Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 664-672
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145219

Hans汉斯

单位球丛上$L(g)$泛函变分问题

康　恒

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2024年4月17日；录用日期：2024年5月18日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

本文研究了紧切触度量流形(M,η,g)上的$L(g)$泛函，该泛函是对Reeb向量场方向的里奇曲率在切触度量流形上的积分。特别地，我们考虑了紧黎曼流形的单位球丛这一特殊的切触度量流形。首先计算了$L(g)$泛函在球丛的底流形上的泛函形式。然后通过计算L泛函在底流形上的变分，我们发现当底流形是二维时，具有平坦性的黎曼度量是L泛函在底流形上的临界点。

关键词

黎曼流形，切触流形，球丛，变分公式

The Variational Problem of $L(g)$ on Unit Tangent Sphere Bundles

Heng Kang

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Apr. 17th, 2024; accepted: May 18th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

This paper investigates the $L(g)$ functional on contact metric manifold (M,η,g), which is the integral of the Ricci curvature along the Reeb vector field direction on the contact metric manifold. In particular, we consider the special case of the unit Tangent Sphere Bundles of a Riemannian manifold as a contact metric manifold. Firstly, we compute the functional form of $L(g)$ functional on the base manifold of the Tangent Sphere Bundles. Then, by computing the variation of the L functional on the base manifold, we find that Riemannian metrics with flatness are critical points of the L functional on the base manifold when the base manifold is two-dimensional.

文章引用: 康恒. 单位球丛上 $L(g)$泛函变分问题[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 664-672.
DOI: 10.12677/pm.2024.145219

Keywords

Riemannian Manifold, Contact Manifold, Tangent Sphere Bundle, Variational Formula

1. 引言

切触几何，作为微分几何的重要分支，逐渐发展成为了现代数学的前沿学科之一。黎曼流形(M,g)的单位球丛T_1M作为特殊的切触流形，可以由其底流形的黎曼度量g自然诱导出标准的切触度量结构[1] [2] [3] [4] [5]。因此，通过研究黎曼流形的球丛来揭示底流形几何特性是黎曼几何中一个重要的领域。例如，底流形M上的正则测地线在球丛T_1M上的提升也是球丛的测地线[6]。

切触度量流形(M,η,g)具有一个切触结构η以及与切触结构相容的黎曼度量，我们也将这个相容的黎曼度量称之为关联度量[1]。一方面，如果η是给定的切触结构，那么切触度量流形具有唯一的 Reeb 向量场ξ。并且，如果 Reeb 向量场ξ是 Killing 向量场的话，则我们称这个切触度量是 *K-contact* 的[1]。另一方面，关联度量g在切触度量流形中并非唯一确定的，这意味着不同关联度量所给定的曲率也各不相同。因此，Reeb 向量场方向的里奇曲率$Ric(\xi,\xi)$实际上是一个关于关联度量g的泛函。那么，里奇曲率$Ric(\xi,\xi)$在切触度量流形上的积分

$$L(g)=\int_M Ric(\xi,\xi)\mathrm{d}V$$

是一个关于关联度量g的泛函，其中，$\mathrm{d}V=\left(1/2^n n!\right)\eta\wedge(\mathrm{d}\eta)^n$。

在文献[4]中，Blair 对$L(g)$积分泛函进行了研究。他指出在紧正则切触度量流形上，$L(g)$泛函在其全体关联度量所构成的集合上的临界点是 *K-contact* 的。对此问题，我们不禁要进一步探讨：当流形不具有正则性，或者我们考虑的是其他特殊的切触度量流形时，$L(g)$泛函的临界点会展现出怎样的性质呢？我们知道，黎曼流形的单位球丛T_1M上的关联度量是由其底流形M的黎曼度量所诱导的，作为一类特殊的切触度量流形，该泛函在球丛上的临界点会受到底流形性质的影响。因此，本文首先计算了$L(g)$泛函在球丛的底流形上的具体形式(详见公式(8))。然后，通过计算这一泛函形式的梯度公式，我们进一步探究该泛函在底流形上临界点的几何性质。经过这一系列的计算和分析，我们得到了下面结果：

定理 设底流形M是 2 维光滑紧流形，T_1M是底流形M诱导出的紧球丛。如果底流形上的度量是曲率平坦的，那么它是L泛函在底流形上的临界点。

2. 预备知识

定义 2.1 [1]：一个维数为$2n+1$的光滑流形M被称为切触流形(Contact Manifold)，那么，它具有一个全局的 1-形式η，满足$\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$。特别的，存在一个全局向量场$\xi$，对任意向量场$X$，满足

$$d\eta(\xi,X)=0,\quad \eta(\xi)=1$$

在这里，ξ被称为关于切触结构η的特征向量场或者 Reeb 向量场。

考虑一个切触流形(M,η)具有一个近切触结构(ϕ,ξ,η)。其中，ϕ是一个$(1,1)$型张量场，满足

$$\phi^2=-Id+\eta\otimes\xi,\quad \phi\xi=0,\quad \eta\circ\phi=0$$

如果具有近切触结构的切触流形容许一个黎曼度量 g，对上述的 $(1,1)$ 型张量场 ϕ，满足

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

那么，我们称流形 (M,η,g) 为切触度量流形，并且 (η,g,ϕ,ξ) 称为切触度量流形上的切触度量结构。特别的，我们还有 $d\eta(X,Y)=g(X,\phi Y)$，在这里黎曼度量 g 也被称为流形的关联度量(Associated Metric)。

定义 2.2 [1]：在切触度量流形上，我们定义一个算子 h

$$h=\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi}\phi \tag{1}$$

显然，这里的算子 h 是一个张量场。下面，我们将给出关于算子 h 的一些重要性质。

命题 2.3 [1]：在切触度量流形上，对于 Reeb 向量场 ξ，有 $h\xi=0$。

命题 2.4 [1]：在切触度量流形上，有 $\eta\circ h=0$。

命题 2.5 [1]：在切触度量流形上，h 是一个对称算子，并且有

1) $\nabla_X\xi=-\phi X-\phi hX$；

2) h 和 ϕ 具有反交换性，即 $h\phi=-\phi h$；

3) $\mathrm{tr}\,h=0$。

命题 2.6 [1]：在切触度量流形上，有下面两个公式

$$(\nabla_{\xi}h)X=\phi X-h^2\phi X-\phi R_{X\xi}\xi \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(R_{\xi X}\xi-\phi R_{\xi\phi X}\xi\right)=h^2X+\phi^2X \tag{3}$$

引理 2.7 [1]：在切触度量流形 M^{2n+1} 上，Reeb 向量场 ξ 方向的里奇曲率为

$$Ric(\xi)=2n-\mathrm{tr}\,h^2 \tag{4}$$

证明：由公式(3)可知，

$$\frac{1}{2}\left(R_{\xi X}\xi-\phi R_{\xi\phi X}\xi\right)=h^2X+\phi^2X$$

于是，令 X 是与 ξ 正交的单位向量，我们取 X 与上述等式的内积，有

$$K(\xi,X)+K(\xi,\phi X)=2\left(1-g\left(h^2X,X\right)\right)$$

这里的 K 是指的截面曲率。因此，如果 $\{X_1,\cdots,X_n,\phi X_1,\cdots,\phi X_n,\xi\}$ 是流形 M^{2n+1} 上的一组 ϕ-basis，那么通过取 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 然后求和，结论成立。

□

定理 2.8 [1]：切触度量流形 M^{2n+1} 是 *K-contact* 当且仅当 $Ric(\xi)=2n$。

证明：由于 M^{2n+1} 是 *K-contact* 的一个充要条件是 $h=0$ [1]，因此上述定理显然成立。

□

3. $L(g)$泛函在球丛上沿球面纤维的积分

定义 3.1 [1] 假设 M 是一个 n 维的光滑流形，$\pi:TM\to M$ 是底流形的切丛，其中 G 是流形 M 上的黎曼度量，D 是流形 M 上的 Levi-Civita 联络[1]。

如果 X 是 M 上的向量场，那么它在切丛 TM 上的垂直上升 X^V 和水平上升 X^H 分别被定义为

$$X^V\omega=\omega(X)\circ\pi,\ X^H\omega=D_X\omega.$$

其中，ω 是流形 M 上的 1-形式[1]。

假如 $\left(x^1,\cdots,x^n\right)$ 是流形 M 上的一组局部坐标，设 $q^i = x^i \circ \pi$；那么 $\left(q^1,\cdots,q^n\right)$ 和纤维坐标 $\left(v^1,\cdots,v^n\right)$ 构成 TM 的一组局部坐标。显然，切丛 TM 垂直上升 X^V 的局部表达式为

$$X^V = X^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

又因为流形 M 上的协变导数 $D_X\omega$ 的局部表达式可以写成 $\left(X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - X^i\omega_k\Gamma_{ij}^k\right)dx^j$，这里 Γ_{ij}^k 是联络系数。如果我们取 $D_X\omega$ 在点 $t = v^l \frac{\partial}{\partial x^l}$ 处的值，易得

$$\begin{aligned}
\left(D_X\omega\right)(t) &= \left(\left(X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - X^i\omega_k\Gamma_{ij}^k\right)dx^j\right)\left(v^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
&= v^j X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - X^i v^j \Gamma_{ij}^k \omega_k \\
&= \left(X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - X^i v^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial v^k}\right)\omega_l v^l
\end{aligned}$$

因此，X^H 的局部表达式为

$$X^H = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - X^i v^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial v^k} = X^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i} - v^j\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial v^k}\right) = X^i \frac{\delta}{\delta q^i}$$

综上，我们可以确定切丛在 $t \in TM$ 处的切空间 T_tTM 上的一组基为 $\left(\frac{\delta}{\delta q^1},\cdots,\frac{\delta}{\delta q^n},\frac{\partial}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial v^n}\right)$。

定义联络映射 $K: TTM \to TM$ 为

$$KX^H = 0, \quad KX_t^V = X_{\pi(t)}, t \in TM$$

TM 容许一个近复结构 J，定义为

$$JX^H = X^V, JX^V = -X^H$$

如果，TM 上的黎曼度量 $\bar{g}$ 被称作为 Sasaki 度量，那么

$$\bar{g}\left(X,Y\right) = \left(G\left(\pi_* X, \pi_* Y\right) + G\left(KX, KY\right)\right)\circ\pi,$$

这里，X 和 Y 是 TM 上的向量场。由于，$\pi_* \circ J = -K$ 和 $K \circ J = \pi_*$，则 $\bar{g}$ 是关于近复结构 J 的 Hermitian 度量[1]。

命题 3.2 [1] 在黎曼流形 $\left(M,G\right)$ 上，R 是黎曼度量 G 关于 Levi-Civita 联络 D 的曲率张量。那么，对于切丛 TM 上的黎曼度量 $\bar{g}$ 的 Levi-Civita 联络 $\bar{\nabla}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H\right)_t = \left(D_X Y\right)_t^H - \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}_{XY} t\right)_t^V \\
&\left(\bar{\nabla}_{X^H} Y^V\right)_t = \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}_{tY} X\right)_t^H + \left(D_X Y\right)_t^V \\
&\left(\bar{\nabla}_{X^V} Y^H\right)_t = \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}_{tX} Y\right)_t^H \\
&\bar{\nabla}_{X^V} Y^V = 0
\end{aligned}$$

定义 3.3 [1] [2]：球丛，$\pi : T_1M \to M$，是切丛 TM 上满足条件 $\sum G_{ij}v^i v^j = 1$ 的超曲面。在这里，$\nu = v^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$ 是任意一点 $(m,t) \in T_1M$ 处的单位法向量。度量 g' 是 T_1M 上的被切丛 TM 上的 Sasaki 度量 $\bar{g}$ 所诱导的黎曼度量，并且 ∇ 是关于 g' 的 Levi-Civita 联络。

由于在切丛上定义的垂直上升与球丛 T_1M 的纤维并不相切。于是，对于 $X \in T_mM$，我们重新定义其切上升 X^T 为

$$X^T = X^V - G(X,t)\nu$$

那么，度量 g' 在任意一点 T_1M 上任意一点 (m,t) 定义为

$$g'\left(X^H, Y^H\right) = \bar{g}\left(X^H, Y^H\right) = G(X,Y), \quad g'\left(X^H, Y^T\right) = 0,$$
$$g'\left(X^T, Y^T\right) = \bar{g}\left(X^T, Y^T\right) = G(X,Y) - G(X,t)G(Y,t)$$

由命题 3.2 我们可以得到度量 g' 的 Levi-Civita 联络为

$$\nabla_{X^T} Y^T = -G(Y,t)X^T;$$
$$\nabla_{X^T} Y^H = \frac{1}{2}\left(R_{tX}Y\right)^H;$$
$$\nabla_{X^H} Y^T = \frac{1}{2}\left(R_{tY}X\right)^H + \left(D_X Y\right)^T;$$
$$\nabla_{X^H} Y^H = \left(D_X Y\right)^H - \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}_{XY}t\right)^T$$

由切丛的近复结构 J，我们定义 T_1M 上的近切触结构 (ϕ', ξ', η') 为

$$\xi' = -J\nu = -v^i J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H, \quad JX = \phi' X + \eta'(X)\nu$$

在这里，η' 定义为 ξ' 的对偶，即 $\eta'(\xi') = 1$。

然而，由于 $g'(X, \phi' Y) = 2d\eta'(X,Y)$，故 (ϕ', ξ', η', g') 不是标准切触度量结构。为此，我们对上述的结构进行修正，得到球丛的标准切触度量结构为

$$(\phi, \xi, \eta, g) = \left(\phi', 2\xi', \frac{1}{2}\eta', \frac{1}{4}g'\right)$$

下面，我们通过切丛上的联络计算公式得出 Reeb 向量场 ξ 的协变导数；

$$\nabla_{X^H}\xi = -\left(\mathbf{R}_{Xt}t\right)^V = -\left(\mathbf{R}_{Xt}t\right)^T$$
$$\nabla_{X^T}\xi = -2\phi X^T - \left(\mathbf{R}_{Xt}t\right)^H$$

对比公式(1)，我们可以得到水平上升和切上升关于算子 h 的计算公式

$$hX^H = -X^H + \left(\mathbf{R}_{Xt}t\right)^H, \tag{5}$$

$$hX^T = X^T - \left(\mathbf{R}_{Xt}t\right)^T. \tag{6}$$

引理 3.4 [7]：设 $P(x) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 是一个单项式，其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \{0,1,2,\cdots\}$，并且设

$\beta_j = \frac{1}{2}(\alpha_j + 1)$。那么

$$\int_{S_n} P\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0 & \text{如果存在}\alpha_j\text{是奇数} \\ \dfrac{2\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\cdots\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)} & \text{如果所有}\alpha_j\text{是偶数} \end{cases}$$

在这里，S_n 是 n 维球面，$\mathrm{d}\sigma$ 是球面上的体积微元，$\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1}e^{-s}\mathrm{d}s$ 是 Γ 函数。

为了方便接下来的讨论，我们约定球丛上的里奇曲率张量记为 $\overline{Ric}$，而底流形上的里奇曲率张量则记为 Ric。

设底流形 M^n 是 n 维紧光滑流形，T_1M 是底流形 M^n 诱导出来 $2n-1$ 维球丛。考虑 M 上任意一点 x，设 T_xM 的一组正交标架场为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n = t\}$，那么 $\{2e_1^T, \cdots, 2e_{n-1}^T, 2e_1^H, \cdots, 2e_{n-1}^H, 2t^H = \xi\}$ 是 T_zT_1M 的一组正交标架场，并且 $z = (x,t)$。

由公式(4)和公式(5)可知，

$$hX^H = -X^H + (\mathbf{R}_{Xt}t)^H$$
$$hX^T = X^T - (\mathbf{R}_{Xt}t)^T$$

于是，我们可以得到

$$h^2(2e_i^T) = 2e_i^T - 4(\mathrm{R}_{e_it}t)^T + 2(\mathrm{R}_{(\mathrm{R}_{e_it}t)t}t)^T$$
$$h^2(2e_i^H) = 2e_i^H - 4(\mathrm{R}_{e_it}t)^H + 2(\mathrm{R}_{(\mathrm{R}_{e_it}t)t}t)^H$$

根据上式，由引理 2 可知，

$$\overline{Ric}(\xi,\xi) = 4Ric(t,t) - 2\sum_{i=1}^{n-1}\langle \mathrm{R}_{e_it}t, \mathrm{R}_{e_it}t\rangle \tag{7}$$

在这里，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示底流形上关于黎曼度量 G 的内积。

因此，$L(g)$ 泛函可以计算为

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_1M}\overline{Ric}(\xi,\xi)\mathrm{d}V_{T_1M} \\ &= \int_M\int_{S_xM} 4Ric(t,t) - 2\sum_{i=1}^{n-1}\langle R_{e_it}t, R_{e_it}t\rangle \mathrm{d}V_{S_xM}\mathrm{d}V_M \\ &= \int_M\int_{S_xM} 4Ric(t,t) - 2\kappa(t,t,t,t)\mathrm{d}V_{S_xM}\mathrm{d}V_M \end{aligned}$$

其中，S_xM 表示在底流形上任意一点 x 处的球形纤维，$\mathrm{d}V_M$ 以及 $\mathrm{d}V_{S_xM}$ 分别表示底流形和球形纤维的体积形式。

在这里，设 $\kappa_{ijkl} = G^{pq}G^{st}R_{jspi}R_{ltqk}$ 是一个 $(0,4)$ 型张量。若将原积分泛函看作是在底流形的积分，那么其被积函数就是 $x \in M$ 处的球形纤维上关于 t 的积分泛函，不妨记作

$$\tau = \int_{S_xM} 4Ric(t,t) - 2\kappa(t,t,t,t)\mathrm{d}V_{S_xM}.$$

显然，S_xM 是底流形 M 在点 x 处切空间的 T_xM 上的 n 维球面。为此，我们不妨设 T_xM 上一组正交标架为 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_n\}$，那么 S_xM 上任意一点 $t = \sum a_i\tilde{e}_i$，我们默认使用爱因斯坦求和约定。由引理 3.4 可知，积分 τ 可以表示为

$$
\begin{aligned}
\tau &= \int_{S_x M} 4Ric(t,t) - 2\kappa(t,t,t,t)\,\mathrm{d}V_{S_x M} \\
&= \int_{S_x M} 4Ric(t,t)\,\mathrm{d}V_{S_x M} - \int_{S_x M} 2\kappa(t,t,t,t)\,\mathrm{d}V_{S_x M} \\
&= \int_{S_x M} 4a_i a_j R_{ij}\,\mathrm{d}V_{S_x M} - \int_{S_x M} 2a_i a_j a_k a_l \kappa_{ijkl}\,\mathrm{d}V_{S_x M} \\
&= 8R - \left(2 - \frac{3\pi}{4}\right)\sum_j \left|R_{ijjl}\right|^2 + \frac{\pi}{4}\left(\left|R_{il}\right|^2 + \left|R_{ijkl}\right|^2 + R_{ijkl}R_{ikjl}\right)
\end{aligned}
$$

在这里，$R = G^{ij}R_{ij}$ 是数量曲率。

于是，我们可以得到 L 泛函在底流形上的积分泛函的形式为

$$
L(G) = \int_M 8R - \left(2 - \frac{3\pi}{4}\right)\sum_j \left|R_{ijjl}\right|^2 + \frac{\pi}{4}\left(\left|R_{il}\right|^2 + \left|R_{ijkl}\right|^2 + R_{ijkl}R_{ikjl}\right)\mathrm{d}V_M \tag{8}
$$

在这里，G 表示底流形上的黎曼度量，而 R_{ijkl}、R_{ij} 以及 R 分别是底流形上的黎曼曲率张量、里奇曲率张量以及数量曲率。

4. 底流形维数为 2 时，*L*(*g*)积分泛函在底流形上的变分

定义 4.1 [8]：若 M 是一个光滑黎曼流形，那么 $\mathcal{M}$ 是流形 M 上所有黎曼度量的集合，$g \in \mathcal{M}$，而 $Q = Q(g)$ 是一个依赖于 g 的几何量。假设 s 是流形上的对称(0, 2)型张量，那么，沿着 s 的方向 Q 的变分 $\delta Q[s]$ 是：

$$
\delta Q[s] = \lim_{t\to 0}\frac{Q(g+ts) - Q(g)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}\bar{Q}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}
$$

在这里，$\bar{Q}(t) := Q(\bar{g}) = Q(g+ts)$。显然，$\delta g[s] = s$。

引理 4.2 [1]：M 是光滑紧流形，设 T 是流形 M 上的二阶对称张量场。那么 $\int_M \mathrm{tr}\,TD\mathrm{d}V_g = 0$ 对于所有的对称张量场 D 满足 $\int_M \mathrm{tr}\,D\mathrm{d}V_g = 0$ 当且仅当 $T = cg$，这里 c 是常数。

在引理 4.2 中，我们可以将 $\int_M \mathrm{tr}\,TD\mathrm{d}V_g = 0$ 改写 $\int_M T^{ij}D_{ij}\mathrm{d}V_g = \int_M \langle T_{ij}, D_{ij}\rangle \mathrm{d}V_g = 0$ 的形式。于是，对任意的泛函 $\mathcal{G}$ 的变分有

$$
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{G}(g+ts)\right|_{t=0} = \int_M \langle\nabla\mathcal{G}, s\rangle\mathrm{d}V_g
$$

在这里，$\nabla\mathcal{G}$ 是一个对称张量，并且当 g 是临界点时，当且仅当 $\nabla\mathcal{G} = cg$。此时，$(\nabla\mathcal{G})_{ij}$ 也被称为积分泛函 $\mathcal{G}$ 的梯度。

引理 4.3：M 是光滑紧流形，$\mathcal{M}$ 是流形 M 上所有黎曼度量的集合，二次数量曲率泛函 $A = \int R^2\mathrm{d}V$ 的梯度公式为

$$
(\nabla A)_{ij} = 2\nabla_{ij}^2 R - 2(\Delta R)g_{ij} - 2RR_{ij} + \frac{1}{2}R^2 g_{ij} \tag{9}
$$

证明：由文献[9]可知，数量曲率的变分公式为：

$$
\delta R[s] = -\Delta S + s_{ij,ij} - R_{ij}s_{ij}
$$

在这里，S 是 s 的迹，即 $S = g^{ij}s_{ij}$。

那么，对于二次数量曲率泛函 $A = \int R^2\mathrm{d}V$，我们有

$$
\begin{aligned}
\delta A[s] &= \delta\int_M R^2 \mathrm{d}V \\
&= \int_M 2R(\delta R[s]) + \frac{1}{2}R^2 S\mathrm{d}V \\
&= \int_M 2R(-\Delta S + s_{ij,ij} - R_{ij}s_{ij}) + \frac{1}{2}R^2 S\mathrm{d}V \\
&= \int_M -2R\Delta S + 2Rs_{ij,ij} - 2RR_{ij}s_{ij} + \frac{1}{2}R^2 S\mathrm{d}V \\
&= \int_M -2\Delta RS + 2\nabla_{ij}^2 Rs_{ij} - 2RR_{ij}s_{ij} + \frac{1}{2}R^2 S\mathrm{d}V \\
&= \int_M \left\langle -2(\Delta R)g_{ij} + 2\nabla_{ij}^2 R - 2RR_{ij} + \frac{1}{2}R^2 g_{ij}, s_{ij}\right\rangle \mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

由引理 4.2 可知，$(\nabla A)_{ij} = 2\nabla_{ij}^2 R - 2(\Delta R)g_{ij} - 2RR_{ij} + \frac{1}{2}R^2 g_{ij}$。

□

假设底流形 M 的维数为 2，在这种情形，黎曼曲率，里奇曲率以及数量曲率总是可以表示为

$$K = R_{1212} = R_{11} = R_{22} = \frac{1}{2}R$$

由公式(8)可以知道，在 2 维底流形的情形下，$L(G)$ 泛函在底流形上表示为

$$L(G) = \int_M 8R - 4K^2 \mathrm{d}V_M$$

定理 4.4： 设底流形 (M,G) 是 2 维光滑紧流形，T_1M 是底流形 M 诱导出的紧球丛。如果底流形上的度量是平坦的，那么它是 $L(G)$ 泛函在底流形上的临界点。

证明： 因为在 2 维底流形的情形下，球丛上的 $L(G)$ 泛函在底流形上表示为

$$L(G) = \int_M 8R - 4K^2 \mathrm{d}V_M$$

那么，对 $L(G)$ 泛函做变分为

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}L(G)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M 8R - 4K^2 \mathrm{d}V_M\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M 16K\mathrm{d}V_M\Big|_{t=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M R^2 \mathrm{d}V_M\Big|_{t=0} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M R^2 \mathrm{d}V_M\Big|_{t=0} \\
&= -\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}
\end{aligned}
$$

由引理 4.3 可知，$(\nabla L)_{ij} = -2\nabla_{ij}^2 R + 2(\Delta R)G_{ij} + 2RR_{ij} - \frac{1}{2}R^2 G_{ij}$。那么 $G \in \mathcal{M}$ 是泛函 $L(G)$ 的临界点的充要条件是 $(\nabla L)_{ij} = cG_{ij}$，$c$ 为常数。

接下来，我们对等式 $(\nabla L)_{ij} = cG_{ij}$ 取迹，得到

$$\Delta R + \frac{R^2}{2} = c$$

将其代入$\left(\nabla L\right)_{ij} = cG_{ij}$得，

$$2RR_{ij} - 2\nabla_{ij}^2 R = R^2 g_{ij} - \Delta R g_{ij} \tag{10}$$

因此，底流形上的度量是平坦的，那么该度量是$L\left(G\right)$的临界点。

□

参考文献

[1] Blair, D.E. (2010) Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Birkhäuser Boston, Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4959-3

[2] Perrone, D. (1992) Torsion Tensor and Critical Metrics on Contact (2n+1)-Manifolds. *Monatshefte für Mathematik*, **114**, 245-259. https://doi.org/10.1007/BF01299383

[3] Perrone, D. (1994) Tangent Sphere Bundles Satisfying $\nabla \xi \tau = 0$. *Journal of Geometry*, **49**, 178-188. https://doi.org/10.1007/BF01228060

[4] Blair, D.E. (1984) Critical Associated Metrics on Contact Manifolds. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **37**, 82-88. https://doi.org/10.1017/S1446788700021753

[5] Chern, S.S. and Hamilton, R.S. (1985) On Riemannian Metrics Adapted to Three-Dimensional Contact Manifolds. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0084596

[6] 张剑锋. 关于 Finsler 流形上测地线的一点注记[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2011, 38(3): 271-273.

[7] Folland, G.B. (2001) How to Integrate a Polynomial over a Sphere. *The American Mathematical Monthly*, **108**, 446-448. https://doi.org/10.1080/00029890.2001.11919774

[8] Catino, G. and Mastrolia, P. (2020) A Perspective on Canonical Riemannian Metrics. Birkhäuser, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-030-57185-6

[9] Besse, A.L. (2007) Einstein Manifolds. Springer.