Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 599-604
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145213

Hans汉斯

$\mathcal{K}$-正则和$\mathcal{K}$-反演半群

尹 碟，龚晓倩

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2024年4月15日；录用日期：2024年5月17日；发布日期：2024年5月31日

摘 要

格林关系在半群理论的发展中发挥着根本性作用。本文主要对几类由格林关系所确定的$\mathcal{K}$-正则和$\mathcal{K}$-反演半群进行了研究。首先介绍了$\mathcal{K}$-正则和$\mathcal{K}$-反演半群的相关概念，其次利用格林关系对$\mathcal{K}$-正则半群进行了完整的刻画，同时也给出了两类特殊的$\mathcal{K}$-反演半群的刻画，最后提出了刻画其他$\mathcal{K}$-反演半群等相关问题。

关键词

$\mathcal{K}$-正则半群，$\mathcal{K}$-反演半群，格林关系

$\mathcal{K}$-Regular and $\mathcal{K}$-Inversive Semigroups

Die Yin, Xiaoqian Gong

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Apr. 15th, 2024; accepted: May 17th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

Green's relation plays a fundamental role in the development of semigroup theory. In this paper, several classes of $\mathcal{K}$-regular and $\mathcal{K}$-inversive semigroups determined by Green's relation are studied. Firstly, the related concepts of $\mathcal{K}$-regular and $\mathcal{K}$-inversive semigroups are introduced. Secondly, a complete description of $\mathcal{K}$-regular semigroups is given by using Green's relation. At the same time, two kinds of special $\mathcal{K}$-inversive semigroups are described. Finally, some related problems such as characterization of other $\mathcal{K}$-inversive semigroups are presented.

Keywords

$\mathcal{K}$-Regular Semigroup, $\mathcal{K}$-Inversive Semigroup, Green Relation

文章引用: 尹碟, 龚晓倩. $\mathcal{K}$-正则和$\mathcal{K}$-反演半群[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 599-604.
DOI: 10.12677/pm.2024.145213

1. 引言

正则半群是半群代数理论的主流研究领域，1951 年，Green 在文献[1]中引入了现在称之为格林关系的五个等价关系，即关系 $\mathcal{H},\mathcal{R},\mathcal{L},\mathcal{D},\mathcal{J}$ 。自此，格林关系成为半群研究，特别是正则半群研究的基本工具。目前，正则半群的研究成果已非常丰富，一般正则半群的代数结构已经获得(见文献[2] [3] [4] [5] [6]及其参考文献)。

另一方面，在正则半群研究成果的基础上，人们开始了对非正则半群的探讨。*E*-反演半群作为一类重要的非正则半群，自上世纪就受到半群学者的重视，至今仍有新的成果不断出现(见文献[7] [8] [9] [10])。2011 年，Mary 在文献[11]中利用格林关系定义并研究了半群中元素的一种广义逆，给出了群逆，Drazin 逆和 Mosre-penrose 逆的一种统一的处理方式。近年来 Mary 的思想和结果又被进一步推广(见文献[12] [13] [14]及其参考文献)。

受文献[11] [12] [13] [14]启发，本文我们定义并研究几类由格林关系所确定的正则半群和 *E*-反演半群，给出了这些半群类的一些性质和刻画。

2. 预备知识

本节给出本文需要的一些已知概念和结果。设 S 是半群。定义 S 上的关系 $\mathcal{H},\mathcal{R},\mathcal{L},\mathcal{D},\mathcal{J}$ 如下：对任意 S 中的元素 a,b，

$a\,\mathcal{L}\,b$ 当且仅当在 S^1 中存在 x,y 使得 $xa=b,\ yb=a$；

$a\,\mathcal{R}\,b$ 当且仅当在 S^1 中存在 u,v 使得 $au=b,\ bv=a$；

$a\,\mathcal{J}\,b$ 当且仅当在 S^1 中存在 x,y,u,v 使得 $xay=b,\ ubv=a$；

$$\mathcal{H}=\mathcal{L}\cap\mathcal{R},\ \mathcal{D}=\mathcal{L}\circ\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in S\times S\mid(\exists z\in S)(x,z)\in\mathcal{L},(z,y)\in\mathcal{R}\right\}.$$

则上述关系都是 S 上的等价关系，称它们为 S 的格林关系。设 $\mathcal{K}\in\{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{D},\mathcal{J}\}$。按照惯例，用 K_a 表示包含元素 a 的 $\mathcal{K}$-类。易见，$\mathcal{L}\subseteq\mathcal{D}\subseteq\mathcal{J}$，$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{D}\subseteq\mathcal{J}$。

设 S 是半群，对 S 中的任意元素 a，记

$$V(a)=\{b\in S\mid bab=b,aba=a\},W(a)=\{b\in S\mid bab=b\}.$$

称半群 S 是正则的，若对任意 $a\in S$，有 $V(a)\neq\Phi$。称半群 S 是反演的，若对任意 $a\in S$，有 $W(a)\neq\Phi$。称半群 S 为双单的，若 $\mathcal{D}=S\times S$。而称半群 S 为单的，若 $\mathcal{J}=S\times S$。记 $E(S)=\{e\in S\mid e^2=e\}$，即 $E(S)$ 是 S 的幂等元的集合。设 $e\in E(S)$。称 e 本原，若对任意 $f\in E(S)$，$ef=fe=f$ 蕴含 $e=f$。若 S 是单的且含有本原幂等元，则称它为完全单半群。

设 S 是正则半群。称 S 完全正则，若对任意 $a\in S$，有 $a\mathcal{H}a^2$。称 S 是逆半群，若对任意 $e,f\in E(S)$，都有 $ef=fe$。完全正则的逆半群称为 Clifford 半群。每个元素都幂等的交换半群称为半格。设 S 是半群，Y 是半格，对每一个 $\alpha\in Y$，S_α 是 S 的子半群且满足下列条件：

$$S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha,\ S_\alpha\cap S_\beta=\Phi(\alpha\neq\beta),\ S_\alpha S_\beta\subseteq S_{\alpha\beta}.$$

则称 S 是 S_α 的半格，记作 $S=(S_\alpha,Y)$。

引理 2.1 [3] 设 S 是半群。

(1) 若 $a'\in V(a)$，则 aa' 和 $a'a$ 均为幂等元且 $aa'\mathcal{R}\,a\,\mathcal{L}a'a$。

(2) 若 $a\mathcal{D}b$，则 $ab\in R_a\cap L_b$ 当且仅当 $L_a\cap R_b$ 含幂等元。

(3) S 的 $\mathcal{H}$-类 H 是群当且仅当 H 含有幂等元当且仅当存在 $a\in H$ 使得 $a^2\in H$。

(4) S 中没有 $\mathcal{H}$-类能包含超过一个幂等元。

引理 2.2 [3] 设 G 是具有单位元 e 的群，I,Λ 是非空集，$P=(p_{\lambda i})$ 是 G 上 $\Lambda\times I$ 矩阵。在 $S=I\times G\times\Lambda$ 上定义如下乘法：

$$(i,a,\lambda)(j,b,u)=(i,ap_{\lambda j}b,u).$$

则 S 是完全单半群，此时，S 每个 $\mathcal{H}$-类 $H=\{(i,g,\lambda)\mid g\in G\}$ 是群且 $HSH\subseteq H$。反之，任意完全单半群均可如此构造。

引理 2.3 [3] 设 S 是完全正则半群，则 $\mathcal{D}=\mathcal{J}$ 且存在半格 Y 及 S 的子半群 $S_\alpha(\alpha\in Y)$ 使得 $S=(S_\alpha,Y)$，诸 S_α 是完全单半群，$S_\alpha,\alpha\in Y$ 是 S 的全部 $\mathcal{D}$-类。此时，S 是 Clifford 半群当且仅当诸 S_α 是群。

3. 主要结果及其证明

设 S 是半群，$\mathcal{K}\in\{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{D},\mathcal{J}\}$。称半群 S 是 $\mathcal{K}$-正则半群，若存在 $\mathcal{K}$-类 K 使得对任意 $a\in S$，$V(a)\cap K\neq\Phi$。称半群 S 是 $\mathcal{K}$-反演半群，若存在 $\mathcal{K}$-类 K 使得对任意 $a\in S$，$W(a)\cap K\neq\Phi$。下面给出 $\mathcal{K}$-正则半群的刻画。

定理 3.1 设 S 是半群，则下列陈述等价：

(1) S 是 $\mathcal{L}$-正则半群。

(2) S 是 $\mathcal{R}$-正则半群。

(3) S 是完全单半群。

(4) S 是 $\mathcal{H}$-正则半群。

证明. (1)$\Rightarrow$(3)。设 S 是 $\mathcal{L}$-正则半群，则存在 $\mathcal{L}$-类 L 使得对任意 $x\in S$，都有 $V(x)\cap L\neq\Phi$。设 $a,b\in L$，$u\in V(a)\cap L$，$v\in V(b)\cap L$，由引理 2.1 的(1)知，$a\mathcal{R}\,au\,\mathcal{L}\,u\,\mathcal{L}\,a$，于是 $a\mathcal{H}\,au$。据引理 2.1 的(3)，L 中的每一个 $\mathcal{H}$-类都是群，特别地，L 中含有幂等元。设 $s,t\in S$，$s'\in V(s)\cap L$，$t'\in V(t)\cap L$。则 $s'\mathcal{L}\,t'$。由引理 2.1 的(1)知，$s\,\mathcal{L}\,s's\,\mathcal{R}\,s'\mathcal{L}\,t'\mathcal{R}\,t't\,\mathcal{L}\,t$。于是 $s\mathcal{D}\,t$。这表明 S 只有一个 $\mathcal{D}$-类，从而是单半群。设 $e\in L$，$e,f\in E(S)$ 且 $fe=ef=f$。取 $u\in V(f)\cap L$，据引理 2.1 的(1)，

$$u\,\mathcal{L}\,fu\,\mathcal{R}\,f\,\mathcal{L}\,uf\,\mathcal{R}\,u.$$

又 $e,u\in L$，故 $e\mathcal{L}\,u$。注意到 $fe=ef=f$ 及 $fu\in E(S)$ 知 $e\mathcal{L}\,fu=fe=f\,\mathcal{L}\,ef=f\mathcal{R}\,e$。于是 $e\mathcal{H}\,f$。由 $e,f\in E(S)$ 和引理 2.1 的(4)知 $e=f$。这证明了 S 是单的且有本原幂等元，即 S 是完全单半群。

(2)$\Rightarrow$(3)。这是(1)$\Rightarrow$(3)的对偶。

(3)$\Rightarrow$(4)。设 S 是完全单半群，据引理 2.2，不妨设 $S=M(G,I,\Lambda,P)$，任取其一个 $\mathcal{H}$-类 $H=\{(i,g,\lambda)\mid g\in G\}$。设 $(j,h,u)\in S$。则

$$(j,h,u)(i,p_{uj}^{-1}h^{-1}p_{\lambda j}^{-1},\lambda)(j,h,u)=(j,h,u),$$

$$(i,p_{uj}^{-1}h^{-1}p_{\lambda j}^{-1},\lambda)(j,h,u)(i,p_{uj}^{-1}h^{-1}p_{\lambda j}^{-1},\lambda)=(i,p_{uj}^{-1}h^{-1}p_{\lambda j}^{-1},\lambda).$$

故 $(i,p_{uj}^{-1}h^{-1}p_{\lambda j}^{-1},\lambda)\in V(j,h,u)\cap H$，于是 S 是 $\mathcal{H}$-正则的。

(4)$\Rightarrow$(1), (2)。显然。

命题 3.2 设 S 是半群，则 S 是 $\mathcal{D}$-正则的当且仅当 S 是双单的正则半群。

证明. 设 S 是 $\mathcal{D}$-正则半群，则存在 $\mathcal{D}$-类 D 使得对任意 $x\in S$，都有 $V(x)\cap D\neq\Phi$。于是 S 是正则半群。设 $a,b\in S$，$u\in V(a)\cap D$，$v\in V(b)\cap D$，则 $u\,\mathcal{D}\,v$。由引理 2.1 的(1)知，$a\,\mathcal{R}\,au\,\mathcal{L}\,u\,\mathcal{D}\,v\,\mathcal{L}\,bv\,\mathcal{R}\,b$，于是 $a\,\mathcal{D}\,b$，故 S 是双单的。反之，设 S 是双单的正则半群，则 S 只有一个 $\mathcal{D}$-类 S，因为 S 是正则的，故对任意 $x\in S$，都有 $V(x)\neq\Phi$，即 $V(x)\cap S\neq\Phi$。这表明 S 是 $\mathcal{D}$-正则半群。

命题 3.3 设 S 是半群，H 是 S 的 $\mathcal{H}$-类，且对任意 $a\in S$，都有 $W(a)\cap H\neq\Phi$，则 H 是群且对任意 $x\in S$，都有 $|W(x)\cap H|=1$。

证明. 设 $a\in H$，由条件可设 $b\in W(a)\cap H$，于是 $bab=b$ 且 $a\,\mathcal{H}\,b$。由 $a\,\mathcal{H}\,b$ 可设 $a=ub=bv$，其中 $u,v\in S^1$。于是

$$a^2b=aab=ubab=ub=a \text{ 且 } ba^2=baa=babv=bv=a.$$

这表明 $a\,\mathcal{H}\,a^2$，由引理 2.1 的(3)知，H 是群。设 $a\in S$，$b,c\in W(a)\cap H$。则 $b\,\mathcal{H}\,c$，$bab=b$，$cac=c$，由 $b\,\mathcal{H}\,c$ 知 $b=uc$，$c=bt$，于是 $c=bt=babt=bac=ucac=uc=b$。

命题 3.4 设 S 是半群，则 S 是 $\mathcal{J}$-正则的当且仅当 S 是单的正则半群。

证明. 设 S 是 $\mathcal{J}$-正则的，则存在 $\mathcal{J}$-类 J 使得对任意 $x\in S$，都有 $V(x)\cap J\neq\Phi$，于是 S 正则。设 $a,b\in S$，$u\in V(a)\cap J$，$v\in V(b)\cap J$，则 $u\,J\,v$。由引理 2.1 的(1)知，$a\,\mathcal{R}\,au\,\mathcal{L}\,u\,\mathcal{J}\,v\,\mathcal{L}\,bv\,\mathcal{R}\,b$，故 $a\,\mathcal{J}\,b$，从而 S 是单的。反之，设 S 是单的正则半群，则 S 只有一个 $\mathcal{J}$-类 S。因为 S 正则，故对任意 $x\in S$，都有 $V(x)\neq\Phi$，即 $V(x)\cap S\neq\Phi$，这说明 S 是 $\mathcal{J}$-正则半群。

下面考虑 $\mathcal{K}$-反演半群，先考虑 $\mathcal{K}$-反演的完全正则半群。

命题 3.5 设 $S=(S_\alpha,Y)$ 是完全正则半群，则下列叙述等价：

(1) S 是 $\mathcal{H}$-反演的。

(2) S 是 $\mathcal{L}$-反演的。

(3) S 是 $\mathcal{R}$-反演的。

(4) S 是 $\mathcal{D}$-反演的。

(5) Y 有最小元。

证明. $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(4)$，$(1)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$显然成立。下证$(4)\Rightarrow(5)$和$(5)\Rightarrow(1)$。

$(4)\Rightarrow(5)$。设 S 是 $\mathcal{D}$-反演的，存在 $\mathcal{D}$-类 S_α 使得对任意 $x\in S$，都有 $W(x)\cap S_\alpha\neq\Phi$。下证 α 是 Y 的最小元。事实上，设 $\beta\in Y$，$a\in S_\beta$，则由条件可设 $b\in W(a)\cap S_\alpha$。于是 $bab=b$。故 $\alpha\beta\alpha=\alpha$。由 Y 是半格知，$\alpha\beta=\alpha$，即 $\alpha\leq\beta$。这就证明了 α 是 Y 的最小元。

$(5)\Rightarrow(1)$。设 α 是 Y 的最小元。据引理 2.3，S_α 是完全单半群，故其每个 $\mathcal{H}$-类都是群。固定 S_α 的一个 $\mathcal{H}$-类 H 并记 H 的单位元为 e，当然 H 也是 S 的一个 $\mathcal{H}$-类。任取 $a\in S_\beta$，$\beta\in Y$，则 $eae\in S_\alpha S_\beta S_\alpha\subseteq S_{\alpha\beta\alpha}=S_{\alpha\beta}=S_\alpha$，且 $eae\in H$。由 H 是群知 eae 在 H 中有逆元，记为 $(eae)^{-1}$，则 $(eae)^{-1}\in H$，且

$$(eae)^{-1}a(eae)^{-1}=(eae)^{-1}(eae)(eae)^{-1}=(eae)^{-1}.$$

这表明 $(eae)^{-1}\in W(a)\cap H$。故 S 是 $\mathcal{H}$-反演的。

下面考虑 Bruck-Reilly 扩张的 $\mathcal{K}$-反演性。先回忆 Bruck-Reilly 扩张的概念。设 T 是幺半群，1 是单位元，H_1 是 T 的可逆元构成的群，$\theta:T\to H_1$ 是同态，$N^0=\{0,1,2,3,\cdots\}$。在 $S=N^0\times T\times N^0$ 上定义

$(m,a,n)(p,b,q)=\left(m-n+t,\left(a\theta^{t-n}\right)\left(b\theta^{t-p}\right),q-p+t\right)$，其中，$t=\max(n,p)$，$a\theta^0=a$。

则 S 是半群，称其为由 T 和 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张，并记作 $S=BR(T,\theta)$。对 Bruck-Reilly 扩张，

有以下已知结果。

引理 3.6 [3] 设 S 是由 T 和 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张，$(m,a,n),(p,b,q)\in S$。

(1) (m,a,n) 和 (p,b,q) $\mathcal{L}$-等价当且仅当 a 和 b $\mathcal{L}$-等价且 $n=q$，从而 S 的全部 $\mathcal{L}$-类是：$\{(m,a,n)\mid m\in N^0, a\in L\}$，其中 $n\in N^0$，L 是 T 的 $\mathcal{L}$-类。

(2) (m,a,n) 和 (p,b,q) $\mathcal{R}$-等价当且仅当 a 和 b $\mathcal{R}$-等价且 $m=p$，从而 S 的全部 $\mathcal{R}$-类是：$\{(m,a,n)\mid n\in N^0, a\in R\}$，其中 $m\in N^0$，R 是 T 的 $\mathcal{R}$-类。

(3) (m,a,n) 和 (p,b,q) $\mathcal{D}$-等价当且仅当 a 和 b $\mathcal{D}$-等价，从而 S 的全部 $\mathcal{D}$-类是：$\{(m,a,n)\mid a\in D\}$，其中 $m,n\in N^0$，D 是 T 的 $\mathcal{D}$-类。

(4) S 是具有单位元 $(0,1,0)$ 的单半群。

(5) S是逆半群当且仅当T是逆半群。

命题 3.7 设 S 是由 T 和 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张，$\mathcal{K}\in\{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H}\}$。则 S 不是 $\mathcal{K}$-反演的。

证明. 只证明 $\mathcal{L}$ 的情况，$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{H}$ 的情况类似可证。设 S 是 $\mathcal{L}$-反演的，据引理 3.6 的(1)，存在 S 的 $\mathcal{L}$-类 $L^S=\{(m,a,n)\mid a\in L, m\in N^0\}$，其中 $n\in N^0$，L 是 T 的 $\mathcal{L}$-类。使得对任意 $(p,b,q)\in S$，存在 $(m,a,n)\in L^S$，使得 $(m,a,n)(p,b,q)(m,a,n)=(m,a,n)$。

取 $(n+1,1,n+1)\in S$。则存在 $(m,a,n)\in L^S$，使得

$$(m,a,n)(n+1,1,n+1)(m,a,n)=(m,a,n),$$

从而 $(m+1,a\theta,n+1)(m,a,n)=(m,a,n)$。这导致 $m+1-(n+1)+\max(n+1,m)=m$。这是不可能的。故 S 不是 $\mathcal{L}$-反演的。

命题 3.8 设 S 是由 T 和 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张。若 T 是 $\mathcal{D}$-反演的，则 S 是 $\mathcal{D}$-反演的。

证明. 设 T 是 $\mathcal{D}$-反演的，则存在 T 的 $\mathcal{D}$-类 D^T 使得对任意 $x\in T$，有 $W(x)\cap D^T\neq\Phi$。据引理 3.6 的第(3)条，$D^S=\{(m,a,n)\mid a\in D^T, m,n\in N^0\}$ 是 S 的一个 $\mathcal{D}$-类。对任意的 $(m,x,n)\in S$，由 $x\in T$ 可知，存在 $a\in D^T$，使得 $axa=a$，于是

$$(n,a,m)(m,x,n)(n,a,m)=(n,a,m),$$

即 $(n,a,m)\in D^S\cap W((m,x,n))$。故 S 是 $\mathcal{D}$-反演的。

注：命题 3.8 的逆命题不真。事实上，设 S 是由 T 和 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张，其中 θ 是平凡同态，即对任意 $x\in T$，都有 $x\theta=1$。设 T 是非 $\mathcal{D}$-反演半群(由命题 3.5 这种 T 是存在的)。由引理 3.6 的(3)知，$D^S=\{(m,a,n)\mid m,n\in N^0, a\,\mathcal{D}\,1\}$ 是 S 的一个 $\mathcal{D}$-类。设 $(p,b,q)\in S$，则 $(q+1,1,p+1)\in D^S$ 且

$$(q+1,1,p+1)(p,b,q)(q+1,1,p+1)=(q+1,1(b\theta),q+1)(q+1,1,p+1)=(q+1,1,p+1).$$

于是 $(q+1,1,p+1)\in W(p,b,q)\cap D^S$。这说明 S 是 $\mathcal{D}$-反演的，但 T 不是 $\mathcal{D}$-反演的。

命题 3.9 设 S 是由 T 和 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张。若 T 是 $\mathcal{J}$-反演的，则 S 是 $\mathcal{J}$-反演的。

证明. 设 T 是 $\mathcal{J}$-反演的，则存在 T 的 $\mathcal{J}$-类 J^T 使得对任何 $x\in T$，有 $W(x)\cap J^T\neq\Phi$。由引理 3.6 的(4)知 S 是单半群，从而 S 有唯一的 $\mathcal{J}$-类 S。设 $(m,a,n)\in S$，则 $a\in T$，由于 T 是 $\mathcal{J}$-反演的，从而存在 $a'\in W(a)\cap J^T$，故 $a'aa'=a'$。易见，

$$(n,a',m)(m,a,n)(n,a',m)=(n,a',m).$$

故 $(n,a',m)\in W((m,a,n))\cap S$。这说明了 S 是 $\mathcal{J}$-反演的。

注：命题 3.9 的逆命题不真。事实上，据引理 2.3，设 $T=(G_\alpha,Y)$ 是 Clifford 半群且 Y 中无最小元。由 T 是 Clifford 半群可知 T 是逆半群，由引理 3.6 的(5)知，S 也是逆半群。设 $(m,a,n)\in S$，则 $W((m,a,n))\neq\Phi$。因为 S 是单的，故 S 只有一个 $\mathcal{J}$-类 S。显然 $W((m,a,n))\cap S\neq\Phi$。这说明 S 是 $\mathcal{J}$-反演的。但由于 Y 中无

最小元，由命题 3.5 知 T 不是 $\mathcal{J}$-反演的。

设 $\mathcal{K}\in\{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{D},\mathcal{J}\}$。本文已对 $\mathcal{K}$-正则半群给出了完整的刻画，但仅给出了两类特殊的 $\mathcal{K}$-反演半群的刻画。于是，下面的问题是自然的。

问题 3.10 设 $\mathcal{K}\in\{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{D},\mathcal{J}\}$。刻画所有的 $\mathcal{K}$-反演半群。

参考文献

[1] Green, J.A. (1951) On the Structure of Semigroups. *Annals of Mathematics*, **54**, 163-172. https://doi.org/10.2307/1969317

[2] Petrich, M. (1984) Inverse Semigroups. Wiley, New York.

[3] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press, Oxford. https://doi.org/10.1093/oso/9780198511946.001.0001

[4] Lawson, M.V. (1998) Inverse Semigroups, the Theory of Partial Symmetries. World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789812816689

[5] Petrich, M. and Reilly, N.R. (2024) Completely Regular Semigroup Varieties, Springer, Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-42891-3

[6] Nambooripad, K.S.S. (1979) Structure of Regular Semigroups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **22**, 224. https://doi.org/10.1090/memo/0224

[7] Mitsch, H. and Petrich, M. (2000) Basic Properties of e-Inversive Semigroups. *Communications in Algebra*, **28**, 5169-5182. https://doi.org/10.1080/00927870008827148

[8] Mitsch, H. (1990) Subdirect Products of E-Inverse Semigroups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **48**, 66-78. https://doi.org/10.1017/S1446788700035199

[9] Weipoltshammer, B. (2002) Certain Congruences on E-Inversive E-Semigroups. *Semigroup Forum*, **65**, 233-248. https://doi.org/10.1007/s002330010131

[10] Gigon, R.S. (2020) Bands of E-Inversive Unipotent Semigroups. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 2861-2874. https://doi.org/10.1007/s40840-019-00835-4

[11] Mary, X. (2011) On Generalized Inverses and Green's Relations. *Linear Algebra and Its Applications*, **434**, 1836-1844. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.11.045

[12] Zhu, H.H., Chen, J.L. and Patricio, P. (2016) Further Results on the Inverse Along an Element in Semigroups and Rings. *Linear Multilinear Algebra*, **64**, 393-403. https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1043716

[13] Ciric, M., Ignjatovic, J. and Stanimirovic, P. (2023) Outer Inverses in Semigroups Belonging to the Prescribed Green's Equivalence Classes. *Semigroup Forum*, **107**, 251-293. https://doi.org/10.1007/s00233-023-10382-x

[14] Chen, J.L. and Zhang, X.X. (2024) Algebraic Theory of Generalized Inverses. Science Press, Beijing & Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-8285-1