Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 644-653
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145217

Hans汉斯

模糊Riesz空间中的模糊序基和模糊不交系统的性质

张　也

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年4月9日；录用日期：2024年5月12日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

本文主要讨论了在模糊Riesz空间中的模糊序基和模糊不交系统的基本性质。首先讨论了由可数集$\{v_n : n = 1,2,\cdots\}$生成的模糊带中元素的刻画。其次讨论了若Archimedean Riesz空间中模糊序稠理想是模糊super序稠的，则不交系统具有的一些基本性质。最后给出了模糊Archimedean Riesz空间中模糊理想具有可数或有限的模糊序基的条件，给出了模糊Archimedean Riesz空间模糊序可分的条件。

关键词

模糊Riesz空间，模糊序基，模糊不交系统

The Properties of Fuzzy Order Bases and Fuzzy Disjoint Systems in Fuzzy Riesz Spaces

Ye Zhang

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 9th, 2024; accepted: May 12th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

This paper discusses the fundamental properties of fuzzy order bases and fuzzy disjoint systems in fuzzy Riesz spaces. Firstly, it examines the characterization of elements in fuzzy bands generated by countable set $\{v_n : n = 1,2,\cdots\}$. Then, it discusses some basic properties of non-intersecting systems if fuzzy order-dense ideals are fuzzy superorder dense in Archimedean Riesz spaces. Finally,

文章引用: 张也. 模糊 Riesz 空间中的模糊序基和模糊不交系统的性质[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 644-653.
DOI: 10.12677/pm.2024.145217

it gives conditions for fuzzy ideals to have countable or finite fuzzy order bases in fuzzy Archimedean Riesz spaces and conditions for fuzzy order separability in fuzzy Archimedean Riesz spaces.

Keywords

Fuzzy Riesz Spaces, Fuzzy Order Base, Fuzzy Disjoint System

1. 引言

二十世纪六十年代 Zadeh 发表了名为《Fuzzy Sets》[1]的论文，从而宣告模糊数学的诞生，提出了模糊集的概念，创造了研究模糊性或不确定性问题的理论方法。随后他在文献[2]中，通过自反性、反对称性和传递性提出了模糊序关系的概念。1992 年，P. Venugopalan [3]开始对模糊序集进行系统研究。随后，Beg 和 Islam [4] [5] [6] [7]研究了模糊 Riesz 空间、模糊序线性空间、s-完备模糊 Riesz 空间和模糊 Archimedean 空间。之后越来越的学者开始对模糊 Riesz 空间中的性质进行探索和研究。2015 年，Liang [8]在参考文献[4] [5] [6]的基础上进一步定义了模糊理想、模糊带、模糊 Riesz 子空间、模糊投影带等概念。随后 Iqbal [9]等人定义并研究了无界模糊序收敛及一些应用并证明了模糊 Dedekind 完备的存在性。2021 年，Cheng 和 Chen [10]研究了模糊 Riesz 空间中的模糊 Riesz 同态，给出模糊 Riesz 同态与模糊商空间之间的关系。Cheng 等[11]给出当值域空间为模糊 Dedekind 完备 Riesz 空间时 Hahn-Banach 定理的推广。2022 年，J.J. Zhao [12]讨论了模糊投影带，并给出模糊序基的定义。2023 年，Shailendra [13]讨论了一般模糊算子的刻画，引入基于 t-范数、t-余范数和蕴含算子的 L-模糊算子，并建立它们的联系。模糊序基和模糊不交系统是在模糊序稠密性质的基础上在模糊 Riesz 空间中非常重要的性质，它们更好地刻画了模糊 Riesz 空间的结构，同时也是对模糊序稠密性质的拓展。通过对模糊序基和模糊不交系统的研究，总结出了特定条件下的模糊 Riesz 空间所具有的某些性质。如若 L 是模糊 Archimedean Riesz 空间，则 L 中的模糊极大不交系统都是模糊不交序基。若 L 中存在有限或可数的模糊序基，则 L 中的每个模糊投影带都有有限或可数的模糊序基。使得模糊 Riesz 空间中模糊 Dedekind 完备、模糊序可分、模糊投影等性质间的联系更加紧密。

2. 预备知识

定义 2.1 [3] 设 X 是论域，模糊关系 $\mu: X\times X\to[0,1]$ 满足如下条件时：

(1) 假设 $x\in X$，则 $\mu(x,x)=1$；(自反性)

(2) 假设 $x,y\in X$，当 $\mu(x,y)+\mu(y,x)>1$，则 $x=y$；(反对称性)

(3) 假设 $x,z\in X$，则 $\mu(x,z)\geq\vee(\mu(x,y)\wedge\mu(y,z))$。(传递性)

则称 μ 是模糊偏序关系，其中 μ 是 $X\times X$ 中模糊子集的隶属函数。若集合 X 中存在模糊偏序关系 μ，则称 X 是模糊偏序集，记为 (X,μ)。

定义 2.2 [5] 设 (X,μ) 是模糊偏序集。若 X 的所有有限子集都有上确界和下确界，则称 X 是模糊格。若 X 的任意子集都有上确界和下确界，则 X 称为完备的模糊格。

定义 2.3 [5] 若 X 是线性空间，且 X 中存在模糊偏序关系 μ 满足以下两个条件：

(1) 若 $x_1,x_2\in X$ 且 $\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$，对 $x\in X$，有 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(x_1+x,x_2+x)$；

(2) 若 $x_1,x_2\in X$ 且 $\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$，对 $0<\alpha\in R$，有 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(\alpha x_1,\alpha x_2)$。

则称 X 是模糊序线性空间，记为 (X,μ)。

定义 2.4 [4] 如果模糊序向量空间 (X,μ) 是模糊格，则称其为模糊 Riesz 空间。

定义 2.5 [4] (E,μ) 假设是模糊 Riesz 空间，D 是 E 的向量子空间，若 $x_1,x_2\in D$，有 $x_1\vee x_2\in D$ 且 $x_1\wedge x_2\in D$，称 D 是 E 的模糊 Riesz 子空间。

定义 2.6 [7] 假设 (X,μ) 是有向模糊序向量空间。如果对于任意非负元素 $x\in X$，集合 $\{\alpha x:0<\alpha\in R\}$ 是无上界的，则称 X 是模糊 Archimedean 空间。

定义 2.7 [8] 假设 (X,μ) 是模糊偏序集，序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 属于 X。若当 $n\le m$ 时，有 $\mu(x_n,x_m)>\frac{1}{2}$，则称序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是递增的，记作 $x_n\uparrow$。特别地，如果 $x=\sup_{n\in N}\{x_n\}$ 存在，就记作 $x_n\uparrow x$。同样的，若当 $n\le m$ 时，有 $\mu(x_m,x_n)>\frac{1}{2}$，则称序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是递减的，记作 $x_n\downarrow$。特别地，如果 $x=\inf_{n\in N}\{x_n\}$ 存在，就

记作 $x_n\downarrow x$。

定义 2.8 [8] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，D 是 E 的子空间，如果它满足以下两个条件：

(1) $u\in D$ 当且仅当 $|u|\in D$；$\mu(u,v)>\frac{1}{2}$

(2) 对任意 $v\in D$，且 $\mu(u,v)>\frac{1}{2}$，有 $u\in D$。

则称 D 是 E 的模糊理想。

定义 2.9 [8] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，D 是 E 的子集，若 E 中存在包含 D 的最小模糊理想，即为由 D 生成的模糊理想，可记作 A_D。

定义 2.10 [8] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，$\{x_n\}\in(E,\mu)$，当 (E,μ) 中存在另一序列 $\{r_n\}_{n\in N}$ 满足 $\mu(|x_n-x|,r_n)>\frac{1}{2}$ 且 $r_n\downarrow 0$，则称 $\{x_n\}_{n\in N}$ 模糊序收敛于 x，且 $x\in X$，记做 $x_n\xrightarrow{fo}x$，同时也称 x 是序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 的模糊序极限。

定义 2.11 [8] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，S 是 E 的子集。

(1) 如果所有 $x_n\xrightarrow{fo}x$ ($\{x_n\}\subseteq S$)都有 $x\in S$，则称 S 是模糊序闭的。

(2) 如果所有 $x_n\xrightarrow{fo}x$ ($\{x_n\}_{n\in N}\subseteq S$)都有 $x\in S$，则称 S 是模糊 σ-序闭的。

定义 2.12 [8] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，I 是 E 中的模糊理想。

(1) 如果 I 是模糊序闭的，则称 I 是 E 中的模糊带。

(2) 如果 I 是模糊 σ-序闭的，则称 I 是 E 中的模糊 σ-理想。I_σ 表示包含 I 的最小的模糊 σ-理想。

定义 2.13 [8] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，则：

(1) 如果任意元素 $f,g\in E$ 满足 $|f|\wedge|g|=0$，则称 f 与 g 不交，记作 $f\perp g$；

(2) 假设 S 是 E 的子集，如果任意 $f\in E$，存在 $g\in S$ 使得 $f\perp g$，则称 f 与 S 不交，记作 $f\perp S$；

(3) 假设 S_1,S_2 是 E 的子集，如果任意 $f_1\in S_1$, $f_2\in S_2$ 满足 $f_1\perp f_2$，则称两个集合不交，记作 $S_1\perp S_2$。

定义 2.14 [4] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，$x\in E$。如果 $x^+=x\vee 0$，则称 x^+ 是 x 的正部；如果 $x^-=(-x)\vee 0$，则称 x^- 是 x 的负部；如果 $|x|=x\vee(-x)$，则称 $|x|$ 是 x 的绝对值。

定义 2.15 [4] 假设 (E,μ) 是模糊 Riesz 空间，且 $D\subseteq E$，则称 $D^d=\{x\in E\,|\,x\perp y,y\in D\}$ 是 D 的模糊不交补，D^{dd} 是 D^d 的模糊不交补，且 $D^{dd}=(D^d)^d$。如果 $D_1\subseteq D_2$，则 $D_2^d\subseteq D_1^d$。

性质 2.16 [4] 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，D 是 E 的子集，则下式成立：

(1) $D\subseteq D^{dd}$；

(2) $D^{d}=D^{ddd}$；

(3) $D^{d}\cap D^{dd}=\{0\}$；

(4) 如果 $D^{d}=\{0\}$，则 $D^{dd}=E$；

(5) D^{d} 是 E 的模糊理想；

(6) 如果 D 是 E 的模糊理想，则对任意非零 $x\in D^{dd}$ 存在非零元素 $y\in D$ 使得 $\mu(|y|,|x|)>\frac{1}{2}$。

定义 2.17 [8] 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间且 $f\in E$。若

$$I=\left\{g\mid g\in E:\mu(|g|,|\alpha f|)>\frac{1}{2},\alpha\in\mathbb{R}\right\},$$

则称 I 是由 f 生成的正则模糊理想，记为 I_f。若模糊带 B 是由 I 生成的模糊带，则称 B 是由 f 生成的正则模糊带，记为 $B_{(f)}$。

定义 2.18 [8] 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，则：

(1) 如果 E 中每个具有上界的非空子集都拥有上确界，则称 E 是模糊 Dedekind 完备的。

(2) 如果 E 中每个具有上界的可数非空子集都拥有上确界，则称 E 是模糊 Dedekind σ-完备的。

定义 2.19 [8] 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，则：

(1) 若 E 中的模糊带 B 满足 $B\oplus B^{d}=E$，则称 B 为模糊投影带；

(2) 若 E 中的任意模糊带 B 均满足 $B\oplus B^{d}=E$，则称 E 具有模糊投影性质；

(3) 若只有当 B 是正则模糊带时才满足 $B\oplus B^{d}=E$，则称 E 具有模糊正则投影性质。

定义 2.20 [8] 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，若 E 中每个拥有上确界的集合都包含一个拥有相同上确界的有限或可数子集，则称 E 是模糊序可分的。

3. 模糊 Riesz 空间中的模糊序基和模糊不交系统的性质

定义 3.1 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，A 是 E 中的模糊理想，$\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\}$ ($\{\sigma\}$是指标集)是由 A 中的元素组成的集合。

(1) 当$\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\}$生成的模糊理想在 A 中是模糊序稠密的，则称该集合为 A 的模糊序基。

(2) 当$\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\}$生成的模糊理想在 A 中是模糊 quasi 序稠密的，则称该集合为 A 的模糊 quasi 序基。

性质 3.2 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间。

(1) A 是由 E 中的元素 f 生成的正则模糊理想或正则模糊带，则只包含 f 的集合是 A 的模糊序基。

(2) 模糊理想 A 的任意模糊序基是 A 的模糊 quasi 序基。

(3) 若模糊理想 A 的每个模糊 quasi 序基都是 A 的模糊序基，则 E 是模糊 Archimedean Riesz 空间。

性质 3.3 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，A 是 E 中的模糊理想，B_A 是由 A 生成的模糊带。则 A 的任意模糊 quasi 序基也是 A^{dd} 的模糊 quasi 序基，因此也是 B_A 的模糊 quasi 序基。A 的任意模糊序基都是 B_A 的模糊序基。

性质 3.4 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，A 是 E 中的模糊理想。如果模糊理想 A 有一个可数模糊序基$(f_n:n=1,2,\cdots)$，则$(|f_n|:n=1,2,\cdots)$也是 A 的模糊序基。因此$(v_n:v_n=\sup(|f_1|,|f_2|,\cdots,|f_n|),n=1,2,\cdots)$是 A 的模糊序基，且 $\mu(0,v_n\uparrow)>\frac{1}{2}$。

性质 3.5 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间。如果$u,v\in E^+$，且 u 是由 v 生成的正则模糊带中的元素，则 $u=\sup(\inf(u,nv):n=1,2,\cdots)$。

性质 3.6 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，则在 E 中由可数集生成的模糊σ-理想等同于其生成的模糊带。每个拥有有限或可数序基的模糊σ-理想是一个模糊带。

定理 3.7 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间。如果 E 中的某个有限或可数的集合$(v_n;n=1,2,\cdots)$满足$v_n\uparrow$且 $\mu(0,v_n)>\dfrac{1}{2}$，$B_{(v_n)}$是由这个集合生成的模糊带，则任意$u\in B_{(v_n)}^+$，都满足：

$$u=\sup(\inf(u,nv_m):m,n=1,2,\cdots)=\sup(\inf(u,nv_n):n=1,2,\cdots)。$$

证明：设$I_{(v_n)}$是由集合$(v_n;n=1,2,\cdots)$生成的模糊理想。根据模糊带的定义，任意$u\in B_{(v_n)}^+$满足：

$$u=\sup W\left(W=\left\{w\mid w\in I_{(v_n)}^+:\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right\}\right)。$$

假设

$$W_1=(\inf(u,nv_m):m,n=1,2,\cdots)，\quad W_2=(\inf(u,nv_n):n=1,2,\cdots)，$$

显然，$W_2\subseteq W_1\subseteq W$。为了证明 u 也是 W_1 和 W_2 的上确界，只用证明 W_2 的上界是 W 的上界。对于任意的$w\in W$，满足$w\in I_{(v)}$。由模糊理想的定义知，存在某个自然数 k 和 v_m 使得$\mu(0,w)>\dfrac{1}{2}$，$\mu(w,kv_m)>\dfrac{1}{2}$。因此

$$\mu(w,nv_n)>\frac{1}{2}\ (n=\max(k,m))，$$

进一步可得

$$\mu(w,\inf(u,nv_n))>\frac{1}{2}，$$

所以 W_1 的上界也是 W 的上界，证毕。

定义 3.8 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，且具有模糊投影性质，B 是 E 中的模糊投影带。若$f\in E$，且$f=f_1+f_2$，有$f_1\in B$，$f_2\in B^d$，则称 f_1 是 f 在 B 中的 component，f_2 是 f 在 B^d 中的 component。

定理 3.9 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，且 E 是模糊 Dedekind σ-完备的或者是具有模糊投影性质的。再假设 L 中有集合$(v_n:n=1,2,\cdots)$满足$v_n\uparrow$且$\mu(0,v_n)>\dfrac{1}{2}$，令$B_{(v_n)}$是由这个集合生成的模糊带。则$B_{(v_n)}$是模糊投影带，并且对于任意的$u\in L^+$，在$B_{(v_n)}$中的 component u_1 满足：

$$u_1=\sup(\inf(u,nv_m):m,n=1,2,\cdots)=\sup(\inf(u,nv_n):n=1,2,\cdots)。$$

证明：设$I_{(v_n)}$是$(v_n:n=1,2,\cdots)$生成的模糊理想，令$W=\left(w:w\in I_{(v_n)}^+,\mu(w,u)>\dfrac{1}{2}\right)$，$W_1=(\inf(u,nv_m):m,n=1,2,\cdots)$，$W_2=(\inf(u,nv_n):n=1,2,\cdots)$。定理 4.1.7 已经证明 W、W_1、W_2 有相同的上界。再设$W_3=\left(w:w\in B_{(v_n)}^+,\mu(w,u)>\dfrac{1}{2}\right)$，很明显$W\subseteq W_3$，因此 W_3 的上界也是 W 的上界。又因为 W_3 中的元素是 W 中的元素集合的上确界，所以 W 的上界同时也是 W_3 的上界，故 W、W_1、W_2、W_3 有相同的上界。

假设 L 具有模糊投影性质，则$B_{(v_n)}$是一个模糊投影带。由性质 4.1.5 知，$u_1=\sup W_1=\sup W_2$。若 L 是模糊 Dedekind σ-完备的，则$\sup W_2$存在，且$\sup W_3$也存在。因此$B_{(v_n)}$是一个模糊投影带且$u_1=\sup W_3$，故$u_1=\sup W_1=\sup W_2$，证毕。

定义 3.10 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，若集合$(f_n:n=1,2,\cdots)$是由 E 中互不相交的非零元组成的，则此集合称作 E 中的一个模糊不交系统。若集合$(f_n:n=1,2,\cdots)$同时还是 E 的模糊 quasi 序基，则其称作 E 的模糊极大不交系统。

定义 3.12 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，若集合$(f_n:n=1,2,\cdots)$是 E 中的一个模糊不交系统，且此集合还是 E 的模糊序基，则其被称作 E 的模糊不交序基。

定理 3.13 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，则 E 中的每个模糊不交序基都是模糊极大不交系统。若 E 是模糊 Archimedean Riesz 空间，则 E 中的模糊极大不交系统都是模糊不交序基。

证明：假设模糊 Riesz 空间 E 中 E 存在模糊不交序基$(f_n:n=1,2,\cdots)$，则$(f_n:n=1,2,\cdots)$是 E 的模糊序基，故$(f_n:n=1,2,\cdots)$是的模糊 quasi 序基。因此$(f_n:n=1,2,\cdots)$是 E 的模糊极大不交系统。若 E 是模糊 Archimedean 的，且设 $I_{(f_n)}$ 是$(f_n:n=1,2,\cdots)$生成的模糊理想，$B_{(f_n)}$ 是 $I_{(f_n)}$ 生成的模糊带。因$(f_n:n=1,2,\cdots)$是 E 的模糊 quasi 序基，则 $I_{(f_n)}$ 在 E 中是模糊 quasi 序稠密的，故 $B_{(f_n)}^{dd}\subseteq E$。由于 E 是模糊 Archimedean 的，则 $B_{(f_n)}=B_{(f_n)}^{dd}$ [9]，故有 $B_{(f_n)}\subseteq E$。从而 $I_{(f_n)}$ 在 E 中是模糊序稠密的，$(f_n:n=1,2,\cdots)$是 E 中的模糊不交序基。由此证得 E 中的模糊极大不交系统同时也是模糊不交序基。

定理 3.14 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，且 E 具有模糊正则投影性，$(v_n:n=1,2,\cdots)$是 E 中的一个有限或可数的模糊序基，满足 $v_n\uparrow$ 且 $\mu(0,v_n)>\frac{1}{2}$，则 E 中存在某个有限或可数的模糊不交序基$(w_n:n=1,2,\cdots)$，使得对于每个 n，都存在 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ $(m\le n)$生成的模糊带和 v_n 生成的模糊带是相同的。

证明：当 $n\ge 2$ 时，假设 v_n' 是 v_n 在由 v_{n-1} 产生的带上的 component，且令 $u_1=v_1$，$u_n=v_n-v_n'$ $(n\ge 2)$。由于 E 具有模糊正则投影性，则 v_{n-1} 生成的带都是模糊正则投影带，故 u_{n-1} 与 u_n 是不交的。因此$(u_n:n=1,2,\cdots)$是 E 中的一个模糊不交序基，且生成的模糊带与 v_n 生成的模糊带相同。由于$(u_n:n=1,2,\cdots)$中可能会存在零元，去掉零元再重新排序后得到满足条件的新集合$(w_n:n=1,2,\cdots)$，证毕。

定理 3.15 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，若 E 中存在有限或可数的模糊序基，则 E 中的每个模糊投影带都有有限或可数的模糊序基。

证明：设$(u_n:n=1,2,\cdots)$是 E 中的模糊序基，且 $u_n\uparrow\in E^+$，A 是 E 中的模糊投影带。令 $u_n=v_n+w_n$ ($v_n\in A$，$w_n\in A^d$)，接下来证明$(v_n:n=1,2,\cdots)$是 A 的一个模糊序基：

由定理 4.1.7 知，任意的 $z\in L^+$ 均满足：

$$z=\sup\left(\inf(z,nu_n):n=1,2,\cdots\right)=\sup\left(\inf(z,nv_n+nw_n):n=1,2,\cdots\right)。$$

如果 $z\in A^+=A\bigcap L^+$，则 $z\perp w_n$。因此

$$\inf(z,nv_n+nw_n)=\inf(z,nv_n),$$

故可得

$$z=\sup\left(\inf(z,nv_n):n=1,2,\cdots\right)。$$

这便证明了每个 $z\in A^+$ 都是$(v_n:n=1,2,\cdots)$所生成的模糊带中的元素，从而 $u_t\uparrow u$ 且 $\mu(0,u_t)>\frac{1}{2}$ 包含在这个模糊带中。很明显$(v_n:n=1,2,\cdots)$生成的模糊带是包含在 A 中的，因此 A 就是由$(v_n:n=1,2,\cdots)$生成的模糊带。故$(v_n:n=1,2,\cdots)$是 A 的模糊序基，证毕。

定理 3.16 假设(E,μ)是模糊 Riesz 空间，A 是 E 中的模糊正则理想。若 A 中的模糊理想都有可数的模糊 quasi 序基，则 E 具有如下性质：对于任意满足 $u_t\uparrow u$ 且 $\mu(0,u_t)>\frac{1}{2}$ 的有向集$(u_t:t=1,2,\cdots)$和满足 $\mu(0,\varepsilon)>\frac{1}{2},\mu(\varepsilon,1)>\frac{1}{2}$ 的任意 ε，在$(u_t:t=1,2,\cdots)$中存在递增的子列$(u_{t_n}:n=1,2,\cdots)$满足$(u_{t_n}-\varepsilon u)^-\downarrow 0$

且 $\inf\left(u_{t_n},\varepsilon u\right)\uparrow\varepsilon u$。

证明：假设 $u_t\uparrow u$ 且 $\mu\left(0,u_t\right)>\frac{1}{2}$，存在 ε 满足 $\mu\left(0,\varepsilon\right)>\frac{1}{2},\mu\left(\varepsilon,1\right)>\frac{1}{2}$。令 $v_t=\left(u_t-\varepsilon u\right)^{+}\left(t=1,2,\cdots\right)$，$I_{\left(v_n\right)}$ 表示由 $\left(v_t:t=1,2,\cdots\right)$ 生成的模糊理想，I_u 表示由 u 生成的模糊正则理想。由于

$$\mu\left(0,v_t\right)>\frac{1}{2},\mu\left(v_t,u_t\right)>\frac{1}{2},\mu\left(u_t,u\right)>\frac{1}{2},$$

于是 $I_{(v)}\subseteq I_{(u)}$。结合 $u_t\uparrow u$ 且 $\mu\left(0,u_t\right)>\frac{1}{2}$ 和 $v_t=\left(u_t-\varepsilon u\right)^{+}$，得到

$$v_t\uparrow\left(1-\varepsilon\right)u \text{ 且 } \mu\left(0,v_t\right)>\frac{1}{2}。$$

因此 u 是 $\left\{I_{\left(v_n\right)}\right\}$ 中的元素，所以 $I_u\subseteq\left\{I_{\left(v_n\right)}\right\}$，故 $I_{\left(v_n\right)}$ 在 I_u 中是模糊序稠密的。由假设可知，模糊理想 $I_{\left(v_n\right)}$ 有可数的模糊 quasi 序基。令 $\left(z_n:n=1,2,\cdots\right)$ 是 $I_{\left(v_n\right)}$ 的一个模糊 quasi 序基，且假设 $z_n\uparrow$ 且 $\mu\left(0,z_n\right)>\frac{1}{2}$。因 $z_n\in A$，故存在某个大于零的自然数 c_n 和某个 $\left(v_t:t=1,2,\cdots\right)$ 中的元素 v_{t_n} 满足：

$$\mu\left(z_n,c_nv_{t_n}\right)>\frac{1}{2}。$$

令 $v_{t_n}=\left(u_{t_n}-\varepsilon u\right)^{+}$，由于 $\left(u_{t_n}:n=1,2,\cdots\right)$ 是递增序列，故 $\left(v_{t_n}:n=1,2,\cdots\right)$ 也是递增的。令 $w_{t_n}=\left(u_{t_n}-\varepsilon u\right)^{-}$，则 $\left(w_{t_n}:n=1,2,\cdots\right)$ 是递减的，且

$$w_{t_n}\perp v_{t_n}。$$

又因 $\mu\left(z_n,c_nv_{t_n}\right)>\frac{1}{2}$，故

$$w_{t_n}\perp z_n\left(n=1,2,\cdots\right)。$$

假设 $0\le w\le w_{t_n}$，则 $w\in I_u\left(w_{t_n}\in I_u\right)$，且

$$w\perp z_n\left(n=1,2,\cdots\right),$$

故 $w=0$，从而得到 $w_{t_n}\downarrow 0$，因此 $\left(u_{t_n}-\varepsilon u\right)^{-}\downarrow 0$。

由 $\left(u_{t_n}-\varepsilon u\right)^{-}\downarrow 0$ 可得

$$\mu\left(0,\left(u-u_{t_n}\right)=\left(1-\varepsilon\right)u+\left(\varepsilon u-u_{t_n}\right)\right)>\frac{1}{2},$$

$$\mu\left(\left(1-\varepsilon\right)u+\left(\varepsilon u-u_{tn}\right),\left(1-\varepsilon\right)u+\left(\varepsilon u-u_{t_n}\right)^{+}=\left(1-\varepsilon\right)u+\left(u_{t_n}-\varepsilon u\right)^{-}\right)>\frac{1}{2},$$

再由

$$\left(u_{t_n}-\varepsilon u\right)^{-}=-\inf\left(u_{t_n}-\varepsilon u,0\right)=-\left\{\inf\left(u_{t_n},\varepsilon u\right)-\varepsilon u\right\}=\varepsilon u-\inf\left(u_{t_n},\varepsilon u\right)$$

可知

$$\varepsilon u-\inf\left(u_{t_n},\varepsilon u\right)\downarrow 0,$$

因此可得

$$\inf\left(u_{t_n},\varepsilon u\right)\uparrow\varepsilon u。$$

证毕。

定理 3.17 假设(L,μ)是模糊 Archimedean Riesz 空间，A 是在 L 中模糊序稠密的任意模糊理想。若 A 在 L 中是模糊 super 序稠密的，则对于 L 中的任意模糊不交系统$(f_n : n=1,2,\cdots)$和任意的 $g \in L$，有

$$\inf\left(|g|,|f_n|\right) \neq 0 \ (n=1,2,\cdots)。$$

证明：给定 L 中的模糊不交系统$(f_n : n=1,2,\cdots)$和元素 g，用 I_n 表示由$(f_n : n=1,2,\cdots)$生成的模糊正则理想，$I_{(f_n)}$ 表示由$(f_n : n=1,2,\cdots)$生成的模糊理想。由模糊理想的定义知，每个 $f \in A$ 都满足 $f=\sum k f_k \ (k=1,2,\cdots)$。因为 L 是模糊 Archimedean 的，所以 $I_{(f)} \oplus I_{(f)}^d$ 在 L 中是模糊序稠密的，且

$$|g| = \sup\left(u : u \in I_{(f)} \oplus I_{(f)}^d, \mu(0,u) > \frac{1}{2}, \mu(u,|g|) > \frac{1}{2}\right)。$$

由于 L 中的每个序稠密理想都是 super 序稠密的，故在 $I_{(f)} \oplus I_{(f)}^d$ 中存在一组序列$(u_n : n=1,2,\cdots)$满足

$$u_n \uparrow |g| \text{ 且 } \mu(0,u_n) > \frac{1}{2}。$$

每个 $h \in I_{(f)} \oplus I_{(f)}^d$ 都可分解为有限和

$$h = \sum k h_k + h'\left(h_k \in I_{nk}, h' \in I_{(f)}^d\right)。$$

由于$(f_n : n=1,2,\cdots)$是不交系统，从而 $h \perp f_n$ 成立(除了不符合的有限多个 f_{nk})。特别地，$u_n \perp f_n$ 成立(除有限个$(f_n : n=1,2,\cdots)$)，因此这有限多个$(f_n : n=1,2,\cdots)$满足$|f_n| \wedge |u_n| \neq 0$，

又 $\mu\left(0,u_n \uparrow |g|\right) > \frac{1}{2}$，故

$$|f_n| \wedge |g| \neq 0。$$

从而 $\inf\left(|g|,|f_n|\right) \neq 0 (n=1,2,\cdots)$，证毕。

定理 3.18 假设(L,μ)是模糊 Archimedean Riesz 空间，A 是 L 中拥有可数模糊序基的任意模糊理想。若每个由 L^+ 中的元素组成的具有上界的模糊不交系统都是有限或可数的，则 A 中的模糊理想都有可数或有限的模糊序基。

证明：假设 A 是 L 中拥有可数模糊序基$(f_n : n=1,2,\cdots)$的模糊理想，B 是包含在 A 中的模糊理想，且 $B \neq \{0\}$。由定理 4.2.3 知，B 有一个模糊极大不交系统$(u_t : t=1,2,\cdots)$，且假设 $u_n \in L^+$。则对于任意固定的 n，有

$$v_t = \inf\left(|f_n|, u_t\right) > 0，$$

从而$(v_t : v_t > 0)$是一个以$|f_n|$为上界的不交系统，且由假设$(v_t : t=1,2,\cdots)$是有限或可数的，因此$(u_t : t=1,2,\cdots)$是有限或可数的。对于每个 f_n，有

$$u_t \perp f_n，$$

故

$$u_t \perp A，$$

从而$(u_t : t=1,2,\cdots)$是一个有限或可数的不交系统$(u_n : n=1,2,\cdots)$。L 是模糊 Archimedean 的，故 B 中的模糊极大不交系统是 B 的模糊序基。因此$(u_n : n=1,2,\cdots)$是 B 的一个有限或可数的模糊序基。

定理 3.19 假设(L,μ)是模糊 Archimedean Riesz 空间，A 是 L 中的任意模糊正则理想。若 A 中的模糊理想都有一个可数或有限的模糊序基，则 L 是模糊序可分的。

证明：假设 $u_\tau \uparrow u \in L^+$，$v_{m_n} \downarrow_n 0 \in E^+ (n=1,2,\cdots)$。由定理 4.2.6 知，对每个固定的自然数 m，存在序列$\left(\tau_{m_n} : n=1,2,\cdots\right)$，有

$$\mu\left(0,u-u_{\tau_{m_n}}\right)>\frac{1}{2},\ \mu\left(u-u_{\tau_{m_n}},m^{-1}u+v_{m_n}\right)>\frac{1}{2}\text{。}$$

接下来证明

$$\sup\left(u_{\tau_{m_n}}:m,n=1,2,\cdots\right)=u\text{。}$$

假设对任意的 m,n 都满足

$$\mu\left(0,u_{\tau_{m_n}}\right)>\frac{1}{2},\ \mu\left(u_{\tau_{m_n}},v\right)>\frac{1}{2},\ \mu(v,u)>\frac{1}{2},$$

由于

$$\mu\left(u-v,u-u_{\tau_{m_n}}\right)>\frac{1}{2},$$

从而

$$\mu\left(u-v,m^{-1}u\right)>\frac{1}{2}(m=1,2,\cdots)\text{。}$$

又因 L 是 Archimedean 的，故 $u-v=0$，因此 $\sup\left(u_{\tau_{m_n}}:m,n=1,2,\cdots\right)=u$。综上所述，对每个 $u_\tau\uparrow u\in L^+$，存在子列 $\left(u_{\tau_n}:n=1,2,\cdots\right)$ 满足 $u_{\tau_n}\uparrow u$，即 L 是模糊序可分的，证毕。

定理 3.20 假设 (L,μ) 是模糊 Archimedean Riesz 空间，A 是 L 中的模糊理想。若 A 是模糊序可分的且在 L 中是模糊序稠密的，则 L 也是模糊序可分的。

证明：结合模糊序稠密和模糊 super 序稠密的定义知，若在 L 中是模糊序稠密的模糊理想都满足在 L 中是模糊 super 序稠密的，则 L 是模糊序可分的。假设 B 是在 L 中模糊序稠密的模糊理想，则 $A\cap B$ 是在 A 中模糊序稠密的模糊理想。由假设 A 是模糊序可分的，从而 $A\cap B$ 在 A 中是模糊 super 序可分的。又因 A 在 L 中是模糊 super 序稠密的，故 $A\cap B$ 在 L 中是模糊 super 序稠密的，证毕。

4. 结论

本文给出了模糊 Riesz 空间中的模糊序基和模糊不交系统的定义并讨论其基本性质。首先讨论了由可数集 $\{v_n:n=1,2,\cdots\}$ 生成的模糊带中元素的刻画。其次讨论了若 Archimedean Riesz 空间中模糊序稠理想是模糊 super 序稠的，则不交系统具有的一些基本性质。最后给出了模糊 Archimedean Riesz 空间中模糊理想具有可数或有限的模糊序基的条件，给出了模糊 Archimedean Riesz 空间模糊序可分的条件。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Zadeh, L. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Ordering. *Information Science*, **8**, 177-200. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1

[3] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **46**, 221-226. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P

[4] Beg, I. and Islam, M. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-241. https://doi.org/10.1142/9789814447010_0001

[5] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670.

[6] Beg, I. (1997) σ-Complete Fuzzy Riesz Spaces. *Results in Mathematics*, **31**, 292-299. https://doi.org/10.1007/BF03322166

[7] Beg, I. and Islam, M. (1997) Fuzzy Archimedean Spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, **5**, 413-424.

[8] Liang, H. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands and Fuzzy Band Projections. *Annals of the West*

University of Timisoara: *Mathematics and Computer Science*, **53**, 77-108. https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005

[9] Iqbal, M. and Bashir, Z. (2020) The Existence of Fuzzy Dedekind Completion of Archimedean Fuzzy Riesz Space. *Computational & Applied Mathematics*, **39**, 1-15. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1139-3

[10] Cheng, N. and Chen, G.G. (2021) Fuzzy Rieszhomomophism on Fuzzy Riesz Space. arxiv:2104.07498v1.

[11] Cheng, N., Liu, X. and Dai, J. (2022) Extension of Fuzzy Linear Operators on Fuzzy Riesz Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **179**, 103168. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2022.103168

[12] 赵娟娟, 程娜. 模糊 Riesz 空间中模糊不相交补和模糊投影带性质的研究[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2178-2188. https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212234

[13] Shailendra, S. and Tiwari, S.P. (2023) L-Fuzzy Automata Theory: Some Characterizations via General Fuzzy Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **460**, 103-142. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.05.020