Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(6), 1064-1071
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.86122

Localization for Quasi-Periodic Operators with Two Parameters

Jun Wang

Department of Mathematics and Physics, Hohai University Changzhou Campus, Changzhou Jiangsu
Email: 32269829@qq.com

Received: May 12th, 2019; accepted: May 29th, 2019; published: Jun. 5th, 2019

Abstract

The main purpose of this paper is to prove localization for a kind of quasi-periodic operators $\left(H_{(\theta,\lambda,\omega)}u\right)(n)=a(n)u(n+1)+a(n-1)u(n-1)+v(n)u(n)$, where $|\lambda_1|<1,|\lambda_2|<1$, Diophantine number ω, full measured $\theta\in\mathbb{T}$ and $a(n)=\lambda_1+\lambda_2\cos 2\pi\left(\theta+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\right), v(n)=2\cos 2\pi(n\omega+\theta)$.

Keywords

Localization, Lyapunov Index, Quasi-Periodic

一类双参数拟周期算子的局域化问题

王　均

河海大学(常州)，基础学部数理部，江苏　常州
Email: 32269829@qq.com

收稿日期：2019年5月12日；录用日期：2019年5月29日；发布日期：2019年6月5日

摘　要

本文考虑了一类双参数拟周期算子：$\left(H_{(\theta,\lambda,\omega)}u\right)(n)=a(n)u(n+1)+a(n-1)u(n-1)+v(n)u(n)$ 其中 $a(n)=\lambda_1+\lambda_2\cos 2\pi\left(\theta+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\right), v(n)=2\cos 2\pi(n\omega+\theta)$，$\omega$ 是Diophantine数，利用改进的局域化方法证明了，当 $|\lambda_1|<1,|\lambda_2|<1$，对全测的 $\theta\in\mathbb{T}$，该算子 $H_{\theta,\lambda,\omega}$ 有Anderson局域化。

文章引用：王均. 一类双参数拟周期算子的局域化问题[J]. 应用数学进展, 2019, 8(6): 1064-1071.
DOI: 10.12677/aam.2019.86122

关键词

局域化，Lyapunov指数，拟周期

1. 研究背景

局域化是凝聚态物理所关心的重要问题之一。它描述了晶体被掺入杂质后，晶格周期性被破坏，Bloch 电子波函数不再扩展在整个晶体中，而是局域在杂质周围，在空间中按指数形式衰减的一种现象。是由 Anderson 在 1958 年提出的，故称为 Anderson 局域化。数学上，Anderson 局域化是指：算子的谱集是纯点谱，而且要求特征向量具有指数衰减性。

从上个世纪七十年代开始，很多物理学家和数学家围绕一类最简单的 Almost Mathieu 算子的谱问题进行研究，得到了包括谱类型，谱结构，谱测度等丰富的结论，详见文献[1] [2] [3] [4]。在著名的 Aubry-Andre 猜想中，详见文献[5]，局域化的结论期望对所有的$|\lambda|>1$，所有的无理数ω和所有的θ都成立，但被指出不成立，因为 Avron-Simon 在文献[6]中指出$|\lambda|>1$，ω是 Liouville，对所有的θ，算子具有纯奇异连续谱。之后 Jitomirskaya-Simon 在文献[7]指出当$|\lambda|>1$，ω是无理数，对通有的θ，具有纯奇异连续谱。所以，这个局域化的猜想只能期望对全测的ω和全测的θ成立，最近 Jitomirskaya 在文献[8]中证明了，ω是 Diophantine 数，对全测的θ，$|\lambda|>1$具有 Anderson 局域化，这是最优的结果。受此启发，我们考虑比 Almost Mathieu 算子更具一般性的的 Jacobi 算子如下：

$$\left(H_{(\theta,\lambda,\omega)}u\right)(n)=a(n)u(n+1)+a(n-1)u(n-1)+v(n)u(n), \tag{1.1}$$

其中$a(n)=\lambda_1+\lambda_2\cos 2\pi\left(\theta+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\right)$，$v(n)=2\cos 2\pi(n\omega+\theta)$，$\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2,\theta\in\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

特别当$\lambda_2=0$时，就回到经典 Almost-Mathieu 算子的情形。

本文的主要研究成果如下：

定理 1：对上述的双参数拟周期算子$H_{\theta,\lambda,\omega}$，当$\omega$是 Diophantine 数，$|\lambda_1|<1,|\lambda_2|<1$，对全测的$\theta\in\mathbb{T}$，$H_{\theta,\lambda,\omega}$具有 Anderson 局域化。

2. 理论基础

在这一部分，我们会介绍几个定义和引理。

定义 2.1：如果存在$c(\omega)>0,1<\tau(\omega)<\infty$对所有的$0\neq k\in\mathbb{Z}$有$|\sin\pi k\omega|>c(\omega)/|k|^{\tau(\omega)}$则称$\omega$满足 Diophantine 条件，记为$\omega\in DC(c,\tau)$。

定义 2.2：$\Theta_k(\omega,\alpha)=\left\{\theta:\exists j,|j|<3k^{\alpha},|\sin\pi(2\theta+j\omega)|<\mathrm{e}^{-\frac{k}{2\tau}}\right\},\Theta(\omega,\alpha)=\limsup\Theta_k(\omega,\alpha)$

如果$\theta\in\Theta(\omega,\alpha)$称$\theta$为共振相位。

下面设$A(\theta+n\omega)=\frac{1}{a(n)}\begin{pmatrix}E-v(n) & -a(n-1)\\ a(n) & 0\end{pmatrix},A_n(\theta)=\prod_{k=n}^{1}A(\theta+n\omega),P_n(\theta)=\det\left(H_{\theta,\lambda,\omega}-E|_{[1,n]}\right)$

由于底空间旋转是拟周期，根据 Birkhoff 遍历定理，可以定义系统(1.1)的 Lyapunov 指数：

$$L(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left\|A_n(\theta,E)\right\|\mathrm{d}\theta. \tag{2.1}$$

下面运用 Lyapunov 指数给出 $P_n(\theta)$ 的下界，通过计算：

$$0<L(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left\|h_n(\theta,E)\right\|\mathrm{d}\theta-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left\|a(1)\cdots a(n)\right\|\mathrm{d}\theta:=L(h(E))-\tilde{a}(\lambda), \tag{2.2}$$

其中

$$h_n(\theta):=\begin{pmatrix} P_n(\theta) & -a(0)P_{n-1}(\theta+\omega) \\ a(n)P_{n-1}(\theta) & -a(0)a(n)P_{n-2}(\theta+\omega)\end{pmatrix}$$

$$\overline{a}(\lambda)=\begin{cases} \ln\dfrac{\lambda_2}{2} & 0\le\lambda_1<\lambda_2<1 \\ \ln\left|\dfrac{\lambda_2^2}{-2\left(\lambda_2+\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\right)}\right| & 0\le\lambda_2\le\lambda_1<1\end{cases}$$

可以得到：

$$\overline{a}(\lambda)+L(E)=L(h(E))\le\frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left\|h_n(\theta,E)\right\|\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{e}^{n(\overline{a}(\lambda)+L(E))}\le\max_{\theta}\left\|\begin{pmatrix} P_n(\theta) & a(0)P_{n-1}(\theta+\omega) \\ -a(n)P_{n-1}(\theta) & a(0)a(n)P_{n-2}(\theta+\omega)\end{pmatrix}\right\|,$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{e}^{n(\overline{a}(\lambda)+L(E))}\le\max_{\theta}\max\left\{\left|P_n(\theta)\right|\left|P_{n-1}(\theta)\right|\left|P_{n-1}(\theta+\omega)\right|\left|P_{n-2}(\theta+\omega)\right|\right\}. \tag{2.3}$$

设 $K=\left\{k\in\mathbb{N}:\exists\theta\in[0,1],\frac{1}{8\sqrt{2}}\mathrm{e}^{(k+2)\overline{a}(\lambda)+kL(E)}\le\left|P_n(\theta)\right|\right\}$，显然 $\{k,k+1,k+2\}$ 中至少有一个属于 K。

下面给出 $P_n(\theta)$ 的上界估计：

引理 2.3：对所有的 $E\in\mathbb{R}$，ω 是无理数，$\varepsilon>0$，则存在 $k_3(\varepsilon,E,\omega)$，使得 $k>k_3(\varepsilon,E,\omega)$，对所有的 $\theta\in\mathbb{T}$，有：

$$\left|P_k(\theta,E)\right|\le\mathrm{e}^{k(L(h(E))+\varepsilon)}=\mathrm{e}^{k(\overline{a}(\lambda)+L(E)+\varepsilon)}. \tag{2.4}$$

证明：根据文献[8]，对 $\forall\varepsilon>0$，当 $k>K(\theta,\varepsilon,E,\omega)$ 有：

$\left|P_k(\theta,E)\right|\le\left|h_k(\theta,E)\right|\le\mathrm{e}^{k(L(h(E))+\varepsilon)}$ 对几乎所有的 $\theta\in\mathbb{T}$ 成立。

下面证明只要 k 充分大，对所有的 $\theta\in\mathbb{T}$ 成立。

因为 $P_k(\theta,E)=Q\left(\cos 2\pi\left(\theta+(k+1)\frac{\omega}{2}\right)\right)$ 是关于 $\cos\theta$ 的 k 次多项式。

设 $D_n=\left\{\theta\in(0,1):\left|Q(\cos 2\pi\theta)\right|\le\mathrm{e}^{k\left(L(h(E))+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right\}$，

用 $|D|$ 表示 D 的 Lebesgue 测度。则当 $n\to\infty,|D|\to0$，$\exists N>0,k>N$ 有:

$$\left|D_n^C\right|<\frac{1}{2}\left(1-c\left(\mathrm{e}^{k(L(h(E))+\varepsilon)},\mathrm{e}^{k\left(L(h(E))+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)\right). \tag{2.5}$$

假设存在 θ，使得 $\left|Q(\cos 2\pi\theta)\right| > \mathrm{e}^{k(L(h(E))+\varepsilon)}$，

则 $\left|\left\{\theta\in(0,1):\left|Q(\cos 2\pi\theta)\right| < \mathrm{e}^{k\left(L(h(E))+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right\}\right| \le c\left(\mathrm{e}^{k(L(h(E))+\varepsilon)},\mathrm{e}^{k\left(L(h(E))+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right) < 1.$

从而 $\left|D_n^C\right| > 1-c\left(\mathrm{e}^{k(L(h(E))+\varepsilon)},\mathrm{e}^{k\left(L(h(E))+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right) > 0$，与(2.5)矛盾，从而得证。

3. 局域化的证明

在这部分我们通过改进的局域化方法证明本文的主要结论。

定义 3.1： 固定 $E\in\mathbb{R}$，如果存在一个区间 $I=[n_1,n_2]$，满足：

1. $k=n_2-n_1+1$
2. $y\in I$
3. $\left|y-n_i\right|\ge\frac{k}{12}, i=1,2$，
4. $\left|G_I(y,n)\right| < \mathrm{e}^{-\frac{mk}{12}}$，则称点 y 是 (m,k) 正则，否则称 (m,k) 奇异。

下面指出利用 (m,k) 奇异点可以构造一串共振相位 θ，使 $\left|P_k(\theta)\right|$ 非常小。

引理 3.2： $x\in\mathbb{Z}$ 是 $(L(E)-\varepsilon,k)$ 奇异点，$0<\varepsilon<\frac{L(E)}{2}, k>\max\left\{10,k_3\left(\frac{\varepsilon}{16},E,\omega\right),k_4(\varepsilon)\right\}$ 则对满足 $x-\left[\frac{9}{10}k\right]\le y\le x-\left[\frac{9}{10}k\right]+\left[\frac{4}{5}k\right]$ 的 y 有：

$$\left|P_k\left(\theta+\frac{(y-1)}{2}\omega\right)\right| \le \mathrm{e}^{kL(E)+(k-1)\bar{a}(\lambda)-\frac{k}{16}\varepsilon}. \tag{3.1}$$

证明： 由行列式 Cramer 法则：

$$\left|G_I(x,n_1)\right| = \left|\frac{P_{n_2-x}(\theta+x\omega)}{P_k(\theta+(n_1-1)\omega)}\right|\prod_{i=n_1}^{x-1}\left|a(i)\right|, \tag{3.2}$$

$$\left|G_I(x,n_2)\right| = \left|\frac{P_{x-n_1}(\theta+(n_1-1)\omega)}{P_k(\theta+(n_1-1)\omega)}\right|\prod_{i=x}^{n_2-1}\left|a(i)\right|. \tag{3.3}$$

因为 $k>12k_3\left(\frac{\varepsilon}{16},E,\omega\right), x-n_1, n_2-x>k_3\left(\frac{\varepsilon}{16},E,\omega\right)$，根据引理 2.3 得到：

$$\left|P_{n_2-y}(\theta,E)\right| \le \mathrm{e}^{(n_2-x)\left(L(E)+\bar{a}(\lambda)+\frac{\varepsilon}{16}\right)} \le \mathrm{e}^{\frac{9}{10}kL(E)+(n_2-x)\left(\bar{a}(\lambda)+\frac{\varepsilon}{16}\right)},$$

$$\left|P_{x-n_1}(\theta,E)\right| \le \mathrm{e}^{\frac{9}{10}kL(E)+(x-n_1)\left(\bar{a}(\lambda)+\frac{\varepsilon}{16}\right)}.$$

因为 $x-n_1, n_2-x>12k_4$，且满足：

$$x-n_1, n_2-x>12k_4$$

我们有

$$\prod_{i=n_1}^{x-1}|a(i)| \le \mathrm{e}^{(x-n_1)\left(\bar{a}(\lambda)+\frac{\varepsilon}{16}\right)}, \prod_{i=x}^{n_2-1}|a(i)| \le \mathrm{e}^{(n_2-x)\left(\bar{a}(\lambda)+\frac{\varepsilon}{16}\right)}. \tag{3.4}$$

将(3.2)和(3.3)代入下式有：

$$\begin{aligned}|P_k(\theta+(n_1-1)\omega)| &\le |P_{n_2-x}(\theta+x\omega)|\mathrm{e}^{-k\frac{L(E)-\varepsilon}{12}}\prod_{i=n_1}^{x-1}|a(i)| \\ &\le \mathrm{e}^{\frac{9}{10}kL(E)+(n_2-x)\left(\bar{a}(\lambda)+\frac{\varepsilon}{16}\right)-\frac{L(E)-\varepsilon}{12}k+(x-n_1)\left(\bar{a}(\lambda)+\frac{\varepsilon}{16}\right)} \\ &\le \mathrm{e}^{kL(E)+(k-1)\bar{a}(\lambda)-\frac{k}{16}\varepsilon}.\end{aligned}$$

构造：

$$\theta_j=\begin{cases}\theta+\left(\xi_1+\left[\frac{4}{5}k\right]-\left[\frac{1}{3}k\right]+\frac{k-1}{2}+j\right)\omega & j=0,\cdots,\left[\frac{1}{3}k\right] \\ \theta+\left(\xi_2+\left[\frac{4}{5}k\right]-\frac{k-1}{2}+j\right)\omega & j=\left[\frac{1}{3}k\right]+1,\cdots,k\end{cases} \tag{3.5}$$

得到：

$$|Q_k(\cos 2\pi\theta_j)|=\left|P_k\left(\theta_j-\frac{k+1}{2}\omega\right)\right|<\mathrm{e}^{kL(E)+(k-1)\bar{a}(\lambda)-\frac{k}{16}\varepsilon}. \tag{3.6}$$

使用拉格朗日插值得到：

$$|Q_k(z)|=\left|\sum_{j=0}^{k}Q_k(\cos 2\pi\theta_j)\frac{\prod_{i\ne j}|z-\cos 2\pi\theta_i|}{\prod_{i\ne j}|\cos 2\pi\theta_j-\cos 2\pi\theta_i|}\right|. \tag{3.7}$$

定义 3.3： 如果 $\{\theta_1,\cdots,\theta_k\}$ 满足：

$$\max_{x\in[-1,1]}\max_{0\le j\le k}\frac{\prod_{i\ne j}|z-\cos 2\pi\theta_i|}{\prod_{i\ne j}|\cos 2\pi\theta_j-\cos 2\pi\theta_i|}\le \mathrm{e}^{k\varepsilon}$$

则称 $\{\theta_1,\cdots,\theta_k\}$ 是 $\varepsilon-$一致分布的。

下面证明(3.5)中构造的 $\{\theta_j\}$ ε-一致分布。

引理 3.4： 设 ω 满足 Diophantine 条件， $d<k^{\alpha},1<\alpha<2,\theta\in\Theta^c(x_1,\omega,\alpha)$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $k_6(\varepsilon,\omega,\alpha)$ 当 $k>k_6(\varepsilon,\omega,\alpha)$ 有 $\{\theta_j\}$ ε-一致分布。

证明： 令

$$I_1=\prod_{i\ne j}|z-\cos 2\pi\theta_i|, I_2=\prod_{i\ne j}|\cos 2\pi\theta_j-\cos 2\pi\theta_i|,$$

结合(3.5)和根据文献[8]，当 $k>N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$，有

$$\begin{aligned}\ln|I_1| &= \ln\left|\prod_{i\ne j}(z-\cos 2\pi\theta_i)\right| \\ &\le (k+1)\left(\int_0^1 \ln|z-\cos 2\pi\theta|\mathrm{d}\theta+\frac{\varepsilon}{3}\right) \\ &= (k+1)\left(-\ln 2+\frac{\varepsilon}{3}\right),\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$
\begin{aligned}
\ln\left|I_2\right| &= \ln\left|\prod_{i\neq j}\left(\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta_i\right)\right| \\
&= \sum_{i\neq j}\ln\left|\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta_i\right| \\
&\geq (k+1)\left(\int_0^1 \ln\left|\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta\right| \mathrm{d}\theta - \frac{\varepsilon}{3}\right) \\
&\quad + 2D(\omega)(k+1)^{1-\frac{1}{\tau(\omega)}} \ln\left\{(k+1)\min_{i\neq j}\left|\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta_i\right|\right\} \\
&= (k+1)\left(-\ln 2 + \frac{\varepsilon}{3}\right) + 2D(\omega)(k+1)^{1-\frac{1}{\tau(\omega)}} \ln\left\{(k+1)\min_{i\neq j}\left|\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta_i\right|\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

下面对 $\min\limits_{i\neq j}\left|\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta_i\right| = 2\min\limits_{i\neq j}\left|\sin\pi\left(\theta_j+\theta_i\right)\right|\left|\sin\pi\left(\theta_j-\theta_i\right)\right|$ 进行估计：

对 $\left|\sin\pi\left(\theta_j+\theta_i\right)\right|$：

1) 当 $j,i\in\left\{0,\cdots,\left[\frac{k}{3}\right]\right\}$，有 $\theta_j+\theta_i = 2\left(\theta+\left(x_1+\left[\frac{4}{5}k\right]-\left[\frac{1}{3}k\right]-\left[\frac{9}{10}k\right]+\frac{i+j+k-1}{2}\right)\omega\right)$。

2) 当 $j,i\in\left\{\left[\frac{k}{3}\right]+1,\cdots,k\right\}$，有 $\theta_j+\theta_i = 2\left(\theta+\left(x_1+\left[\frac{4}{5}k\right]-\left[\frac{9}{10}k\right]+\frac{d+i+j+k-1}{2}\right)\omega\right)$。

综上，ω 的系数分子 $<2d+\frac{4}{5}k+1$ 所以 $\forall j,i\in\{0,1,\cdots,k\}$，有

$$
\left|\sin\pi\left(\theta_i+\theta_j\right)\right| > \mathrm{e}^{\left(2d+\frac{4}{5}k+1\right)^{\frac{1}{2\tau(\omega)}}}。
$$

对 $\left|\sin\pi\left(\theta_i-\theta_j\right)\right|$：

1) 当 $j,i\in\left\{0,\cdots,\left[\frac{k}{3}\right]\right\}$，有 $\theta_j-\theta_i=(j-i)\omega$。

2) 当 $j\in\left\{0,\cdots,\left[\frac{k}{3}\right]\right\}, i\in\left\{\left[\frac{k}{3}\right]+1,\cdots,k\right\}$ 有 $\theta_j-\theta_i=\left(-d-[k/3]+k-1+j-i\right)\omega$。

综上，都有 $\left|\theta_j-\theta_i\right|<d+\frac{k}{3}+1$ 所以 $\left|\sin\pi\left(\theta_i-\theta_j\right)\right|>c(\omega)\left(d+\frac{k}{3}+1\right)^{-\tau(\omega)}$。

从而得到：

$$
\min_{i\neq j}\left|\cos 2\pi\theta_j-\cos 2\pi\theta_i\right| \geq 2c(\omega)\left(d+\frac{k}{3}+1\right)^{-\tau(\omega)} \mathrm{e}^{-\left(2d+\frac{4}{5}k+1\right)^{\frac{1}{2\tau(\omega)}}}.
\tag{3.10}
$$

将(3.8)和(3.9)代入得到：

$$
\begin{aligned}
\ln\frac{\left|I_1\right|}{\left|I_2\right|} &\leq \frac{2}{3}(k+1)\varepsilon + 2D(\omega)(k+1)^{1-\frac{1}{\tau(\omega)}}\ln(k+1) \\
&\quad + \left(2d+\frac{3}{4}k+1\right)^{\frac{1}{2\tau(\omega)}} - \ln\left(2c(\omega)\left(d+\frac{k}{3}+1\right)^{-\tau(\omega)}\right) \\
&= \frac{2}{3}(k+1)\varepsilon + o(k) \\
&\leq k\varepsilon.
\end{aligned}
$$

故存在 $k_6(\varepsilon,\omega,\alpha)$ 当 $k>k_6(\varepsilon,\omega,\alpha)$ 就有 $\frac{|I_1|}{|I_2|}\le e^{k\varepsilon}$。

我们将利用下面的引理完成定理 1 的证明：

引理 3.5： 当 $\omega\in DC(c,\tau),0\le\lambda_1<1,0\le\lambda_2<1,\theta\in\Theta^c(x,\omega,\alpha),0<\varepsilon<\frac{L(E)}{2},1<\alpha<2$

则 $\exists k_2(\theta,x,\alpha)$，对 $\forall k>k_2(\theta,x,\alpha)$，如果 x,y 同时 $(L(E)-\varepsilon,k)$ 奇异，并且 $|x-y|>\frac{4}{5}k$ 那么有 $|x-y|>(k-2)^\alpha$。

证明： 取 $\theta\in\Theta^c(x,\omega,\alpha)$ 令 $k=\max\left\{12k_3\left(\frac{\varepsilon}{16},E,\omega\right),12k_4(\varepsilon),k_5(x,\theta,\omega),k_6\left(\frac{\varepsilon}{32},\omega,\alpha\right),120\right\}$

选 $k\in K$ 且 $k>\bar{k}$ 取 $\bar{\theta}$，满足 $\left|P_k(\bar{\theta})\right|\ge\frac{e^{kL(E)+(k+2)\bar{a}(\lambda)}}{10\sqrt{2}}$ 令 $\bar{z}=\cos 2\pi\left(\bar{\theta}+\frac{(k+1)\omega}{2}\right)$。则 $P_k(\bar{\theta})=Q_k(\bar{z})$。

假设 $d>k^\alpha$，根据引理 3.2 和(3.6)，得到：

$$\frac{e^{kL(E)+(k+2)\bar{a}(\lambda)}}{10\sqrt{2}}\le\left|P_k(\bar{\theta})\right|\le(k+1)e^{kL(E)+(k-1)\bar{a}(\lambda)-\frac{\varepsilon}{32}},$$

显然 $\exists k_7(\varepsilon)$，当 $k>k_7(\varepsilon)$ 不等式不成立，矛盾，从而与假设 $d>k^\alpha$ 不成立。

对 $k>\max\{k_7,\bar{k}\}$ 且 $k\in K$ 如果 x,y 都是 $(L(E)-\varepsilon,k)$ 奇异点，并且 $|x-y|>\frac{4}{5}k$ 则

$|x-y|>k^\alpha$ 由于 $\{k,k-1,k-2\}\in K$，设 $k>\max\{k_7,\bar{k}\}+2$ 则 $k-2,k-1,k>\max\{k_7,\bar{k}\}$ 那么 $|x-y|>\frac{4}{5}k>\frac{4}{5}(k-1)>\frac{4}{5}(k-2)$ 从而完成了重要引理 3.4 的证明。

最后我们完成定理 1 的证明。

取 $E(\theta)$，$u_E(x)$ 是算子 $H_{\theta,\lambda,\omega}$ 的广义特征值和对应的广义特征向量。不失一般性，可设 $u_E(0)\ne0$（因为广义特征向量非零，总可取到非零的分量）。根据引理 3.2，可以取 ε，使当 $0<\varepsilon<\frac{L(E)}{2}$，$|x|>\max\left\{k_1(L(E)-\varepsilon,0),k_2\left(\theta,0,\varepsilon,\frac{3}{2}\right)\right\}+2$，$k=|x|$ 有 0 是 $(L(E)-\varepsilon,k)$ 奇异点，由于 $\frac{4}{5}k<|x|<k^{\frac{3}{2}}$ 根据引理 3.2，x 一定是 $(L(E)-\varepsilon,k)$ 正则的，则存在区间 $I=[n_1,n_2]$，格林函数满足：

$$\left|G_I(x,n_1)\right|<e^{-\frac{L(E)-\varepsilon}{12}k},\left|G_I(x,n_2)\right|<e^{-\frac{L(E)-\varepsilon}{12}k}.$$

其中 $x-n_1>\frac{k}{12},n_2-x>\frac{k}{12}$。

由于特征向量表示得到：

$$\begin{aligned}|u(x)|&\le|a(n_1-1)||u(n_1-1)||G_I(x,n_1)|+|a(n_2)||u(n_2)||G_I(x,n_2)|\\&\le C(|n_1|+|n_2|)e^{-\frac{1}{12}(L(E)-\varepsilon)k}\\&\le Ce^{-\frac{1}{16}(L(E)-\varepsilon)|x|}.\end{aligned}$$

显然只要 x 充分大，不等式成立，得到了指数衰减性，从而定理 1 得证。

参考文献

[1] Last, Y. (1993) Almost Everything about the Almost Mathieu Operator I. *Proceedings of the* 11*th International Congress of Mathematical Physics*, **151**, 183-192. https://doi.org/10.1007/BF02096752

[2] Germinet, F. (1999) Dynamical Localization II with an Application to the Almost Mathieu Operator. *Journal of Statistical Physics*, **95**, 273-286.

[3] Jitomirskaya, S. and Last, Y. (1996) Dimensional Hausdorffproperties of Singular Continuous Spectra. *Physical Review Letters*, **76**, 1765-1769. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.1765

[4] Last, Y. (1993) A Relation between Absolutely Continuous Spectrum of Ergodic Jacobi Matrices and the Spectra of Periodic Approximants. *Communications in Mathematical Physics*, **151**, 183-192. https://doi.org/10.1007/BF02096752

[5] Aubry, S. and Andre, G. (1980) Analyticity Breaking and Anderson Localization in Incommensurate Lattices. *Annals of the Israel Physical Society*, **3**, 133-140.

[6] Avron, J. and Simon, B. (1983) Almost Periodic Schrodinger Operators II. The IDS. *Duke Mathematical Journal*, **50**, 369-391. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-83-05016-0

[7] Bourgain, J. and Jitomirskaya, S. (2002) Continuity of the Lyapunov Exponent for Quasiperiodic Operators with Analytic Potential. *Journal of Statistical Physics*, **108**, 1203-1208. https://doi.org/10.1023/A:1019751801035

[8] Jitomirskaya, S. (1999) Metal-Insulator Transition for the Almost Mathieu Operator. *Annals of Mathematics*, **150**, 1159-1175. https://doi.org/10.2307/121066