Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(7), 1272-1276
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.87148

Hans汉斯

Polychromatic Colorings of Some Plane Graphs

Shizhen Zhang

School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: fczsz218@126.com

Received: July 4th, 2019; accepted: July 19th, 2019; published: July 26th, 2019

Abstract

A k-polychromatic coloring of a plane graph G is a vertex coloring of G with k colors in such a way that each color appears on the boundary of each face. The maximum nonnegative integer k is called the polychromatic number of G and denoted by $p(G)$. In 2009, Alon *et al.* proved that each plane graph has $p(G) \geq \lfloor (3g-5)/4 \rfloor$ colors, where g is the minimum face size of G. Basing on the simplified dual graph $H(G)$ of a plane graph G, we discuss some cases for that $H(G)$ is an even cycle, an odd cycle or a star and improve the lower bound $\lfloor (3g-5)/4 \rfloor$ to $\lfloor (3g-5+w)/4 \rfloor$, where w is the sum of weights for disjoint edge covers of $H(G)$.

Keywords

Planar Graphs, Polychromatic Coloring, Guarding Problems

一类平面图的多色染色问题

张世桢

山东师范大学数学与统计学院，山东 济南
Email: fczsz218@126.com

收稿日期：2019年7月4日；录用日期：2019年7月19日；发布日期：2019年7月26日

摘　要

一个平面图G的一个多色k-染色是一个k种颜色的点染色，每一种颜色都会出现在每个面的边界上。最大的非负整数k称为G的多色染色数，记为$p(G)$。2009年Alon等人证明了每个平面图都有多色染色数

文章引用: 张世桢. 一类平面图的多色染色问题[J]. 应用数学进展, 2019, 8(7): 1272-1276.
DOI: 10.12677/aam.2019.87148

$p(G)\ge\lfloor(3g-5)/4\rfloor$，其中$g$是$G$的最小面的规模。以平面图$G$的简化对偶图$H(G)$为基础，我们讨论了当$H(G)$为一个偶圈、奇圈、星时将下界$\lfloor(3g-5)/4\rfloor$提高成$\lfloor(3g-5+w)/4\rfloor$的形式，其中$w$是$H(G)$的不相交的边覆盖的权重之和。

关键词

平面图，多色染色，保护问题

1. 引言

在这篇文章中我们只考虑无向有限简单图。平面图是指能够嵌入到平面内的图。设 G 为一个平面图，其点集、边集和面集分别记为$V(G)$、$E(G)$和$F(G)$。一个面 f 的规模是它的边界上的顶点数，记为$g(f)$。$g(G)$定义为这个图 G 中最小面的规模：$g(G)=\min\{g(f)\mid f\in F(G)\}$。图 G 的顶点的 k-染色是一种映射 $\varphi:V(G)\to\{1,\cdots,k\}$。如果任意两个相邻的点染不同颜色则称 φ 为正常染色。如果所有 k 种颜色都出现在一个面 $f\in F(G)$ 上，则称这个面为多色的。如果一个顶点的 k-染色 φ 使得 G 的每个面都是多色的，则称 φ 为图 G 的一个多色 k-染色。G 的多色染色数 $p(G)$是使得 G 存在多色 k-染色时最大的 k。对于任意的平面图 G，定义：

$$p(g)=\min\{p(G)\mid g(G)=g\}$$

很显然对任意的平面图 G 都有 $p(g(G))\le p(G)\le g(G)$。1969 年 Lovász [1]证明了每个简单平面图 G 都有 $p(G)\ge 2$。1999 年 Mohar 和 Škrekovski [2]使用四色定理对 Lovász 的结果给出了另一种证明。2009 年 Alon 等人[3]给出了对于一般平面图的多色染色数的上下界。

定理 1.1 [3] $p(1)=p(2)=1$，$p(3)=p(4)=2$，当 $g\ge 5$ 时，

$$\left\lfloor\frac{3g-5}{4}\right\rfloor\le p(g)\le\left\lfloor\frac{3g+1}{4}\right\rfloor$$

从定理 1.1 可以看出，当 $g\ge 5$ 时 $p(g)$ 的取值范围是 2 个或者 3 个整数。

平面图的多色染色在组合学和计算几何中有着很多应用，以下是 1975 年 Chvátal [4]提出并且证明的艺术画廊定理。

定理 1.2 [4] 设 P 是一个有 n 个顶点的多边形，则$\lfloor n/3\rfloor$个顶点足够用来保护 P。

定理 1.2 说明在 P 中存在一个含有$\lfloor n/3\rfloor$个点的点集 S，使得 S 中的点可以监测到整个多边形 P 的面，此时称为 S 保护 P，S 称为保护集。保护问题与多色染色问题有着密切联系。对于平面图 G，寻找最小的点集 S 使得 G 的每个面都与 S 中至少一个点关联。其实 G 的多色染色中每种颜色对应的点集是一个保护集，因为每种颜色都会出现在所有面上，每种颜色对应的点共同保护了 G。

2012 年 Horev 等人[5]研究了最大度 3 的二部图的多色 4-染色问题并证明了以下定理：

定理 1.3 [5] 最大度 3 的二部图是正常多色 4-可染的。

如果存在一个平面嵌入使得图中所有顶点都属于外平面，则这样的平面图称为外平面图。在外平面

图中最小面的规模等于最小圈的长度(围长)。以下定理表明了对于 $g(G)\ge 3$ 的外平面图多色染色数的非平凡上界 $p(G)\le g(G)$ 是紧的。

定理 1.4 [3] 设 G 是一个外平面图且满足 $g = g(G)\ge 3$，则 G 存在一种使用 g 种颜色的多色正常染色。

通过上面的结果我们可以看到对于一些类别的图可以将多色染色数 $p(g)$ 提高到 g，而通过定理 1.1 可知 $p(g)$ 的范围由 g 唯一决定，现在我们考虑一类平面图，在这类图中可以将多色染色数的下界 $\lfloor(3g-5)/4\rfloor$ 提高。

考虑一类含有较多二度点的平面图，这些二度点在两个面的共同边界上，这些点染上的颜色会同时出现在两个面上。若能在一个平面图 G 的每个面的边界上收缩 w 个二度点，则在所得平面图 G' 中最小面的规模减小为 $g-w$，根据定理 1.1 可知此时 $p(G')\ge\left\lfloor\frac{3(g-w)-5}{4}\right\rfloor$。再将之前每个面上收缩的 w 个二度点恢复，并且将这些点染 w 种不同颜色，这样每个面都增加了 w 种新颜色，从而 $p(G)\ge\left\lfloor\frac{3(g-w)-5}{4}\right\rfloor+w=\left\lfloor\frac{3g-5}{4}+\frac{w}{4}\right\rfloor$。当 $w\ge 4$ 时这个下界严格高于 $\left\lfloor\frac{3g-5}{4}\right\rfloor$，部分改进了定理 1.1 的下界。

2. 简化对偶图的构造

定义 2.1 设 G 是含有较多二度点的平面图，我们定义简化对偶图 $H = H(G) = (V(H), E(H))$：

1) 定义点集 $V(H) = F(G)$，即 G 的每个面对应 H 的每个点；

2) 定义边集 $E(H) = \{uv \mid$面 u 与面 v 有公共的边界路$\}$，即这两个面的公共边界上有二度点。特别地，如果两个平面的公共边界上有多条边界路，在简化对偶图中对应两点也只有一条边。显然 H 的边对应的是原图中两个面公共的边界路；

3) 设 e 为 H 中的边，定义边的权重 $w(e)$为 e 连接的两个点对应的面上公共的二度点数。

这样定义的简化对偶图 H 也是简单平面图。

若 H 的边集 $E(H)$的子集 E_i 满足 $\bigcup_{e\in E_i} = V(H)$，即 E_i 中的边可以包含 H 的所有点，则称 E_i 为 H 的一个边覆盖。

3. 主要结果

定理 3.1 假设 G 是一个平面图，最小面的规模为 g，$H = H(G)$是它的简化对偶图。如果 H 是一个偶圈，则 $E(H)$可以分解成两个不相交的匹配 E_1 和 E_2，并且

$$p(g)\ge\left\lfloor\frac{3g-5+w_1+w_2}{4}\right\rfloor,\quad w_i=\min\{w(e)\mid e\in E_i\}。$$

证明 设 $H = C_{2k} = v_1v_2\cdots v_{2k}v_1$，则 H 有 2 个不相交的匹配 $E_1=\{v_{2i-1}v_{2i}\mid 1\le i\le k\}$ 和 $E_2=\{v_{2i}v_{2i+1}\mid 1\le i\le k-1\}\cup\{v_{2k}v_1\}$。令 $w_j=\min\{w(e)\mid e\in E_j\}$，$j=1,2$。在 E_1 中每条边对应公共边界路上去掉任意 w_1 个 2-点，再在 E_2 中每条边对应公共边界路上去掉任意 w_2 个 2-点，得到平面图 G'，$g(G') = g-w_1-w_2$。根据定理 1.1，可给出 G' 的 $\left\lfloor\frac{3(g-w_1-w_2)-5}{4}\right\rfloor$ 种颜色的多色染色 φ'，再将 G' 恢复为 G，基于染色 φ' 得到 G 的部分染色 φ。注意到 G 的每个面上恰有 w_1+w_2 个 2-点未染色，现在用不同于 φ 中的 w_1+w_2 个新颜色去染每个面上的未染色点，则每个面上可以出现这 w_1+w_2 个新颜色。显然有

$$p(G)\ge\left\lfloor\frac{3(g-w_1-w_2)-5}{4}\right\rfloor+w_1+w_2=\left\lfloor\frac{3(g-w_1-w_2)-5}{4}+\frac{4(w_1+w_2)}{4}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{3g-5+w_1+w_2}{4}\right\rfloor$$

定义 3.2 设 v 是 H 中的点且 $d_H(v)\ge 2$，v 在原图中对应的面规模为 $g(v)$，定义点权 $w(v)=\left\lfloor\frac{g(v)-g}{d_H(v)-1}\right\rfloor$。

定理 3.3 假设 G 是一个平面图，最小面的规模为 g，$H=H(G)$ 是它的简化对偶图。如果 H 是一个奇圈，$H=C_{2k+1}=v_0v_1\cdots v_{2k}$，则 C_{2k+1} 有 $2k+1$ 个不同的最小边覆盖 E_i（$0\le i\le 2k$），并且

$$p(g)\ge\left\lfloor\frac{3g-5+w}{4}\right\rfloor \text{ 其中 } w=\max_{0\le i\le 2k}\left\{\min\left\{w(v_i),w(e)\mid e\in E_i\right\}\right\}。$$

证明 设 $H=C_{2k+1}=v_0v_1\cdots v_{2k}$，则 C_{2k+1} 有 $2k+1$ 个不同的最小边覆盖 E_i（$0\le i\le 2k$）。对任意 $0\le i\le 2k$，点 v_i 对应的 H 的最小边覆盖记为 $E_i=\left\{v_{i-1}v_i,v_iv_{i+1},v_{i+2j}v_{i+1+2j},1\le j\le k-1\right\}$（下标模 $2k+1$），令 $w_i=\min\left\{w(v_i),w(e)\mid e\in E_i\right\}$。对每个 E_i 都可进行下列操作：在图 G 中对 E_i 中每条边对应的公共边界路上去掉任意 w_i 个 2-点，得到平面图 G_i。面 v 在 G_i 中的规模记为 $g_i(v)$，对于任意的 $v\ne v_i$，$g_i(v)=g(v)-w_i$。对于面 v_i：由 $w_i\le w(v_i)=g(v_i)-g$，有

$$g_i(v_i)=g(v_i)-2w_i=g-w_i+g(v_i)-g-w_i\ge g-w_i,$$

所以 G 中规模最小的面在 G_i 中仍然规模最小，所以 $g(G_i)=g-w_i$。由定理 1.1 可给出 G_i 的 $\left\lfloor\frac{3(g-w_i)-5}{4}\right\rfloor$ 种颜色的多色染色 φ_i'。将 G_i 恢复为 G，基于 φ_i' 染色得到 G 的部分染色 φ。注意到 G 中除 v_i 以外的面上恰有 w_i 个 2-点未染色，（v_i 对应面上有 $2w_i$ 个 2-点未染色），现在用不同于 φ 中的 w_i 种新颜色去染每个面上的未染色点，则每个面上可以出现这 w_i 种新颜色，容易看出 v_i 对应面上这 w_i 种新颜色各出现 2 次。显然 $p(G)\ge\left\lfloor\frac{3(g-w_i)-5}{4}\right\rfloor+w_i=\left\lfloor\frac{3g-5+w_i}{4}\right\rfloor$。对所有 E_i，令 $w=\max\limits_{0\le i\le 2k}w_i$，显然有

$$p(G)\ge\max_{0\le i\le 2k}\left\lfloor\frac{3(g-5)+w_i}{4}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{3g-5+w}{4}\right\rfloor。$$

定理 3.4 假设 G 是一个平面图，最小面的规模为 g，$H=H(G)$ 是它的简化对偶图。如果 H 是一个星，v_0 是星的中心点，令 $w_s=\min\left\{w(v_0),w(e_i)\mid e_i\in e(H)\right\}$，则

$$p(g)\ge\left\lfloor\frac{3g-5+w_s}{4}\right\rfloor。$$

证明 设 $H=K_{1,n}$，存在唯一的边覆盖 $E_1=E(H)$，星中心点 v_0 满足 $d_H(v_0)=n>1$。在 E_1 中每条边对应的公共边界路上去掉任意 w_s 个 2-点，得到平面图 G'。面 v 在 G' 中的规模记为 $g'(v)$，对于任意的 $v\ne v_0$，$g'(v)=g(v)-w_s$。对于面 v_0：

由 $w_s\le w(v_0)=\left\lfloor\frac{g(v_0)-g}{d_H(v_0)-1}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{g(v_0)-g}{n-1}\right\rfloor$，$g'(v_0)=g(v_0)-nw_s=g-w_s+g(v_0)-g-(n-1)w_s\ge g-w_s$，

所以 G 中规模最小的面在 G' 中仍然规模最小，所以 $g(G')=g-w_s$。由定理 1.1 可给出 G' 的 $\left\lfloor\frac{3(g-w_s)-5}{4}\right\rfloor$ 种颜色的多色染色 φ'。将 G' 恢复为 G，基于 φ' 染色得到 G 的部分染色 φ。注意到 G 中除 v_0 以外的面上恰有 w_s 个 2-点未染色，（v_0 对应面上有 nw_s 个 2-点未染色），现在用不同于 φ 中的 w_s 种新颜色去染每个面上的未染色点，则每个面上可以出现这 w_s 种新颜色，容易看出 v_0 对应面上这 w_s 种新颜

色各出现 n 次。显然 $p(G) \geq \left\lfloor \frac{3(g-w_s)-5}{4} \right\rfloor + w_s = \left\lfloor \frac{3g-5+w_s}{4} \right\rfloor$。

致　谢

在论文完成之际我要特别感谢我的导师张霞副教授。本文是在张霞副教授的悉心指导和严格要求下完成的，她对文章的每个章节和字词都仔细检查和指导，付出了自己的大量时间，她严肃的科研态度、严谨的治学精神、精益求精的工作作风一直激励着我，督促我不断改进自身不足和探索进取。在此我向我的导师致以深深的谢意。最后我向各位尊敬的评审专家致以最诚挚的感谢，谢谢你们对本论文做出的评审以及提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Lovász, L. (1969 and 2007) Combinatorial Problems and Exercises. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island. https://doi.org/10.1090/chel/361

[2] Mohar, B. and Skrekovski, R. (1999) The Grötzsch Theorem for the Hypergraph of Maximal Cliques. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **6**, 1-13.

[3] Alon, N., Berke, R., Buchin, K., Buchin, M., Csorba, P., Shannigrahi, S., Speckmann, B. and Zumstein, Ph. (2009) Polychromatic Colorings of Plane Graphs. *Discrete Computational Geometry*, **42**, 421-442. https://doi.org/10.1007/s00454-009-9171-5

[4] Chvátal, V. (1975) A Combinatorial Theorem in Plane Geometry. *Journal of Combinatorial Theory* (*B*), **18**, 39-41. https://doi.org/10.1016/0095-8956(75)90061-1

[5] Horev, E., Katz, M., Krakovski, R. and Nakamoto, A. (2012) Polychromatic 4-Coloring of Cubic Bipartite Plane Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 715-719. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.11.016