

一类平面图中的彩虹匹配

余锐¹, 王华平²

¹浙江师范大学数学与计算机科学学院, 浙江 金华

²江西师范大学数学与统计学院, 江西 南昌

收稿日期: 2021年12月8日; 录用日期: 2022年1月7日; 发布日期: 2022年1月21日

摘要

对给定的边染色图 G , 若图 G 的每条边的颜色都不同, 则 G 是彩虹的。对给定的图 G 和 H , H 在 G 上的 anti-Ramsey 数, 记作 $AR(G, H)$, 表示图 G 中不包含任何同构于 H 的彩虹子图的最大边染色数。本文主要研究 T_n^- 中匹配的 anti-Ramsey 数。

关键词

匹配, 彩虹图, Anti-Ramsey 数

Rainbow Matchings in Planar Graphs

Rui Yu¹, Huaping Wang²

¹College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

²School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: Dec. 18th, 2021; accepted: Jan. 7th, 2022; published: Jan. 21st, 2022

Abstract

We call an edge-colored graph G rainbow, if all of its edges have different colors.

The anti-Ramsey number of the graph H in G , denoted by $AR(G, H)$, is the maximum number of colors in an edge-coloring of G which does not contain any rainbow subgraph isomorphic to H . In this paper, we consider the anti-Ramsey number for matchings in planar graphs T_n^- .

Keywords

Matching, Rainbow Graph, Anti-Ramsey Number

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对给定的边染色图 G , 若 G 的每条边的颜色都不同, 则 G 是彩虹的. 对给定的图 G 和 H , H 在 G 上的 anti-Ramsey 数, 记作 $AR(G, H)$, 表示图 G 中不包含任何同构于 H 的彩虹子图的最大边染色数. Anti-Ramsey 问题最早由 Erdős 等人提出 [1]. 近年来, 平面图中匹配的 anti-Ramsey 问题有了较多进展 [2] [3]. Jendrol' [4] 等人首先对 T_n 中匹配的 anti-Ramsey 数问题进行了研究, 其中 T_n 为 n 个点的平面三角剖分图. 他们得到了 T_n 中匹配的 anti-Ramsey 数的上下界, 但上下界相差过大. 各国学者致力于缩小上界和下界之间的差距. 最终, Qin 等人 [5] 确定了 T_n 中匹配的 anti-Ramsey 数的准确值. 本文我们考虑 T_n^- 中匹配的 anti-Ramsey 数. 其中 T_n^- 为 T_n 删掉一条边, 外面为四圈的平面图, 显然有 $|E(T_n^-)| = 3n - 7$.

2. 预备知识

引理 2.1. 对给定的边染色图 G , 令 d 为 G 的最大彩虹匹配数. 那么存在一个点集 $S \in V(G)$ 使得 $d = \frac{1}{2}(n - (o(G - S) - |S|))$, 其中 $o(H)$ 为 H 的奇分支数, 奇分支具备因子临界性.

对给定的边染色图 G , 如果对任意 $v \in V(G)$, $G - v$ 都有完美匹配, 那么我们称 G 具有因子临界性.

引理 2.2. 对给定的边染色图 G . 如果 G 包含一个彩虹四圈 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 且 $G - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 中还存在边, 那么 G 包含一个彩虹 $3K_2$.

引理 2.3. 对给定的边染色图 G . 如果 G 包含一个彩虹六圈 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ 且 $G - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ 中还存在边, 那么 G 包含一个彩虹 $4K_2$.

3. 彩虹 $3K_2$ 和 $4K_2$

定理 3.1. $AR(T_6^-, 3K_2) = 7$.

证明. 首先证明下界. 取一个图 $G \in T_6^-$, 令 G 的点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, G 边集为 $E(G) = \{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5\} \cup \{v_1v_i, v_2v_i | 3 \leq i \leq 6\}$. 对于图 G , 将边 $v_3v_4, v_1v_3, v_1v_6, v_2v_3, v_3v_6$ 染颜色 1, 剩下的边染 6 种不同的颜色(详见图 1). 此时, 我们用了 7 种颜色来染, 而图 G 中不含彩虹 $3K_2$. 由此下界得以证明.

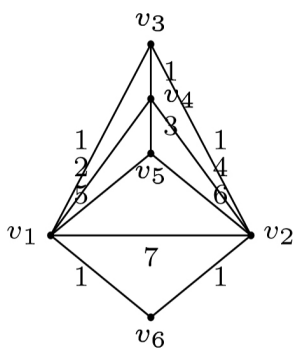


Figure 1. The coloring of T_6^-

图 1. T_6^- 的染色

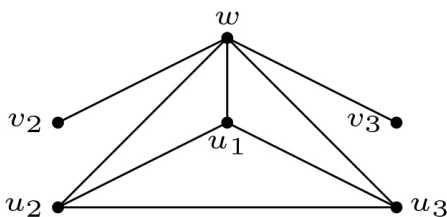
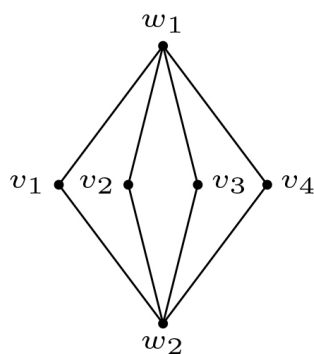


Figure 2. $s = 1, a_1 = 3$

图 2. $s = 1, a_1 = 3$

对于上界, 我们用反证法. 假设用 8 种颜色来染 T_6^- 的边, 此时 G 中不含彩虹 $3K_2$. 显然, T_6^- 中有彩虹 $2K_2$. 令 G 是 T_6^- 的彩虹生成子图, G 的边数 $E(G) = 8$. 由引理 2.1, 存在 $V(G)$ 的一个子集 S , 使得 $o(G - S) - |S| = 2$. 令 $|S| = s$, $o(G - S) - |S| = q$. 令 $G - S$ 的奇分支为 A_1, A_2, \dots, A_q , 其中 $|A_i| = a_i (1 \leq i \leq q)$, 不失一般性, 我们设 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_q \geq 1$. 令 $G - S$ 的偶分支为 $C(G) = G - \bigcup_{i=1}^q V(A_i) \cup S$. 由于 $q = s + 2$ 且 $s + q \leq 6$, 因此 $0 \leq s \leq 2$.

若 $s = 0, q = 2$. 如果 $a_1 \leq 3$, 那么 $|E(G)| \leq 6 < 8$, 与假设矛盾. 因此, $C(G) = \emptyset, a_1 = 5, a_2 = 1, |E(G)| \leq 3 \times 5 - 7 = 8$. 此时, 我们设 $V(A_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, V(A_2) = \{v_2\}$. 由 $|E(V(A_1))| = 8$ 可知, $V(A_1)$ 中至少存在三个点, 不妨设为 u_1, u_2, u_3 , 使得 $A_1 - u_i (i = 1, 2, 3)$ 包含一个彩虹四圈. 在 T_6^- 中, 点 v_2 与 $V(A_1)$ 中的三个点相邻, 也就是说 v_2 至少与 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 中的一个点相邻, 不妨设为 u_1 . 由引理 2.2, T_6^- 含有一个彩虹 $3K_2$, 与假设矛盾.

Figure 3. $s = 2, a_1 = 3$ 图 3. $s = 2, a_1 = 3$

若 $s = 1, q = 3$. 如果 $a_1 \leq 1$, 那么 $|E(G)| \leq 6 < 8$, 与假设矛盾. 因此, $C(G) = \emptyset$, $a_1 = 3, a_2 = a_3 = 1, |E(G)| \leq 5 + 3 = 8$. 此时, 我们设 $S = \{w\}$, $V(A_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V(A_i) = v_i (i = 2, 3)$ (详见图 2). 由 $|E(T_6^-)| = 11$ 可知, 在 $\{v_2, v_3\}$ 与 $\{u_2, u_3\}$ 中有 3 条边, 不妨设为 v_2u_2, v_3u_2, v_3u_2 . 分析可得, $c(v_2u_2) \in \{c(wv_3), c(u_1u_3)\}$, $c(v_3u_3) \in \{c(wv_2), c(u_1u_2)\}$. 此时, $\{v_2u_2, v_3u_3, wu_1\}$ 构成一个彩虹 $3K_2$, 与假设矛盾.

若 $s = 2, q = 4, |E(G)| \leq 2 \times 4 = 8$. 此时, 我们设 $S = \{w_1, w_2\}$, $V(A_i) = \{v_i\} (i = 1, 2, 3, 4)$ (详见图 3). 分析可得, $c(v_1v_2) \in \{c(w_1v_3), c(w_2v_4)\}$. 此时, $\{v_1v_2, w_1v_3, w_2v_4\}$ 构成一个彩虹 $3K_2$, 与假设矛盾.

由此上界得以证明. □

定理 3.2. 对任意的 $n \geq 7$, $AR(T_n^-, 3K_2) = n$.

证明. 首先证明下界. 取一个图 $G \in T_n^-$, 它的点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G) = \{v_1v_2\} \cup \{v_1v_i, v_1v_i | 3 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 3 \leq i \leq n-2\}$. 对于图 G , 首先把与 v_1 相邻的 $n-1$ 条边染上不同的颜色. 对于图 G 中剩下的边, 我们用第 n 种颜色来染. 此时, 图 G 中没有彩虹 kK_2 由此我们得到, 对任意的 $n \geq 7$, $AR(T_n^-, 3K_2) \geq n$.

对于上界, 我们用反证法. 假设用 $n+1$ 种颜色来染 T_n^- 的边, 此时 T_n^- 中不含彩虹 $3K_2$. 显然 T_n^- 中有彩虹 $2K_2$. 令 G 是 T_n^- 的彩虹生成子图, 显然 $E(G) = n+1$. 由引理 2.1, 存在 $V(G)$ 的一个子集 S , 使得 $o(G-S) - |S| = n-4$. 令 $|S| = s, o(G-S) - |S| = q$. 令 $G-S$ 的奇分支为 A_1, A_1, \dots, A_q , 令 $|A_i| = a_i (1 \leq i \leq q)$. 不失一般性, 我们设 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_q \geq 1$. 令 $G-S$ 的偶分支为 $C(G) = G - \bigcup_{i=1}^q V(A_i) \cup S$. 由于 $q = s + n - 4$ 且 $s + q \leq n$, 因此 $0 \leq s \leq 2$.

若 $s = 0, q = n-4$. 当 $a_1 \leq 3$ 时, 有 $|E(G)| \leq 6 < n-1$, 与假设矛盾. 因此, $C(G) = \emptyset$, $a_1 = 5, a_2 = a_2 = \dots = a_q = 1, |E(G)| \leq 3 \times 5 - 7 = 8$. 所以, $n = 7$. 令 $V(A_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, V(A_2) = \{v_2\}, V(A_3) = \{v_3\}$. 我们可以得到在 $V(A_1)$ 至少存在 3 个点, 不妨设为 u_1, u_2, u_3 , 使得 $A_1 - u_i (i = 1, 2, 3)$ 包含一个彩虹四圈. 由引理 2.2 可得 $v_2v_3 \notin T_7^-$, 即 $|E(T_7^-)| = |E(A_1)| + |E(A_1, v_2)| + |E(A_1, v_3)|, |E(A_1, v_2)| + |E(A_1, v_3)| = |E(T_7^-)| - |E(A_1)| = 6$. 分析可得, 在 T_7^- 中, $\{v_2, v_3\}$ 与 $u_i (i = 1, 2, 3)$ 一定相邻. 不妨设 $u_1v_2 \in T_7^-$, 已知 $A_1 - u_1$ 包含一个

彩虹四圈, 由引理2.2 可得 T_7^- 中存在一个彩虹 $3K_2$, 与假设矛盾.

若 $s = 1, q = n - 3$. 如果 $|C(G)| = 2$, 那么 $|E(G)| \leq n - 1 + 1 = n < n + 1$, 与假设矛盾. 因此 $C(G) = \emptyset, a_1 = 3, a_2 = a_3 = \dots = a_q = 1$. 令 $S = \{w\}, A_1 = \{u_1, u_2, u_3\}, V(A_i) = \{v_i\} (i = 2, 3, \dots, n - 3), V = \{v_2, v_3, \dots, v_{n-3}\}$. 由 A_1 具有因子临界性可得 A_1 同构于 K_3 且 $|E(S, V(A_1) \cup V)| = n - 2$. 不失一般性, 我们分 $wu_1 \notin E(G)$ 或者 $wu_{n-3} \notin E(G)$ 两种情况讨论. 此时, $wu_2, wu_3 \in E(G), wv_i \in E(G) (i = 2, 3, \dots, n - 4)$. 如图 4, 令 $c(u_1u_2) = 1, c(u_1u_3) = 2, c(u_2u_3) = 3, c(wu_2) = 4, c(wu_3) = 5, c(wv_2) = 6, c(wv_3) = 7$. 由于 $G(S \cup V(A_1))$ 包含一个彩虹四圈, 由引理2.2 我们有 $E_{T_n^-}(V) = \emptyset$. 由于 $E(A_1, V) = 3n - 7 - (n + 1) = 2n - 8$, 即 V 中的每一个点都至少与 A_1 中的两个点相邻. 不妨设 $v_2u_3, v_3u_1 \in E(T_n^-)$. 当 $wu_1 \in E(G), wv_{n-3} \notin E(G)$ 时, 由 T_n^- 不含彩虹 $3K_2$, 所以 $c(v_2u_3) \in \{1, 7\}, c(v_3u_1) \in \{3, 6\}$. 此时, $\{v_2u_3, v_3u_1, wu_2\}$ 是一个彩虹 $3K_2$, 与假设矛盾. 当 $wu_1 \notin E(G), wv_{n-3} \in E(G)$ 时, 令 $c(wv_4) = 8$. 由于 T_n^- 不含彩虹 $3K_2$, 所以 $c(v_2u_3) \in \{1, 7\} \cap \{1, 8\}$. 因此, $c(v_2u_3) = 1$. 由于 T_n^- 不含彩虹 $3K_2$, 所以 $c(v_3u_1) = 7$. 此时, $\{v_2u_3, v_3u_1, wv_4\}$ 是一个彩虹 $3K_2$, 与假设矛盾.

若 $s = 2, q = n - 2$. 此时 $|C(G)| = \emptyset, a_1 = a_2 = \dots = a_{n-2} = 1$. 令 $S = \{w_1, w_2\}, V(A_i) = \{v_i\} (i = 1, 2, \dots, n - 2), V = \{v_2, v_3, \dots, v_{n-2}\}$. 当 $w_1w_2 \notin E(G)$ 时, 在 V 中至少有三个点的度为 2. 不失一般性, 我们设 $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = 2$. 简单分析可得 $G[w_1, w_2, v_i, v_j] (1 \leq i, j \leq 3)$ 包含一个彩虹四圈, 由引理2.2 可得 $E_{T_n^-}(V) = \emptyset$ 且 $E_{T_n^-}(\{v_i\}, \{v_4, v_5, \dots, v_{n-2}\}) = \emptyset (i = 1, 2, 3)$. 因此, $E_{T_n^-} \leq 2(n - 2) + 1 + 3 = 2n \leq 3n - 7$, 即 $n = 7$. 此时 w_1, w_2, v_1, v_2, v_3 与 K_5 同构, 这与 T_n^- 是平面图矛盾. 当 $w_1w_2 \in E(G)$ 时, 如果在 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$ 中至少有三个点的度为 2. 不失一般性, 我们设 $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = 2$, 由前面的证明可以推出矛盾. 因此, 在 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$ 中只存在两个点的度为 2. 不失一般性, 我们设 $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 2, d_G(v_3) = \dots = d_G(v_{n-2}) = 1$. 不失一般性, 令 $\{w_1v_3, w_2v_4\} \subseteq E(G)$. 由于 $E(\{w_1, w_2\}, V) = 3n - 7 - (n + 1) = 2n - 8$, 即 V 中的每个点都与 w_1, w_2 相邻. 简单分析可得 $c(v_2v_3) \in \{c(w_1v_1), c(w_2v_4)\}, c(v_1v_4) \in \{c(w_1v_3), c(w_2v_2)\}$. 此时, $\{w_1w_2, v_2v_3, v_1v_4\}$ 是一个彩虹 $3K_2$, 与假设矛盾.

由此, 我们证明了 $n \geq 7, AR(T_n^-, 3K_2) \leq n$. □

定理 3.3. 对任意的 $n \geq 8, AR(T_n^-, 4K_2) = 2n - 2$.

证明. 首先证明下界. 取一个图 $G \in T_n^-$, 它的点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G) = \{v_1v_2\} \cup \{v_1v_i, v_1v_i | 3 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1} | 3 \leq i \leq n - 2\}$. 对于图 G , 首先把所有与 v_1, v_2 相邻的 $2n - 3$ 条边染上不同的颜色. 对于图 G 中剩下的边, 我们用同一种新的颜色来染. 此时, 图 G 中没有彩虹 $4K_2$ 由此我们得到, 对任意的 $n \geq 8, AR(T_n^-, 4K_2) \geq 2n - 2$.

对于上界, 我们用反证法. 假设用 $2n - 1$ 种颜色来染 T_n^- 的边, 此时 T_n^- 中不含彩虹 $4K_2$. 显然, T_n^- 中有彩虹 $3K_2$. 令 G 是 T_n^- 的彩虹生成子图, 显然, $E(G) = 2n - 1$. 此时, G 中含有彩虹 $3K_2$ 而不含彩虹 $4K_2$. 由引理2.1, 存在 $V(G)$ 的一个子集 S , 使得 $o(G - S) - |S| = n - 6$. 令 $|S| = s, o(G - S) - |S| = q$. 令 $G - S$ 的奇分支为 A_1, A_1, \dots, A_q 其中 $|A_i| = a_i (1 \leq i \leq q)$. 不失一般性, 我们设 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_q \geq 1$. 令 $G - S$ 的偶分支为 $C(G) = G - \bigcup_{i=1}^q V(A_i) \cup S$. 由于 $q = s + n - 6$ 且 $s + q \leq n$, 因此 $0 \leq s \leq 3$.

若 $s = 0, q = n - 6$. 当 $a_1 \leq 5$ 时, $|E(G)| \leq 3 \times 5 - 7 = 11 < 2n - 1$, 与假设矛盾. 因此 $a_1 = 7, a_2 = a_3 = \dots = a_q = 1$. 此时 $|E(G)| \leq 3 \times 7 - 7 = 14 < 2n - 1$, 与假设矛盾.

若 $s = 1, q = n - 5$. 当 $a_1 \leq 3$ 时, $|E(G)| \leq n - 1 + 6 = n + 5 < 2n - 1$, 与假设矛盾. 因此 $a_1 = 5, a_2 = a_3 = \dots = a_q = 1$. 此时 $|E_G(S \cup V(A_1))| \leq 3 \times 6 - 7 = 11, |E(G)| \leq 11 + n - 6 = n + 5 < 2n - 1$, 与假设矛盾.

若 $s = 2, q = n - 4$. 此时 $a_1 \leq 3, a_2 = a_3 = \dots = a_q = 1$. 令 $S = \{w_1, w_2\}, A_i = \{v_i\} (2 \leq i \leq q)$. 显然, $H = G[\{w_1, w_2, v_2, \dots, v_{n-2}\}] - E_G(\{w_1, w_2\})$ 是一个有 $n - 3$ 个点的二部平面图. 因此, $|E(H)| \leq 2(n - 3) - 4 = 2n - 10, |E_G(S \cup C(G) \cup V(A_1))| \leq 3 \times 5 - 7 = 8$. 所以 $|E(G)| \leq 8 + |E(H)| = 2n - 2 < 2n - 1$, 与假设矛盾.

若 $s = 3, q = n - 3, a_2 = a_3 = \dots = a_q = 1$. 令 $S = \{w_1, w_2, w_3\}, V(A_i) = \{v_i\} (1 \leq i \leq n - 3), V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 显然, $G - \{e | e \in E_G(S)\}$ 是一个有 n 个点的二部平面图, 即 $|E(G)| \leq 2n - 4 + 3 = 2n - 1$. 此时, $G[S] \cong K_3$, 不失一般性, 设 $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 3, d_G(v_i) = 2 (3 \leq i \leq n - 3)$. 显然, $v_1 v_2 \notin E(T_n^-)$, 否则 $T_n^-(S \cup \{v_1, v_2\}) \cong K_5$, 这与 T_n^- 是平面图矛盾. 由平面图不含 $K_{3,3}$ 可得 $E(T_n^-) \setminus E(G)$ 的端点都在 V 中. 我们观察到 $G[w_1, w_2, w_3, v_1, v_2, v_i] (3 \leq i \leq n - 3)$ 包含一个彩虹六圈. 由引理 2.3 可得 $E_{T_n^-}(\{v_1 v_2, \dots, v_{n-3}\}) = \emptyset$. 所以 $|E_{T_n^-}(\{v_1, v_2\}, \{v_3 v_4, \dots, v_{n-3}\})| = 3n - 7 - (2n - 1) = n - 6 \geq 2$. 令 $a = |E_{T_n^-}(\{v_1\}, \{v_3 v_4, \dots, v_{n-3}\})|, b = |E_{T_n^-}(\{v_2\}, \{v_3 v_4, \dots, v_{n-3}\})|$. 不失一般性, 我们设 $a \geq b$. 当 $n \geq 9$ 时我们有 $a \geq 2$. 令 $v_1 v_3 \in T_n^-$, 如果 $c(v_2 v_i) \neq c(v_1 v_3) (1 \leq i \leq 3)$, 那么 $v_1 v_3$ 和 $E_G[w_1, w_2, w_3, v_2, v_4, v_5]$ 构成一个彩虹 $4K_2$, 与假设矛盾. 如果 $b \geq 1$, 此时存在两条边, 不妨设为 $v_1 v_3, v_2 v_4$, 我们有 $c(v_1 v_3) \in \{c(v_2 w_1), c(v_2 w_2), c(v_2 w_3)\}, c(v_2 v_4) \in \{c(v_1 w_1), c(v_1 w_2), c(v_1 w_3)\}$. 此时, $v_1 v_3, v_2 v_4$ 和 $E_G(\{w_1, w_2, w_3, v_5\})$ 组成一个彩虹 $4K_2$, 与假设矛盾. 如果 $b = 0$, 此时 $v_1 v_i \in T_n^- (3 \leq i \leq n - 3)$. 由平面图不含 $K_{3,3}$ 可得, 存在两个点 $v_i v_j (3 \leq i < j \leq 5)$, 使得 $N_S(v_i) \neq N_S(v_j)$. 不妨设 $i = 3, j = 4$, 此时 $G[\{v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3\}]$ 包含一个彩虹六圈. 由引理 2.3 以及 $v_1 v_5 \in E_{T_n^-}$ 可得 T_n^- 有一个彩虹 $4K_2$, 与假设矛盾. 当 $n = 8$ 时, 我们有 $a + b = 2$. 当 $a = b = 1$ 时与 $n \geq 9$ 的情况相同. 当 $a = 2, b = 0$ 时, 不妨设 $\{v_1 v_3, v_1 v_4\} \subset E(T_n^-)$. 由于 $d_G(v_4) = d_G(v_5) = 2$, 不失一般性, 我们设 $\{v_4 w_1, v_4 w_2, v_5 w_1, v_5 w_2\} \subset E(G)$, 此时 $\{v_4 w_1, v_5 w_2, v_2 w_3, v_1 v_3\}$ 是一个彩虹 $4K_2$, 与假设矛盾.

由此, 我们证明了对任意的 $n \geq 8, AR(T_n^-, 4K_2) \leq 2n - 2$. □

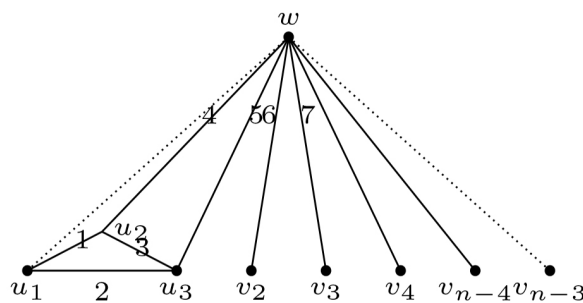


Figure 4. $wu_1 \in E(G)$ or $wv_{n-3} \in E(G)$

图 4. $wu_1 \in E(G)$ 或 $wv_{n-3} \in E(G)$

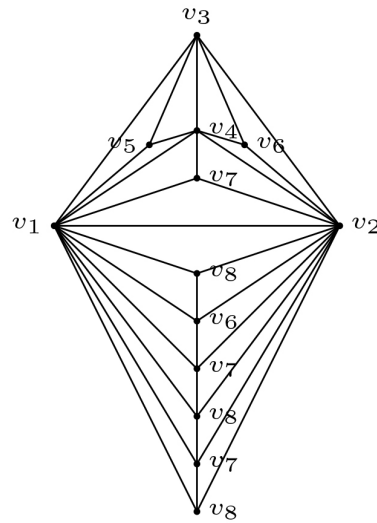


Figure 5. $k = 6, n = 13$

图 5. $k = 6, n = 13$

4. 彩虹 kK_2

定理 4.1. 对任意的 $k \geq 6$ 且 $n \geq 3k - 7$, $2n + 3k - 16 \leq AR(T_n^-, kK_2) \leq 2n + 4k - 15$.

证明. 首先证明下界. 我们构造一个图 $G \in T_n^-$ 它的点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 我们在 $k-4$ 路 $P_1 = v_2v_3 \cdots v_{k-2}$ 的基础上构造图 G . 第一步, 我们在 P_1 的基础上添加一条边 v_1v_2 , 令 P_1 上的每一个点都分别与 v_1 和 v_2 相邻, 其中 $v_1v_3v_2$ 是外面. 第二步, 在 $v_1v_i v_{i+1}, v_2v_i v_{i+1} (3 \leq i \leq k-3)$ 以及 $v_1v_2v_{k-2}$ 的内部分别添加一个点, 添加的 $2k-9$ 点依次为 $v_{k-1}, \dots, v_{3k-11}$. 令添加的点与圈上的三个点都相邻, 此时我们得到了一个有 $3k-11$ 个点的平面三角剖分图. 第三步, 添加一条 $n-3k+11$ 路 $P_2 = v_{3k-11}v_{3k-10} \cdots v_{3k-7}$, 令 P_2 上的每一个点都分别与 v_1 和 v_2 相邻, 其中 $v_1v_3v_2v_{3k-7}$ 是外面. 由此, 我们构造出图 G . 我们在图 5 中给出 $k=6$ 的具体构造方法. 对于图 G , 我们把 P_2 路上的所有边染上颜色 1, 剩下的所有边染上 $2n-3k-17$ 种不同的颜色. 此时, 图 G 中不含彩虹 kK_2 . 由此我们得到, 对任意的 $k \geq 6$ 且 $n \geq 3k-7$, $AR(T_n^-, kK_2) \geq 2n+3k-16$.

对于上界, 我们用反证法. 假设, 存在 $k \geq 6$ 且 $n \geq 3k-7$, 使得 $AR(T_n^-, kK_2) \geq 2n+3k-14$. 那么, 存在 T_n^- 的一个 $2n+3k-14$ 边染色, 使得图 T_n^- 不含彩虹 kK_2 . 令 G 是 T_n^- 的彩虹生成子图, 显然 $E(G) = 2n+3k-14$. 此时, G 中含有彩虹 $(k-1)K_2$ 而不含彩虹 kK_2 . 令 $M = \{u_i w_i \in E(G) : 1 \leq i \leq k-1\}$ 是 G 中的彩虹 $(k-1)K_2$. 令 $V(M) = \{u_1, \dots, u_{k-1}, w_1, \dots, w_{k-1}\}$, $R = V(G) \setminus V(M)$. 对于 $i \in [k-1]$, 我们不妨假设 $|N_G(u_i) \cap R| \leq |N_G(w_i) \cap R|$. 由于图 G 中的最大匹配数为 $k-1$, 我们可以得到 $G[R] = \emptyset$ 且 w_i 时 $v_i (1 \leq i \leq k-1)$ 在 R 中没有公共邻点. 对任意的 $i \in [k-1]$, 当 $|N_G(u_i) \cap R| = 0$ 有 $|N_G(w_i) \cap R| \geq 0$, 当 $|N_G(u_i) \cap R| = 1$ 时有 $N_G(u_i) \cap R = N_G(w_i) \cap R$. 我们不妨设, 当 $1 \leq i \leq l$ 时, 有 $|N_G(u_i) \cap R| = 1$. 当 $l+1 \leq i \leq k-1$ 时, 有 $|N_G(u_i) \cap R| = 0$. 我们有 $|E_G(\{u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_l\}, R)| = 2l$. 令 $L = \{w_{l+1}, \dots, w_{k-1}\}$. 当 $l = k-1$ 时, 有 $|E_G(L, R)| = 0$. 当 $l \leq k-2$ 时, 有 $|E_G(L, R)| \leq 2(n-(k-1)-l)-4 = 2n-2k-2l-2$. 由 $|E_G(M)| \leq 3(2k-2)-7 = 6k-13$ 得, $|E(G)| = |E_G(M)| + |E_G(\{u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_l\}, R)| +$

$|E_G(L, R)| \leq (6k - 12) + 2l + (2n - 2k - 2l - 2) = 2n + 4k - 15$, 这与我们的假设矛盾. 由此我们得到, 对任意的 $k \geq 6$ 且 $n \geq 3k - 7$, $AR(T_n^-, kK_2) \leq 2n + 4k - 15$. \square

参考文献

- [1] Erdős, P., Simonovits, M. and Sós, V.T. (1973) Anti-Ramsey Theorems. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **10**, 657-665.
- [2] Li, X.L. and Xu, Z.X. (2009) The Rainbow Number of Matchings in Regular Bipartite Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 1525-1528.
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.03.019>
- [3] Schiermeyer, I. (2004) Rainbow Numbers for Matchings and Complete Graphs. *Discrete Mathematics*, **286**, 157-162.
- [4] Jendrol', S., Schiermeyer, I. and Tu, J.H. (2014) Rainbow Numbers for Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **331**, 158-164.
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.05.012>
- [5] Qin, Z.M., Lan, Y.X., Shi, Y.T. and Yue, J. (2021) Exact Rainbow Numbers for Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **344**, Article ID: 112301.
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112301>