Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 537-547
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145207

模糊*f*代数的基本性质研究

周姮媛

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年3月8日；录用日期：2024年4月14日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

本文首先讨论了模糊*f*代数中任意不交补是模糊双边理想，并且研究了在模糊*f*代数中，结合律成立的情况下的部分关系式。然后给出了模糊正交算子的定义，并研究了两个模糊正交算子相等的条件。最后介绍了模糊Archimedean-*f*代数，并讨论其中f^2和fg等于零时的条件。

关键词

模糊*f*代数，模糊Archimedean-*f*代数

The Study of Elementary Property of Fuzzy *f* Algebra

Hengyuan Zhou

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 8th, 2024; accepted: Apr. 14th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

This article first discussed that any disjoint complement in fuzzy *f* algebra is a fuzzy l-ideal, and studied some relationships in fuzzy *f* algebra when the associative law holds. Then, the definition of fuzzy orthogonal operators was given, and the conditions for two fuzzy orthogonal operators to be equal were studied. Finally, the fuzzy Archimedean *f* algebra was introduced, and the conditions under which f^2 and fg equal zero were discussed.

Keywords

Fuzzy *f* Algebra, Fuzzy Archimedean *f* Algebra

文章引用: 周姮媛. 模糊 *f* 代数的基本性质研究[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 537-547.
DOI: 10.12677/pm.2024.145207

1. 引言

1994 年，Beg I，在 Zadeh 教授提出的模糊概念和 Venugopalan 提出的模糊序集定义的基础上，首次提出了模糊 Riesz 空间的概念，并在[1]中讨论了模糊 Riesz 空间的部分性质。1997 年，Beg I 讨论了模糊 Archimedean 空间的基本性质。然后，Hong L 在[2]中研究了在模糊 Riesz 子空间、模糊理想、模糊带以及模糊投影带等的基本性质。2021 年，Gui R 等人在[3]中讨论了模糊 Riesz 空间中的模糊正算子、模糊序连续算子以及模糊序有界线性算子等的性质。2022 年，Cheng 在[4]中讨论了模糊正线性算子的基本性质。

本文的主要目的是探讨模糊 f 代数的基本性质。模糊 f 代数的基本性质将丰富模糊 Riesz 空间的理论知识，有助于处理模糊 Riesz 空间理论在动力系统、工程等领域中应用所遇到的难题。本文的第二部分将回顾模糊 Riesz 空间中的部分概念和性质；第三部分介绍了模糊 f 代数的一些基本性质；第四部分讨论了模糊 Archimedean 空间中模糊正交算子的性质；第五部分将研究模糊 Archimedean-f 代数的基本性质。

2. 预备知识

本节将回顾文献[1]-[12]中的一些概念和性质，以便应用其得到文章主要结论。其中 R 代表全体实数，$\underline{0}$ 代表零向量。

定义 2.1 [5] [6] 假设 X 是论域，模糊关系 $\mu: X\times X\to[0,1]$，如果 μ 满足以下条件：

1) 假设 $x=y$，则 $\mu(x,x)=1$ (自反性)
2) 假设 $x,y\in X$，如果 $\mu(x,y)>0$，$\mu(y,x)>0$，则 $x=y$ (反对称性)
3) 假设 $x,z\in X$，则 $\mu(x,z)\ge\vee_{y\in X}\left[\mu(x,y)\wedge\mu(y,z)\right]$ (传递性)

则称 μ 是模糊偏序关系，其中，μ 是 $X\times X$ 中模糊子集的隶属函数。

定义 2.2 [6] 假设 A 是模糊偏序集 X 的子集。如果

$$U(A)(y)=\begin{cases}0, & (\uparrow x)(y)\le\frac{1}{2}, x\in A\\ \left(\bigcap_{x\in A}\uparrow x\right)(y), & \text{其他}\end{cases},$$

则称 $U(A)$ 是 A 在 X 上的上界。同理，如果

$$L(A)(y)=\begin{cases}0, & (\downarrow x)(y)\le\frac{1}{2}, x\in A\\ \left(\bigcap_{x\in A}\downarrow x\right)(y), & \text{其他}\end{cases}$$

则称 $L(A)$ 是 A 在 X 上的下界。

对于 $x\in X$，如果 $U(A)(x)>0$，则称 $x\in U(A)$。此时，称 A 是有上界的且 x 是 A 的一个上界。类似地，对于 $x\in X$，如果 $L(A)(x)>0$，则称 $x\in L(A)$。此时，称 A 是有下界的且 x 是 A 的一个下界。如果 A 既有上界又有下界，则称 A 是有界的。

假设 $z\in X$，如果 z 满足以下两个条件：

1) $z\in U(A)$，

2) 如果 $y \in U(A)$，则 $y \in U(z)$，

则称 z 是 A 的上确界。

假设 $z \in X$，如果 z 满足以下两个条件：

1) $z \in L(A)$，

2) 如果 $y \in L(A)$，则 $y \in L(z)$，

则称 z 是 A 的下确界。

定义 2.3 [6] 假设 X 是模糊偏序集。如果 X 的任意有限子集都有上确界和下确界，则称 X 是模糊格。

定义 2.4 [2] 假设 X 是模糊偏序集，序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 属于 X。若当 $n \le m$ 时，有 $\mu(x_n, x_m) > \frac{1}{2}$，则称序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是递增的，记作 $x_n \uparrow$。特别地，如果 $x = \sup_{n\in N}\{x_n\}$ 存在，就记作 $x_n \uparrow x$。同样的，若当 $n \le m$ 时，有 $\mu(x_m, x_n) > \frac{1}{2}$，则称序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是递减的，记作 $x_n \downarrow$。特别地，如果 $x = \inf_{n\in N}\{x_n\}$ 存在，就记作 $x_n \downarrow x$。

定义 2.5 [9] 假设 X 是模糊偏序集，D 是 X 的子集。如果对于 D 的任意有限子集，$D \cap U(F) \ne \varnothing$，则称 D 是向右的。如果对于 D 的任意有限子集，$D \cap L(F) \ne \varnothing$，则称 D 是向左的。如果 D 既是向右的又是向左的，则称 D 是有向的。

定义 2.6 [8] 假设 E 是实向量空间。如果 E 中存在模糊偏序关系 μ，使得向量结构和模糊序结构兼容，即：

1) 对任意 $x \in E$，假设 $x_1, x_2 \in E$，使得 $\mu(x_1, x_2) > \frac{1}{2}$，则

$$\mu(x_1, x_2) \le \mu(x_1 + x, x_2 + x)$$

2) 对任意非负实数 α，假设 $x_1, x_2 \in E$，使得 $\mu(x_1, x_2) > \frac{1}{2}$，则

$$\mu(x_1, x_2) \le \mu(\alpha x_1, \alpha x_2)$$

则称 E 是模糊序向量空间.

定理 2.7 [8] 假设 X 是模糊序向量空间，$x, y, z \in X$，$\alpha, \beta \in R$。则下述条件成立

1) 如果 $\mu(\underline{0}, x) > \frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0}, y) > \frac{1}{2}$，则 $\mu(\underline{0}, x + y) > \frac{1}{2}$

2) 如果 $\mu(\underline{0}, x) > \frac{1}{2}$，$\alpha \ge 0$，则 $\mu(\underline{0}, \alpha x) > \frac{1}{2}$

3) 如果 $\mu(x_1, x_2) > \frac{1}{2}$，$\alpha \le 0$，则 $\mu(\alpha x_2, \alpha x_1) > \frac{1}{2}$

定义 2.8 [9] 假设 X 是模糊序向量空间。如果 X 是一个有向集，则称 X 是有向模糊序向量空间。

定义 2.9 [9] 假设 X 是有向模糊序向量空间。如果对于任意非负元素 $x \in X$，集合 $\{\alpha x : 0 < \alpha \in R\}$ 是无上界的，则称 X 是模糊 Archimedean 空间。

定义 2.10 [1] 假设 E 是模糊序向量空间。如果 E 也是模糊格，则称 E 是模糊 Riesz 空间。

定义 2.11 [1] 假设 E 是模糊 Riesz 空间，$x \in E$。如果 $x^+ = x \vee 0$，则称 x^+ 是 x 的正部；如果 $x^- = (-x) \vee 0$，则称 x^- 是 x 的负部；如果 $|x| = x \vee (-x)$，则称 $|x|$ 是 x 的绝对值

定义 2.12 [2] 假设 E 是模糊 Riesz 空间，$x_1, x_2 \in E$，A 是 E 的子集。如果

$$|x_1| \wedge |x_2| = \underline{0}$$

则称 x_1 与 x_2 是不交的或正交的，记为 $x_1 \perp x_2$。

定义 2.13 [2] 假设 E 是模糊 Riesz 空间，D 是 E 的子集。如果 $f \in D$， $g \in E$，使得 $\mu(g, f) > \frac{1}{2}$，则 $g \in D$，那么称 D 是模糊 solid 的。E 的模糊 solid 子向量空间 I 是模糊序理想。假设 B 是 E 中的模糊序理想。如果 $D \subset B$， $x = \sup D$，则 $x \in B$，那么称 B 是模糊带。

定义 2.14 [2] 假设 E 是模糊 Riesz 空间，D 是 E 的模糊 Riesz 子空间，如果对任意正元素 $f \in E$，存在非零元素 $g \in D$，使得 $\mu(g, f) > \frac{1}{2}$，则称 D 是 E 中的模糊序稠密。

定义 2.15 [2] 假设 E 是模糊 Riesz 空间，A 是 E 的子集。如果有集合

$$A^d = \{x \in E \mid x \perp y, \forall y \in A\}$$

则称 A^d 为 A 的不交补。 A^{dd} 是 A^d 的不交补，即 $A^{dd} = \left(A^d\right)^d$

定理 2.16 [1] 假设 E 是模糊 Riesz 空间，对于任意的 $x \in E$，有 $x = x_1 - x_2$ 且 $x_1 \wedge x_2 = \underline{0}$ 当且仅当 $x_1 = x^+$，$x_2 = x^-$

定理 2.17 [1] 假设 E 是模糊 Riesz 空间。对于任意的 $x, x_1, x_2 \in E$，则不等式

$$\mu\left(x \wedge \left(x_1 + x_2\right), x \wedge x_1 + x \wedge x_2\right) > \frac{1}{2}$$

成立。

定义 2.18 [10] 假设 (E, μ) 是模糊 Riesz 空间，$\{x_n\} \in (E, \mu)$，当 (E, μ) 中存在另一序列 $\{r_n\}_{n \in N}$ 满足 $\mu\left(\left|x_n - x\right|, r_n\right) > \frac{1}{2}$ 且 $r_n \downarrow 0$，则称 $\{x_n\}_{n \in N}$ 模糊序收敛于 x，且 $x \in X$，记做 $x_n \xrightarrow{f_o} x$，同时也称 x 是序列 $\{x_n\}_{n \in N}$ 的模糊序极限。

定义 2.19 [7] 假设 (K, μ) 和 (H, η) 是模糊 Riesz 空间，模糊正算子 $P: K \to H$

1)如果 $P(k) \subset H$ 是模糊序有界的当且仅当 $k \subset K$ 是模糊序有界的，则称算子 P 是模糊序有界的；

2)如果在 K 中有 $k_\lambda \xrightarrow{f_o} 0$ 能推出在 H 中有 $P(k_\lambda) \xrightarrow{f_o} 0$，则称算子 P 是模糊序连续的。

定义 2.20 [11] 环 X 的一个非空子集 D，如果满足：(1) $a, b \in D \Rightarrow a - b \in D$；(2) $a \in D$，$r \in R \Rightarrow ra, ar \in D$，则称 D 为代数理想。

定义 2.21 [12] 假设 E 是具有通常代数性质的模糊 Riesz 空间，并且对于乘法满足结合律，及对任意 $f, g \in E$，并且 $\mu(\underline{0}, f) > \frac{1}{2}$， $\mu(\underline{0}, g) > \frac{1}{2}$，有 $\mu(\underline{0}, fg) > \frac{1}{2}$，则称 E 为模糊 Riesz 代数(又可以称模糊格序代数)。在模糊 Riesz 代数 E 中，如果 $f \wedge g = \underline{0}$，对于任意 $w \in E$ 且 $\mu(\underline{0}, w) > \frac{1}{2}$，能得到 $(fw) \wedge g = (wf) \wedge g = \underline{0}$，则又称 E 为模糊 f 代数。

3. 模糊 f 代数

定义 3.1 假设 E 是模糊 Riesz 空间， $I \subset E$。如果 I 既是代数理想，又是模糊序理想，我们称 I 为模糊双边理想

定理 3.2 假设 E 是模糊 f 代数， $D \subset E$，则 D^d 是模糊双边理想。

证：假设 $D \subset E$， $D^d = \{f \in E \mid f \wedge g = 0, \forall g \in D\}$。若 f, g 是 E 中非零元素且 $g \in D^d$，使得 $\mu(|f|, |g|) > \frac{1}{2}$。若 $h \in D$，则 $\mu(|f| \wedge |h|, |g| \wedge |h|) > \frac{1}{2}$，即

$$\mu(|f| \wedge |h|, 0) > \frac{1}{2}。$$

又因为 $\mu\left(0,|f|\wedge|h|\right)>\frac{1}{2}$，所以 $|f|\wedge|h|=0$，即 $f\in D^d$。

下证 D^d 是代数理想。显然对于 E 中的加法和乘法，E 是一个环。若 $f,g\in D^d$，显然有 $f-g\in D^d$。若 $f\in D^d$，$g\in E$，$f\wedge h=\underline{0}$，$\forall h\in D$。根据[12]定理 3.4 (3)，可得

$$fg\wedge h=\underline{0},\ gf\wedge h=\underline{0},$$

即 $fg,gf\in D^d$。E 中的任意不交补是模糊双边理想，得证。

定理 3.3 假设 E 是模糊 f 代数并且 E 中结合律成立，则以下结论成立：

1) 如果 $f,g\in E$，$\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，则有

$$\left(f\vee g\right)^2=f^2\vee g^2,\ \left(f\wedge g\right)^2=f^2\wedge g^2;$$

2) 如果 $f,g\in E$，$\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，且 k 是任意非负整数，则有

$$\mu\left[\left(fg-gf\right)^+,f^2\vee f\left(g-kf\right)^+\right]>\frac{1}{2};$$

$$\mu\left[\left(fg-gf\right)^+,g^2\vee\left(f-kg\right)^+g\right]>\frac{1}{2}$$

3) 如果 $f,g\in E$，$\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，且 n 是任意正整数，则有

$$\mu\left(n|fg-gf|,f^2\vee g^2\right)>\frac{1}{2}。$$

证：1) 假设 $f,g\in E$ 且 $\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，有

$$\begin{aligned}\left(f\vee g\right)^2&=\left(f\vee g\right)\left(f\vee g\right)\\&=\left\{f\left(f\vee g\right)\right\}\vee\left\{g\left(f\vee g\right)\right\}\\&=\left(f^2\vee fg\right)\vee\left(gf\vee f^2\right)\\&=\left(f^2\vee g^2\right)\vee\left(fg\vee gf\right)\end{aligned}$$

根据[12]定理 3.4 (6)，可知 $\mu\left(\left(fg\right)\vee\left(gf\right),f^2\vee g^2\right)>\frac{1}{2}$。因此得 $\left(f\vee g\right)^2=f^2\vee g^2$。

类似可证 $\left(f\wedge g\right)^2=f^2\wedge g^2$

2) 假设 $fg-gf=f\left(g-kf\right)-\left(g-kf\right)f$

由 $\mu\left\{\left[f\left(g-kf\right)-\left(g-kf\right)f\right]^+,\left[f\left(g-kf\right)\right]^++\left[\left(kf-g\right)f\right]^+\right\}>\frac{1}{2}$，故有

$$\mu\left\{\left(fg-gf\right)^+,\left[f\left(g-kf\right)\right]^++\left[\left(kf-g\right)f\right]^+\right\}>\frac{1}{2}\ \mu\left[\left(fg-gf\right)^+,f\left(g-kf\right)^++\left(kf-g\right)^+f\right]>\frac{1}{2}$$

又利用

$$f\left(g-kf\right)^++\left(g-kf\right)^-f=\left[f\left(g-kf\right)^+\vee\left(g-kf\right)^-f\right]+\left[f\left(g-kf\right)^+\wedge\left(g-kf\right)^-f\right]$$

且由[12]定理 3.4(1)得

$$f\left(g-kf\right)^++\left(g-kf\right)^-f=\left[f\left(g-kf\right)^+\vee\left(g-kf\right)^-f\right]$$

即 $\mu\left[\left(fg-gf\right)^{+}, f\left(g-kf\right)^{+}\vee\left(g-kf\right)^{-} f\right]>\frac{1}{2}$

假设 $y_k=f\left(g-kf\right)^{+}\vee\left(g-kf\right)^{-} f$， $z_k=y_0\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_k$。显然 $\left(fg-gf\right)^{+}\in L\left(y_k\right)$，即

$$\mu\left[\left(fg-gf\right)^{+}, z_k\right]>\frac{1}{2}。$$

需要证明：对于任意 $k=0,1,2,\cdots$， $\mu\left[z_k, f^2\vee f\left(g-kf\right)^{+}\right]>\frac{1}{2}$成立。

假设 $\mu\left[z_k, f^2\vee f\left(g-kf\right)^{+}\right]>\frac{1}{2}, k\geq 1$成立。 $z_{k+1}=z_k\wedge y_{k+1}$，则

$$\mu\left\{z_{k+1},\left[f^2\vee f\left(g-kf\right)^{+}\right]\wedge y_{k+1}\right\}>\frac{1}{2},$$

即

$$\mu\left\{z_{k+1},\left[f^2\vee f\left(g-kf\right)^{+}\right]\wedge\left[f\left[g-\left(k+1\right)f\right]^{+}\vee\left[g-\left(k+1\right)f\right]^{-} f\right]\right\}>\frac{1}{2}$$

$$\mu\left(z_{k+1}, f^2\vee\left(f\left(g-kf\right)^{+}\wedge\left(f\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{+}\vee\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{-} f\right)\right)\right)>\frac{1}{2}$$

$$\mu\left(z_{k+1}, f^2\vee f\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{+}\vee\left(f\left(g-kf\right)^{+}\wedge\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{-} f\right)\right)>\frac{1}{2}$$

显然 $\mu\left(\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{-},\left(g-kf\right)^{-}+f^2\right)>\frac{1}{2}$，又由定理 2.17 得

$$\mu\left(f\left(g-kf\right)^{+}\wedge\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{-} f, f\left(g-kf\right)^{+}\wedge\left(g-kf\right)^{-}+f\left(g-kf\right)^{+}\wedge f^2\right)>\frac{1}{2}$$

即 $\mu\left(f\left(g-kf\right)^{+}\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{-} f, \underline{0}+f^2\right)>\frac{1}{2}$。所以 $\mu\left(z_{k+1}, f^2\vee f\left(g-\left(k+1\right)f\right)^{+}\right)>\frac{1}{2}$

又因为 $z_0=fg$，则有 $\mu\left(z_0, f^2\vee fg\right)>\frac{1}{2}$。所以对于任意 $k=0,1,2,\cdots$，

$$\mu\left[z_k, f^2\vee f\left(g-kf\right)^{+}\right]>\frac{1}{2}$$

都成立。最后得证 $\mu\left[\left(fg-gf\right)^{+}, f^2\vee f\left(g-kf\right)^{+}\right]>\frac{1}{2}$。

第二个不等式的证明类似。

3) 由(2)可知，令 $k=n$， $n\left(fg-gf\right)^{+}=\left[f\left(ng\right)-\left(ng\right)f\right]^{+}$，则有

$$\mu\left(\left(f\left(ng\right)-\left(ng\right)f\right)^{+}, f^2\vee f\left(ng-nf\right)^{+}\right)>\frac{1}{2}$$

故得 $\mu\left(n\left(fg-gf\right)^{+}, f^2+nf\left(g-f\right)^{+}\right)>\frac{1}{2}$

同理可得， $\mu\left(n\left(fg-gf\right)^{+}, g^2+n\left(g-f\right)^{-} g\right)>\frac{1}{2}$。又由

$$\mu\left(f^2+nf\left(g-f\right)^{+}-f^2\vee g^2, nf\left(g-f\right)^{+}\right)>\frac{1}{2},\quad \mu\left(g^2+n\left(g-f\right)^{-} g-f^2\vee g^2, n\left(g-f\right)^{-} g\right)>\frac{1}{2}$$

可得

$$\mu\left(n\left(fg-gf\right)^{+}-f^2\vee g^2, nf\left(g-f\right)^{+}\right)>\frac{1}{2}$$

$$\mu\left(n(fg-gf)^{+}-f^{2}\vee g^{2},n(g-f)^{-}g\right)>\frac{1}{2}。$$

所以有 $n(fg-gf)^{+}-f^{2}\vee g^{2}\in L\left\{nf(g-f)^{+},n(g-f)^{-}g\right\}$ 由此可知

$$n(fg-gf)^{+}-f^{2}\vee g^{2}\in L\left\{nf(g-f)^{+}\wedge n(g-f)^{-}g\right\},$$

即 $\mu\left(n(fg-gf)^{+}-f^{2}\vee g^{2},nf(g-f)^{+}\wedge n(g-f)^{-}g\right)>\frac{1}{2}$。

根据[12]定理 3.4 (1)，可以知 $\mu\left(n(fg-gf)^{+},f^{2}\vee g^{2}\right)>\frac{1}{2}$。交换 f,g 得

$$\mu\left(n(gf-fg)^{+},f^{2}\vee g^{2}\right)>\frac{1}{2},$$

所以可得

$$f^{2}\vee g^{2}\in U\left\{n(fg-gf)^{+},n(gf-fg)^{+}\right\}$$

$$f^{2}\vee g^{2}\in U\left\{n(fg-gf)^{+}\vee n(fg-gf)^{+}\right\}$$

即 $\mu\left(n(fg-gf)^{+}\vee n(gf-fg)^{+},f^{2}\vee g^{2}\right)>\frac{1}{2}$。又利用

$$n|fg-gf|=n(fg-gf)^{+}\vee n(fg-gf)^{-}=n(fg-gf)^{+}\vee n(gf-fg)^{+}。$$

最后得证 $\mu\left(n|fg-gf|,f^{2}\vee g^{2}\right)>\frac{1}{2}$。

定理 3.4 假设 E 是模糊 f 代数并且在 E 中有限结合律成立，当 E 中具有对于乘法的单位元 e 时，则下述结论成立：

1) $\mu(\underline{0},e)>\frac{1}{2}$；

2) 如果 $\mu(\underline{0},f)>\frac{1}{2}$，$f\in E$ 且 f^{-1} 存在，则 $\mu\left(\underline{0},f^{-1}\right)>\frac{1}{2}$；

3) 如果 $\mu(\underline{0},f)>\frac{1}{2}$，$f\in E$ 且 f^{-1} 存在，则 $\mu\left(f\wedge f^{-1},e\right)>\frac{1}{2}$；

4) 如果 $f,g\in E$ 且 $\mu(\underline{0},f)>\frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0},g)>\frac{1}{2}$，使得 f^{-1},g^{-1} 存在，则 $(f\vee g)^{-1}$，$(f\wedge g)^{-1}$ 存在且满足 $(f\vee g)^{-1}=f^{-1}\wedge g^{-1}$，$(f\wedge g)^{-1}=f^{-1}\vee g^{-1}$。

证：1) 因为 $e=e^{2}$，根据定理[12]定理 3.4 (5)，可知 $\mu\left(\underline{0},e^{2}\right)>\frac{1}{2}$。得证 $\mu(\underline{0},e)>\frac{1}{2}$

2) 令 $u=f^{-1}$，则得

$$e=fu=f\left(u^{+}-u^{-}\right)=fu^{+}-fu^{-},\quad e=uf=\left(u^{+}-u^{-}\right)f=u^{+}f-u^{-}f。$$

又由 $u^{+}\wedge u^{-}=\underline{0}$ 且根据模糊 f 代数的定义得到

$$\left(fu^{+}\right)\wedge\left(fu^{-}\right)=\underline{0},\quad \left(u^{+}f\right)\wedge\left(u^{-}f\right)=\underline{0}。$$

因此有 $e=e^{+}=fu^{+}=u^{+}f$。得证 $f^{-1}=u^{+}$。

3) 根据定理 3.3(1)，可知 $f^{2}\wedge e=(f\wedge e)^{2}$。根据 $\mu\left((f\wedge e)^{2},fe\right)>\frac{1}{2}$，即

$$\mu\left(\left(f\wedge e\right)^{2},f\right)>\frac{1}{2}$$

可得 $\mu\left(f^{2}\wedge e,f\right)>\frac{1}{2}$。又由 $f\wedge f^{-1}=f^{-1}\left(f^{2}\wedge e\right)$，故可得

$$\mu\left(f^{-1}\left(f^{2}\wedge e\right),f^{-1}f\right)>\frac{1}{2}$$

最后得证 $\mu\left(f\wedge f^{-1},e\right)>\frac{1}{2}$。

4) 由 3)可知 $\mu\left(\left(f^{-1}g\right)\wedge\left(g^{-1}f\right),e\right)>\frac{1}{2}$， $\mu\left(\left(gf^{-1}\right)\wedge\left(fg^{-1}\right),e\right)>\frac{1}{2}$。

所以可得

$$\begin{aligned}&\left(f^{-1}\wedge g^{-1}\right)\left(f\vee g\right)\\&=\left[f^{-1}\left(f\vee g\right)\right]\wedge\left[g^{-1}\left(f\vee g\right)\right]\\&=\left[e\vee\left(f^{-1}g\right)\right]\wedge\left[\left(g^{-1}f\right)\vee e\right]\\&=e\vee\left[\left(f^{-1}g\right)\wedge\left(g^{-1}f\right)\right]\\&=e\end{aligned}$$

。

同理可证 $\left(f\vee g\right)\left(f^{-1}\wedge g^{-1}\right)=e$。最后得证 $f^{-1}\wedge g^{-1}=\left(f\vee g\right)^{-1}$。

类似可证 $\left(f\wedge g\right)^{-1}=f^{-1}\vee g^{-1}$。

定理 3.5 如果 E 是模糊 f 代数且乘法是可交换的，对于任意 $f,g\in E$，则

$$fg=\left(f\wedge g\right)\left(f\vee g\right)$$

成立。

证：根据 $f+g=f\wedge g+f\vee g$，可知

$$\begin{aligned}&fg-\left(f\wedge g\right)\left(f\vee g\right)\\&=fg-\left(f\wedge g\right)\left(f+g-f\wedge g\right)\\&=\left(f-\left(f\wedge g\right)\right)\left(g-\left(f\wedge g\right)\right)\\&=\underline{0}\end{aligned}$$

所以 $fg=\left(f\wedge g\right)\left(f\vee g\right)$。

4. 模糊正交算子

为了更好的引入模糊模糊 Archimedean-f 代数，本节首先介绍了模糊正交算子，然后讨论了两个模糊正交算子相等成立的条件。

定义 4.1 若 E 是模糊 Archimedean Riesz 空间，算子 $T:E\to E$ 是模糊序有界的，对于 $f,g\in E$，若 $f\perp g$，则 $Tf\perp g$，那么称算子 T 是模糊正交的。

记 E 中所有模糊序有界算子所构成的集合为 $FL_{b}\left(E\right)$，记 E 中所有模糊正交算子所构成的集合为 $FL_{o}\left(E\right)$。显然 $FL_{o}\left(E\right)$ 是 $FL_{b}\left(E\right)$ 模糊线性子空间，即 $\mu\left(T_{1},T_{2}\right)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\mu\left(T_{1}f,T_{2}f\right)>\frac{1}{2}$，$\forall f\in E$。

定理 4.2 若 E 是模糊 Archimedean Riesz 空间，算子 $T:E\to E$ 是模糊正交的，则下述命题等价

1) 对于 $f,g\in E$，有 $f\perp g\Rightarrow Tf\perp g$；

2) $Tf\in\left\{f\right\}^{dd}$，$\forall f\in E$；

3) 对于 E 中任意模糊带 B，$T(B)\subset B$；

4) 对于 E 中任意非空子集 D，$T(D^d)\subset D^d$。

证：$1)\Rightarrow 2)$

对于任意 $g\in\{f\}^d$，有 $Tf\perp g$，所以可得 $Tf\in\{f\}^{dd}$，$\forall f\in E$。

$2)\Rightarrow 3)$

假设 B 是 E 中模糊带。如果对于任意 $f\in B$，由文献[2]中定义 4.3 的注可知，$Tf\in\{f\}^{dd}\subset B^{dd}$。又由文献[2]定理 5.8 可知 $B=B^{dd}$，所以 $Tf\subset B$。因为 f 的任意性，所以 $T(B)\subset B$。

$3)\Rightarrow 4)$

由文献[2]的定理 5.5 可知 D^d 是模糊带，所以 $T(D^d)\subset D^d$。

$4)\Rightarrow 1)$

假设对于 $f,g\in E$，有 $f\perp g$，即 $f\in\{g\}^d$。根据 4)可知 $Tf\in T\left\{(g)^d\right\}\subset\{g\}^d$，所以 $Tf\perp g$。

若 E 是模糊 Archimedean Riesz 空间，模糊正交算子 $T\in E$，分别记 R_T 和 K_T 为算子 T 的值域和核(即 $\{f\in E:Tf=0\}$)。因为 $|Tf|=\big|T|f|\big|=|T||f|$，$\forall f\in E$，任意 $\mu(g,f)>\dfrac{1}{2}$，$g\in E$，$f\in K_T$，有 $\mu(Tg,Tf)>\dfrac{1}{2}$，可得 $Tg=0$，所以 K_T 是模糊序理想。如果 $B\subset K_T$ 且 $f=\sup B$，由任意模糊正交算子 T 是模糊续连续的，可得 $f\in K_T$，所以模糊序理想 K_T 是模糊带。

定理 4.3 若 E 是模糊 Archimedean Riesz 空间，算子 $T\in FL_o(E)$，则下述条件成立。

1) $K_T=K_{|T|}=K_{T^+}\cap K_{T^-}$

2) $K_T=R_T^d$

证：1) 由 $|Tf|=\big|T|f|\big|=|T||f|=\big||T|f\big|$，可得 $K_T=K_{|T|}$。

假设 $f\in K_T=K_{|T|}$。由 $|T||f|=|Tf|=0$，可得 $\left|T^+f\right|=T^+|f|=0$，$\left|T^-f\right|=T^-|f|=0$，即 $f\in K_{T^+}\cap K_{T^-}$。所以 $K_T\subset K_{T^+}\cap K_{T^-}$。相反，由 $T=T^+-T^-$，可得 $K_{T^+}\cap K_{T^-}\subset K_T$。得证 $K_T=K_{|T|}=K_{T^+}\cap K_{T^-}$

2) 因为 $K_T=K_{|T|}$，$R_T^d=R_{|T|}^d$。假设 $\mu(0,T)>\dfrac{1}{2}$，如果有 $\mu(0,a)>\dfrac{1}{2}$ 且 $a\in R_T^d$，可得 $a\wedge Ta=\underline{0}$。所以有 $Ta=Ta\wedge Ta=\underline{0}$。即 $a\in K_T$。

反过来假设 $\mu(0,a)>\dfrac{1}{2}$ 且 $a\in K_T$。下证 $a\wedge Tb=\underline{0}$，$\forall b\in E$。因为 $(na-na\wedge b)\wedge(b-na\wedge b)=\underline{0}$，所以 $(na-na\wedge b)\wedge\{Tb-T(na\wedge b)\}=\underline{0}$。又由 $T(na\wedge b)=\underline{0}$，可得

$$(a-a\vee n^{-1}b)\wedge Tb=\underline{0},\forall n=1,2,3,\cdots$$

再根据 $a\wedge n^{-1}b\downarrow\underline{0}$，最后可得 $a\wedge Tb=\underline{0}$。

定理 4.4 若 E 是模糊 Archimedean Riesz 空间，算子 $T_1,T_2\in FL_o(E)$，D 是 E 中模糊序稠密子集(即 $D^{dd}=E$)，对任意的 $f\in D$，使得 $T_1f=T_2f$，则 $T_1=T_2$。

证：假设算子 $T=T_1-T_2$。对于任意 $f\in D$，由条件可得

$$Tf=(T_1-T_2)f=T_1f-T_2f=\underline{0},$$

所以 $D\subset K_T$，其中 K_T 是算子 T 的核，即 $D^{dd}\subset(K_T)^{dd}$。显然 $K_T\subset D$，即 $(K_T)^{dd}\subset D^{dd}$。由上文可知 K_T 是模糊带，$K_T=(K_T)^{dd}$，所以 $K_T=D^{dd}=E$。因此对于任意 $f\in E$，都有 $Tf=(T_1-T_2)f=T_1f-T_2f=0$，最后可得 $T_1=T_2$。

5. 模糊 Archimedean-f 代数

本节首先给出了模糊 Archimedean-f 代数的定义，讨论了在模糊 Archimedean-f 代数的乘法是可交换

的，最后模糊 Archimedean-f 代数的幂零集中元素的性质。

定义 5.1 假设 E 是模糊 f 代数，如果 E 也是模糊 Archimedean 空间，我们称 E 为模糊 Archimedean-f 代数。

如果 E 是模糊 Archimedean-f 代数。对于任意 $f\in E$，分别定义算子 $T_f^r:E\to E$，$T_f^l:E\to E$ 如下：$T_f^r=gf$，$T_f^l=fg$，$\forall g\in E$。因为 T_f^r,T_f^l 显然是模糊序有界的，又根据[12]定理 3.4 (3)，可知 T_f^r,T_f^l 在 E 中是正交的。

定理 5.2 假设 E 是模糊 Archimedean-f 代数，则 E 中的乘法是可交换的。

证：假设 E 是任意模糊 Archimedean-f 代数。令 $f\in E$，定义算子 $T_f^r:E\to E$，$T_f^l:E\to E$ 如下：$T_f^r=gf$，$T_f^l=fg$，$\forall g\in E$。

如果 $g\perp f$，根据[12]定理 3.4 (4)，则 $T_f^r=T_f^l=0$。由于 $T_f^rf=T_f^lf=f^2$，因此 T_f^rf,T_f^lf 在 E 的模糊序稠密子集 $\{f\}\cup\{f\}^d$ 上相等。根据定理 4.4，得 $T_f^r=T_f^l$，即 $fg=gf$，$\forall g\in E$。又因为是对于任意的 $f\in E$，所以可得 E 中的乘法是可交换的。

我们记 N 为模糊 Archimedean-f 代数中所有幂零元素构成的集合，即 $N=\left\{f\in E:f^k=0,\exists k\in \mathrm{N}\right\}$。显然 N 是 E 中的模糊双边理想。当 $N=\{0\}$ 时，我们称 E 是半素的。接下来，我们将讨论 E 中幂零集中元素的一些性质。

定理 5.3 假设 E 是模糊 Archimedean-f 代数，N 是 E 中的幂零集，则下述结论成立：

1) $f\in N$ 当且仅当 $f^2=\underline{0}$；

2) N 是 E 中的模糊带；

3) 如果 $f\in N$，则 $fg=\underline{0}$，$\forall g\in E$；

4) N 是模糊零 f 代数(即 $fg=\underline{0}$，$\forall f,g\in N$)，N^d 是模糊半素 f 代数；

5) 如果 $f\in E$，则 $f^2\in N^d$。(因此如果 $f,g\in E$，则 $fg\in N^d$)

证：1) 充分性：如果有 $f^k=\underline{0}(k>2)$，可得 $f^{k-1}=\underline{0}$。假设 $\mu(\underline{0},f)>\frac{1}{2}$。由 $\left(nf^{k-1}-f^{k-2}\right)^+\wedge\left(f^{k-2}-nf^{k-1}\right)^+=\underline{0}$，可得 $\left(nf^{k-1}-f^{k-2}\right)^+\wedge\left(nf^{k-1}\right)=0$，$\forall n\in\mathrm{N}$。

又因为 $\mu\left(\left(nf^{k-1}-f^{k-2}\right),nf^{k-1}\right)>\frac{1}{2}$，可得 $\left(nf^{k-1}-f^{k-2}\right)^+=\underline{0}$，即 $\mu\left(nf^{k-1},f^{k-2}\right)>\frac{1}{2}$。由模糊 Archimedean 空间定义，得 $f^{k-1}=\underline{0}$。

必要性是显然的。

2) 假设 $\{a_\tau\}$ 是非负集合，$a_\tau\uparrow a$ 且对于任意的 τ，$a_\tau^2=\underline{0}$。如果 $\tau\ge\tau_0$，有 $\mu\left(a_\tau a_{\tau_0},a_\tau^2\right)>\frac{1}{2}$。由模糊序连续性，可得 $aa_{\tau_0}=\underline{0}$。又因为 τ_0 的任意性且根据 $\underline{0}=aa_\tau\uparrow a^2$，所以 $a^2=\underline{0}$，得证。

3) 假设 $f\in E$ 且 $f^2=\underline{0}$。E 中的模糊正交算子 T_f 满足 $T_ff=\underline{0}$，$T_fg=0$，$\forall g\in\{f\}^d$。因为 $\{f\}\cup\{f\}^d$ 是 E 中的模糊序稠密子集，所以由定理 4.4 可得 $T_f=0$，即 $fg=\underline{0}$，$\forall g\in E$。

4) 由 3)可知 $fg=\underline{0}$，$\forall f,g\in N$。因为 E 是模糊 f 代数，N^d 是模糊双边理想。如果 $f\in N^d$，$f^2=\underline{0}$，则 $f\in N$。因此可得 $f=\underline{0}$。所以 N^d 是半素的。

5) 假设非负元素 $f\in E$。因为存在 $w_\tau\in N\oplus N^d$，使得 $\mu(0,w_\tau)>\frac{1}{2}$ 且 $w_\tau\uparrow f$，所以 $\left(N\oplus N^d\right)^{dd}=E$，则 $w_\tau=a_\tau+b_\tau$，$\mu(0,a_\tau)>\frac{1}{2}$，$\mu(0,b_\tau)>\frac{1}{2}$，$a_\tau\in N$，$b_\tau\in N^d$。由 $w_\tau^2=b_\tau^2\in N^d$ 和 $w_\tau^2\uparrow f^2$ 可得 $f^2\in N^d$。

6. 结论

本文首先研究了模糊 f 代数中任意不交补是双边理想，并且讨论了在模糊 f 代数中，结合律成立的情

况下的部分关系式。然后定义了模糊正交算子，并讨论了两个模糊正交算子相等的情况。最后引出了模糊 Archimedean-f 代数，并讨论其中 f^2 和 fg 等于零时的条件。由于本人理论知识有限，本文还存在一定局限性，如模糊 f 代数中的关系式的应用和意义并未进行深入讨论、缺少模糊正交算子与传统正交算子之间的对比等，在今后可以沿着此方向进行更加详细的研究。

参考文献

[1] Beg, I. and Islam, M. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-241. https://doi.org/10.1142/9789814447010_0001

[2] Hong, L. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands and Fuzzy Band Projections. *Seria Matematica-Informatica*, **53**, 77-108. https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005

[3] Guirao, J.L.G., Iqbal, M., Bashir, Z., *et al*. (2021) A Study on Fuzzy Order Bounded Linear Operators in Fuzzy Riesz-Spaces. *Mathematics*, **9**, 1512. https://doi.org/10.3390/math9131512

[4] Cheng, N., Liu, X. and Dai, J. (2022) Extension of Fuzzy Linear Operators on Fuzzy Riesz Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **179**, 103168. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2022.103168

[5] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[6] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **46**, 221-226. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P

[7] Iqbal, M. and Bashir, Z. (2020) The Existence of Fuzzy Dedekind Completion of Archimedean Fuzzy Riesz Space. *Computational & Applied Mathematics*, **39**, 1-15. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1139-3

[8] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670.

[9] Beg, I. and Islam, M. (1997) Fuzzy Archimedean Spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, **5**, 413-424.

[10] Beg, I. (1997) σ-Complete Fuzzy Riesz Spaces. *Results in Mathematics*, **31**, 292-299. https://doi.org/10.1007/BF03322166

[11] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978.

[12] 周姮媛. 模糊 Riesz 代数的基本性质研究[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 126-136.