解在 Ω 内具有存在唯一性。

3. 平衡点的存在性

令系统(2)的微分方程右侧等于 0, 计算得无病平衡点 E_0 和地方病平衡点 $E_{e_1}^*, E_{e_2}^*$ 。

$$E_0 = \left(\frac{a}{d + b(t)}, \frac{ab(t)}{d(d + b(t))}, 0, 0 \right), \quad E_{e_1}^* = (S_1^*, V_1^*, E_1^*, I_1^*), \quad E_{e_2}^* = (S_2^*, V_2^*, E_2^*, I_2^*)$$

令 $M = d + k + \alpha(\gamma')$, $N = d + e + r$

则 I_1^*, I_2^* 是方程(3)的解。

$$\begin{aligned} & MN(\alpha_1 N + \alpha_2 k)(\beta_1 N + \beta_2 k)I^2 + \{MN[kd(\alpha_1 N + \alpha_2 k) + k(d + b(t))(\beta_1 N + \beta_2 k)] \\ & - ak(\alpha_1 N + \alpha_2 k)(\beta_1 N + \beta_2 k)\}I + MNk^2 d(d + b(t)) - ak^2(d(\alpha_1 N + \alpha_2 k) + b(t)(\beta_1 N + \beta_2 k)) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

且, $E^* = \frac{N}{k}I^*$, $S^* = \frac{a}{d + b(t) + \alpha_1 E^* + \alpha_2 I^*}$, $V^* = \frac{b(t)}{d + \beta_1 E^* + \beta_2 I^*}S^*$

若令 $u_1 = \frac{\alpha_1}{k}N + \alpha_2$, $u_2 = \frac{\beta_1}{k}N + \beta_2$

则(3)式可转变为(4)式

$$MNk^2 u_1 u_2 I^2 + \{MN[k^2 du_1 + k^2(d + b(t))u_2] - ak^3 u_1 u_2\}I + MNk^2 d(d + b(t)) - ak^3(du_1 + b(t)u_2) = 0 \quad (4)$$

(4)式两边同时消去 k^2 , 进而可得(5)式

$$MNu_1 u_2 I^2 + \{MN[du_1 + (d + b(t))u_2] - aku_1 u_2\}I + MNd(d + b(t)) - ak(du_1 + b(t)u_2) = 0 \quad (5)$$

4. 再生系数

采用文献[12]中的下一代矩阵法(Next Generation Matrix)计算病毒基本再生数, 仅考虑携带病毒潜伏者和感染者情形, 作如下记号

$$\begin{cases} F_E = (\alpha_2 S(t - \tau) + \beta_2 V(t - \tau))I(t - \tau) \\ F_I = 0 \\ V_E = (d + k + \alpha(\gamma'))E(t) \\ V_I = -kE(t) + (d + e + r)I(t) \end{cases} \quad (6)$$

令

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_E}{\partial E} & \frac{\partial F_E}{\partial I} \\ \frac{\partial F_I}{\partial E} & \frac{\partial F_I}{\partial I} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_E}{\partial E} & \frac{\partial V_E}{\partial I} \\ \frac{\partial V_I}{\partial E} & \frac{\partial V_I}{\partial I} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

由(6)和(7)联立得, $F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 S(t-\tau) + \beta_2 V(t-\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} d+k+\alpha(\gamma') & 0 \\ -k & d+e+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ -k & N \end{pmatrix}$

进而有,

$$\begin{aligned} F \cdot V^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 S(t-\tau) + \beta_2 V(t-\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{MN} \begin{pmatrix} N & 0 \\ k & M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 S(t-\tau) + \beta_2 V(t-\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{M} & 0 \\ \frac{k}{MN} & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{k(\alpha_2 S(t-\tau) + \beta_2 V(t-\tau))}{MN} & \frac{\alpha_2 S(t-\tau) + \beta_2 V(t-\tau)}{N} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k \left(\alpha_2 \frac{a}{d+b(t)} + \beta_2 \frac{a}{d+b(t)} \frac{b(t)}{d} \right) & \alpha_2 \frac{a}{d+b(t)} + \beta_2 \frac{a}{d+b(t)} \frac{b(t)}{d} \\ \frac{MN}{0} & \frac{N}{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以系统(2)的再生系数谱半径为

$$R_0 = \rho(F \cdot V^{-1}) = \frac{k \left(\alpha_2 \frac{a}{d+b(t)} + \beta_2 \frac{a}{d+b(t)} \frac{b(t)}{d} \right)}{MN}.$$

5. 平衡点的稳定性分析

定理 1: 当 $R_0 = 1$ 时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处存在分岔。

证明: 系统(2)在无病平衡点 E_0 处的雅可比矩阵为

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -(d+b(t)) & 0 & -\frac{a\alpha_1}{d+b(t)} & -\frac{a\alpha_2}{d+b(t)} \\ b(t) & -d & -\frac{a\beta_1 b(t)}{d(d+b(t))} & -\frac{a\beta_2 b(t)}{d(d+b(t))} \\ 0 & 0 & -M & \frac{a\alpha_2}{d+b(t)} + \frac{ab(t)\beta_2}{d(d+b(t))} \\ 0 & 0 & k & -N \end{pmatrix}$$

则可求得 J_{E_0} 的特征根为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -d \\ \lambda_2 &= -(d+b(t)) \\ \lambda_3 &= \frac{-(M+N) - \sqrt{(M-N)^2 + 4 \frac{(ad\alpha_2 + ab(t)\beta_2)k}{d(d+b(t))}}}{2} \\ \lambda_4 &= \frac{-(M+N) + \sqrt{(M-N)^2 + 4 \frac{(ad\alpha_2 + ab(t)\beta_2)k}{d(d+b(t))}}}{2} \end{aligned}$$

当 $R_0 = 1$ 时, 易知, $\frac{k(ad\alpha_2 + ab(t)\beta_2)}{d(d+b(t))} = MN$

所以, $\lambda_4 = 0$

故, E_0 为非双曲平衡点, 则系统(2)在无病平衡点 E_0 处存在分岔现象。

定理 2: 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处渐进稳定。

证明: 当 $R_0 < 1$ 时, $\frac{k(ad\alpha_2 + ab(t)\beta_2)}{d(d+b(t))} < MN$, 由定理 1 可知,

$$\lambda_4 = \frac{-(M+N) + \sqrt{(M-N)^2 + 4 \frac{(ad\alpha_2 + ab(t)\beta_2)k}{d(d+b(t))}}}{2} < \frac{-(M+N) + \sqrt{(M-N)^2 + 4MN}}{2} = 0$$

所以可得 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ 。

由 Lyapunov 定理可知, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处渐进稳定。

定理 3: 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处不稳定。

证明: 由定理 1 可知, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$

$$\lambda_4 = \frac{-(M+N) + \sqrt{(M-N)^2 + 4 \frac{(ad\alpha_2 + ab(t)\beta_2)k}{d(d+b(t))}}}{2} > \frac{-(M+N) + \sqrt{(M-N)^2 + 4MN}}{2} = 0$$

故, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处不稳定。

定理 4: 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2)在地方病平衡点 E_e^* 处局部渐进稳定。

证明: 由于系统(2)在地方病平衡点 $E_{e_1}^*, E_{e_2}^*$ 处的证明方法类似, 故取 $E_{e_1}^* = E_e^*$, 可得到系统(2)在地方病平衡点 E_e^* 处的雅可比矩阵为

$$J_{E_e^*}^* = \begin{pmatrix} -d-b(t)-\alpha_1 E^* - \alpha_2 I^* & 0 & -\alpha_1 S^* & -\alpha_2 S^* \\ b(t) & -d-\beta_1 E^* - \beta_2 I^* & -\beta_1 V^* & -\beta_2 V^* \\ \alpha_2 I^* & \beta_2 I^* & -M & \alpha_2 S^* + \beta_2 V^* \\ 0 & 0 & k & -N \end{pmatrix}$$

则可求得 $J_{E_e^*}^*$ 的特征方程为 $a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

其中,

$$\begin{aligned} a_4 &= 1 \\ a_3 &= M+N+2d+b(t)+(\alpha_1+\beta_1)E^*+(\alpha_2+\beta_2)I^* \\ a_2 &= MN+(M+N)(d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*+d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*)+(d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*)(d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*) \\ &\quad +\alpha_1 \alpha_2 S^* I^*+\beta_1 \beta_2 V^* I^*-k(\alpha_2 S^*+\beta_2 V^*) \\ a_1 &= MN(d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*+d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*)+(M+N)(d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*)(d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*) \\ &\quad + (b(t)\alpha_1 \beta_2+k\alpha_2^2+\alpha_1 \alpha_2(N+d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*))S^* I^*+(\beta_1 \beta_2(N+d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*)+k\beta_2^2)V^* I^* \\ &\quad -k(\alpha_2 S^*+\beta_2 V^*)(d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*+d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*) \\ a_0 &= (N\alpha_1+k\alpha_2)(b(t)\beta_2+\alpha_2(d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*))S^* I^*+(N\beta_1+k\beta_2)\beta_1(d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*)V^* I^* \\ &\quad + (d+\beta_1 E^*+\beta_2 I^*)(d+b(t)+\alpha_1 E^*+\alpha_2 I^*)(MN-k(\alpha_2 S^*+\beta_2 V^*)) \end{aligned}$$

由 Routh-Hurwitz 判定准则得

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_4 = 1 \\ \Delta_2 &= \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \\ \Delta_4 &= \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

易知, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 均大于 0, 所以可得

$$\begin{aligned}\Delta_1 &> 0 \\ \Delta_2 &= a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0 \\ \Delta_3 &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0 \\ \Delta_4 &= a_0 \Delta_3 > 0\end{aligned}$$

由 Routh-Hurwitz 准则可知, 系统(2)在地方病平衡点 E_e^* 处局部渐进稳定。

6. 数值模拟实验与结论

通过数值模拟, 验证理论分析结果的正确性。

1) 取 $a = 0.01$, $d = 0.03$, $b(t) = 0.8$, $c(t) = 0.5$, $k = 0.9$, $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.85$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$, $e = 0.7$, $r = 0.9$, 则 $R_0 < 1$ 满足所求。随着接种疫苗人数的增加, 潜伏期人数越来越少, 最终易感患者人数将趋向 0, 故无病平衡点 E_0 全局渐近稳定, 疫情最终会得到控制, 如图 1 所示。

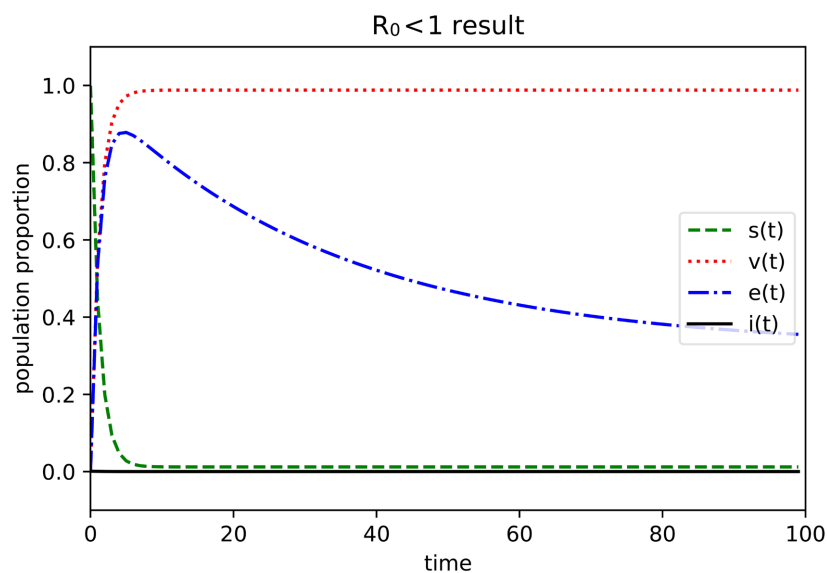


Figure 1. When $R_0 < 1$, the trends of disease-free equilibrium point

图 1. $R_0 < 1$ 时无病平衡点的变化趋势

2) 取 $a=0.1$, $d=0.05$, $b(t)=0.3$, $\alpha_2=0.45$, $\beta_2=0.2$, $e=0.3$, $r=0.5$, 则 $R_0 > 1$ 。

随着疫苗接种人数达到饱和时, 接种人数会越来越, 接种疫苗的免疫率会随着接种疫苗的时间发生变化, 此时潜伏期人数越来越多, 易感患者人数也会在一定程度上增加, 会出现大面积爆发的情况, 地方病平衡点 E_e^* 局部渐近稳定, 疾病会演化为当地流行病。如图 2 所示。

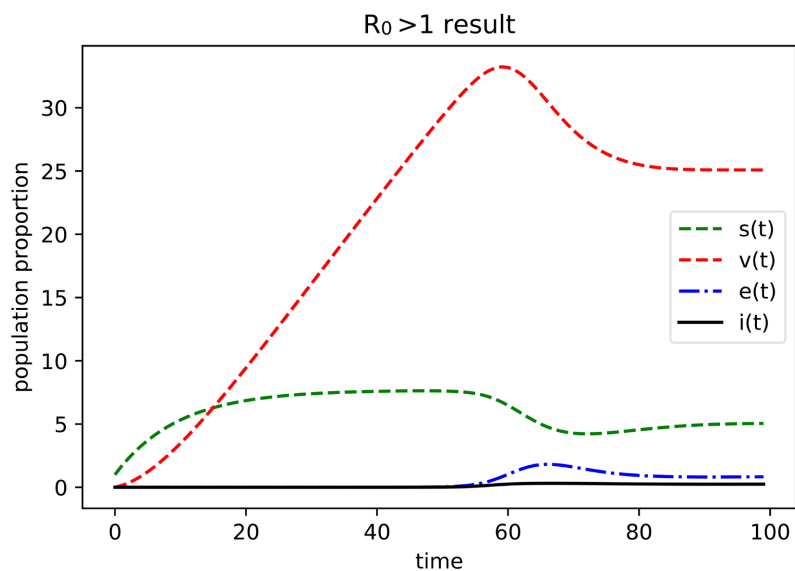


Figure 2. When $R_0 > 1$, the trends in the equilibrium of endemic diseases

图 2. $R_0 > 1$ 时地方病平衡点的变化趋势

3) 取 $a=0.02$, $d=0.003$, $b(t)=0.7$, $k=0.25$, $\alpha_1=0.15$, $\alpha_2=0.35$, $\beta_1=0.15$, $\beta_2=0.25$, $\gamma_1=0.7$, $\gamma_2=0.3$, $\delta=0.3$, $e=0.1$, $r=0.9$, 则 $R_0 = 1$ 。经过一段时间后明显出现分岔现象, 在分界处, 潜伏期和确诊人数比例会发生显著变化。如图 3 所示。

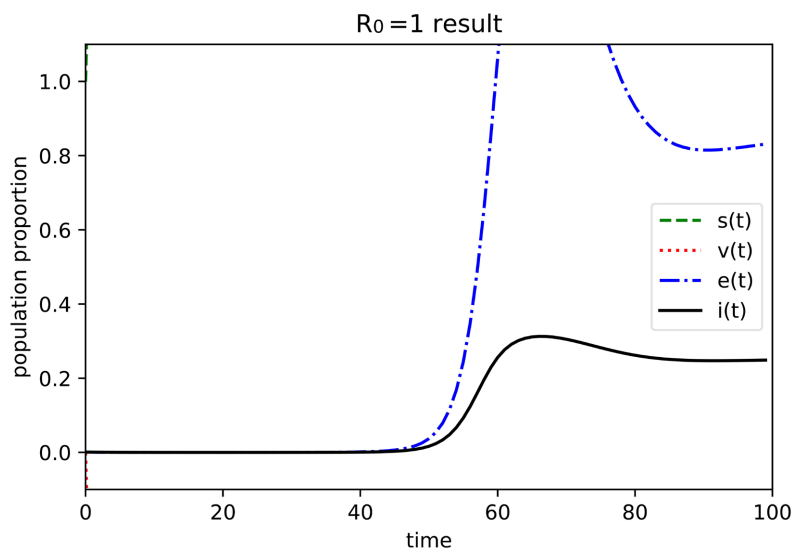


Figure 3. When $R_0 = 1$, the trends in the equilibrium of endemic diseases

图 3. $R_0 = 1$ 时地方病平衡点的变化趋势

本文重点讨论了受接种疫苗的比例及疫苗免疫成功率影响的 SVEIR 模型, 通过以上讨论可知, 当再生系数 $R_0 < 1$ 时, 系统会存在一个无病平衡点, 随着政府的管控, 疾病会消失; 当再生系数 $R_0 > 1$ 时, 系统平衡点局部稳定, 且疾病会转化为地方流行病; 当再生系数 $R_0 = 1$ 时, 系统会出现临界分岔现象, 同时也印证了接种疫苗是疾病防控的关键措施之一。

基金项目

福建省教育教学教改项目(FBJG20170154); 漳州市自然科学基金项目(ZZ2018J26); 福建省高校产学研合作项目(2018H6018); 教育部产学研协同育人项目(JGH2019003 和 JGH2019023)。

参考文献

- [1] 洪彬, 陈锦秀, 王连生, 等. 基于 SEIR-LSTM 混合模型的新型冠状病毒肺炎传播趋势分析与预测[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2020, 59(6): 1034-1040.
- [2] 于振华, 黄山阁, 杨波, 高红霞, 卢思. SLEIR 新冠肺炎传播动力学模型构建与预测[J]. 西安交通大学学报, 2022, 56(5): 1-10.
- [3] 冯苗胜, 王连生, 林文水. Logistic 与 SEIR 结合模型预测新型冠状病毒肺炎传播规律[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2020, 59(6): 1041-1046.
- [4] 李伟炜, 杜蓉, 陈曙东, 孙爽. 新型冠状病毒肺炎传播特性分析与疫情发展趋势预测[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2020, 59(6): 1025-1032.
- [5] 张杰豪, 陈永雪, 申佳瑜. 信息效应下 SEIR 传染病模型的动力学分析[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(11): 316-323.
- [6] 张鑫喆, 贺国峰, 黄刚. 一类具有接种和潜伏期的传染病模型及动力学分析[J]. 数学物理学报, 2019, 39A(5): 1247-1258.
- [7] 高振斌, 管崇苑. 一类 SEIR 传染病模型的稳定性及最优控制策略[J]. 生物数学学报, 2019, 34(2): 173-180.
- [8] Lee, S. and Chowell, G. (2017) Exploring Optimal Control Strategies in Seasonally Varying Flu-Like Epidemics. *Journal of Theoretical Biology*, 412, 36-47. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2016.09.023>
- [9] Mateus, J.P., Rebelo, P., Rosa, S., et al. (2018) Optimal Control of Non-Autonomous SEIRS Models with Vaccination and Treatment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 6, 1179-1199. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2018067>
- [10] 王昕炜, 彭海军, 钟万颢. 具有潜伏期时滞的时变 SEIR 模型的最优疫苗接种策略[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(7): 701-711. <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400048>
- [11] Jackson, T.L. and Byrne, H.M. (2000) A Mathematical Model to Study the Effects of Drug Resistance and Vasculature on the Response of Solid Tumors to Chemotherapy. *Mathematical Biosciences*, 164, 17-38. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(99\)00062-0](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(99)00062-0)
- [12] 王宾国, 邵昶, 李海萍. 仓室传染病模型基本再生数的发展简介[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2016, 52(3): 380-384+389.