Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 433-446
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145198

带有混合奇异项和测度项的分数阶 *p*-Laplace方程解的存在性问题

张　莹

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年4月3日；录用日期：2024年5月4日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

本文研究下列带有混合奇异项和测度项的分数阶*p*-Laplace方程：

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} + \dfrac{f(x)}{u} + \mu, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

其中$\Omega \subset \mathbb{R}^N$是一个有界光滑区域，$1 < p < \infty$，$0 < s < 1$，$N > ps$，$0 < \gamma \le 1$，$f \in L^1(\Omega)$且在$\Omega$上几乎处处为正，$\mu$是$\Omega$中的非负Radon测度。在估计近似问题的基础上，得到了原问题解的存在性，并分析了解所处的空间。

关键词

分数阶*p*-Laplace方程，混合奇异项，测度项，近似问题

Existence of Solutions for Fractional *p*-Laplacian Problems with Mixed Singular Nonlinearities and Radon Measure

Ying Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 3rd, 2024; accepted: May 4th, 2024; published: May 31st, 2024

文章引用: 张莹. 带有混合奇异项和测度项的分数阶 *p*-Laplace 方程解的存在性问题[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 433-446.
DOI: 10.12677/pm.2024.145198

Abstract

This paper studies the following fractional p-Laplacian problem with mixed singular nonlinearities and Radon measure:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} + \dfrac{f(x)}{u} + \mu, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$. $1 < p < \infty$, $0 < s < 1$, $N > ps$, $0 < \gamma \le 1$, $f \in L^1(\Omega)$ and μ is a non-negative bounded Radon measure in Ω. On the basis of estimates on solutions of approximating problem, we obtain the existence of solutions for original problem and analyze the solution space.

Keywords

Fractional p-Laplacian, Mixed Singular Nonlinearities, Radon Measure, Approximating Problem

1. 引言

本文考虑如下带有混合奇异项和测度项的分数阶 p-Laplace 方程：

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} + \dfrac{f(x)}{u} + \mu, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑区域，$1 < p < \infty$，$0 < s < 1$，$N > ps$，$\gamma > 1$，$f \in L^1(\Omega)$ 且在 Ω 上几乎处处为正，μ 是 Ω 中的非负 Radon 测度。$(-\Delta)_p^s$ 是分数阶 p-Laplace 算子，其定义是：

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \mathrm{d}y,\ x \in \mathbb{R}^N。 \tag{1.2}$$

在局部设置下，Crandal M. G.，Rabinowitz P. H.和Tartar L.在[1]中最早研究带有奇异非线性项的半线性问题，已经有大量带有奇异非线性项的Laplace方程和p-Laplace方程解的存在性和多重性结果的工作(见[2] [3] [4] [5])。

2010年，Boccardo L.和Orsina L.在[6]中研究了如下一类带有奇异非线性项的Laplace方程：

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{f(x)}{u^\gamma}, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\gamma > 0$，f 是 Lebesgue 空间中的非负函数，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑函数。作者通过研究原问题的逼

近问题，利用逼近问题解的性质，结合 Lebesgue 控制收敛定理证明了方程解的存在性，以及解所位于的空间。在文章结尾部分，作者简要介绍了如果将 $\frac{1}{u^{\gamma}}$ 用混合非线性项 $\frac{1}{u^{\gamma}}+\frac{1}{u}$ 代替，我们仍然可以用类似的方法证明方程解的存在性。

2015 年，Barrios B.，Bonis De I.和 Medina M.在[7]中研究如下方程解的存在性：

$$\begin{cases} (-\Delta)^{s} u = F(x,u) := \lambda \dfrac{f(x)}{u^{\gamma}} + M u^{p}, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^{N} \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^{N}$ 是一个有界光滑区域，$N > 2s$，$M \in \{0,1\}$，$0 < s < 1$，$\gamma > 0$，$p > 1$，f 是一个非负函数。在 $M = 0$，$\lambda = 1$ 的情况下，作者对原方程解的存在性研究受到[6]的启发，用类似[6]中的方法证明了原方程弱解的存在性。若令 $s = 1$，可以得到和局部情况下，即与[6]中相一致的结果。

类似这样只带有一个奇异项的研究还有很多。2016年，Canino A.，Sciunzi B.和Trombetta A.在[8]中研究了带有奇异非线性项的*p*-Laplace方程解的存在性，2017年，Canino A.等人在[9]中将p-Laplace算子推广到分数阶p-Laplace算子，研究了带有奇异非线性项的分数阶p-Laplace方程解的存在性。也有一些作者研究了带有混合奇异项和测度项的分数阶Laplace方程。2021年，Masoud B.A.，Mahmoud H.在[10]中研究了如下的分数阶Lapalce问题：

$$\begin{cases} (-\Delta)^{s} u = \dfrac{K(x)}{u^{q}} + \dfrac{f(x)}{u^{\gamma}} + \mu, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^{N} \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^{N}$ 是一个有界光滑区域，$0 < s < 1$，$q > 0$，$\gamma > 0$，$K(x)$ 是一个 Holder 连续函数，$0 \le f, \mu \in L^{1}(\Omega)$。在 $0 < \gamma \le 1$ 的情况下，作者证明了(1.5)存在一个弱解 $u \in X_{0}^{s_1 p}(\Omega)$，其中 $s_1 < s$，$p < \dfrac{N}{N-s}$。此外，$T_k(u) \in X_0^{s}(\Omega)$，其中 $k > 0$。

受以上文献的影响，本文在 $0 < \gamma \le 1$ 的情况下研究问题(1.1)解的存在性。本文的主要结果如下：

定理 1.1 已知 $s \in (0,1)$，$p > 1$，$f \in L^{1}(\Omega)$，$f \ge 0$，μ 是 Ω 中的非负 Radon 测度，如果 $0 < \gamma \le 1$，那么问题(1.1)存在一个正的弱解，且满足 u 在 $W_{0}^{s_1,q}(\Omega)$ 中是一致有界的，其中 $q < \dfrac{N(p-1)}{N-s}$，$s_1 < s$。更进一步，$T_k(u)$ 在 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 中一致有界，其中 $k > 0$。

这里的 T_k 是截断算子，定义为：

$$T_k(t) = \begin{cases} t & |t| \le k, \\ k\,\mathrm{sign}(t) & |t| \ge k. \end{cases}$$

2. 预备知识

定义 $L^{p}(\mathbb{R}^{N})$ 表示 $\mathbb{R}^{N}$ 上使得 $\int_{\mathbb{R}^{N}} |u|^{p}\,\mathrm{d}x < \infty$ 的函数集合，定义 $L^{p}(\mathbb{R}^{N})$ 上的范数为 $\|u\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{N})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{N}} |u|^{p}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，已知 $s \in (0,1)$，$N > ps$，$p \in (1,\infty)$，定义空间

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^{N}) = \left\{ u \in L^{p}(\mathbb{R}^{N}) : [u] < \infty \right\},$$

其范数记为 $\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^{N})} = \|u\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{N})} + [u]$，其中

$$[u]=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

称为 Gagliardo 半范数。

对于 $0<s<1$，$1\le q<+\infty$，定义空间 $W^{s,q}(\Omega)$ 是 $L^q(\Omega)$ 中使得

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+qs}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x<\infty$$

成立的函数集合。$W^{s,q}(\Omega)$ 也被称为 *Aronszajn*，*Gagliardo* 或者 *Slobodeckij* 空间，$W^{s,q}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间。在 $W^{s,q}(\Omega)$ 上定义范数

$$\|u\|_{W^{s,q}(\Omega)}=\|u\|_{L^q(\Omega)}+\left(\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+qs}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}。$$

在本文中，定义 $supp(f)$ 表示函数 f 的紧支集，$\omega\subset\subset\Omega$ 表示 ω 是 Ω 中的一个紧集。对于 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 是一个有界开集，定义 $W_0^{s,q}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 相对于范数 $\|\bullet\|_{W^{s,q}(\mathbb{R}^N)}$ 在 $W^{s,q}(\mathbb{R}^N)$ 中的闭包，在这里

$$C_0^\infty(\Omega):=\left\{f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}\,\middle|\,f\in C^\infty(\mathbb{R}^N),supp(f)\subset\subset\Omega\right\}。$$

$W_0^{s,q}(\Omega)$ 在范数 $\|\bullet\|_{W^{s,q}(\Omega)}$ 下是一个自反的 Banach 空间。下面回顾分数阶庞加莱不等式。

引理 2.1 [11] 令 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个有界开集，Ω 是属于 $C^{0,1}$ 的，$0<s<1$，$1\le q<+\infty$。那么存在一个常数 $C(N,s,q,\Omega)$ 使得对于任意的 $f\in W_0^{s,q}(\Omega)$ 都有

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}\le C(N,s,q,\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+qs}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x。$$

在引理 2.1 的假设下，$W_0^{s,q}(\Omega)$ 上可以定义范数：

$$\|u\|_{W_0^{s,q}(\Omega)}=\left(\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+qs}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

该范数和 $\|u\|_{W_0^{s,q}(\Omega)}$ 是等价的。

令

$$X_0^{s,p}(\Omega)=\left\{u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N):u=0\ \ \text{在}\mathcal{C}\Omega\text{中}\right\},$$

在这里，$\mathcal{C}\Omega=\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ 表示 Ω 在 $\mathbb{R}^N$ 中的补集，定义 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 上的范数为

$$\|u\|=\left(\iint_Q\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}。$$

其中 $Q=\mathbb{R}^{2N}\setminus(\mathcal{C}\Omega\times\mathcal{C}\Omega)$。

在本文的证明中将用到分数阶索伯列夫嵌入不等式，它表示 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 连续嵌入到临界 Lebesgue 空间

$L^{p_s^*}(\Omega)$ 中，其中 $p_s^*=\dfrac{Np}{N-ps}$。其证明可见[12] [13]。

定理 2.1 (分数阶 Sobolev 嵌入不等式) 已知 $s\in(0,1)$， $p>1$， $N>ps$，那么存在一个正常数 $C=C(N,p,s)$，对任意 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 都有

$$\|f\|_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)}^p \le C\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\text{。}\tag{2.1}$$

我们进一步将 Ω 中的所有非负 Radon 测度构成的函数空间记为 $M(\Omega)$，其范数记为

$$\|\mu\|_{M(\Omega)}=\int_\Omega \mathrm{d}|\mu|\text{。}$$

对 $0<r<\infty$， $M^r(\Omega)$ 被称为 Marcinkiewicz 空间，是所有满足

$$meas\left(\{x\in\Omega:|u(x)|\ge t\}\right)\le\frac{C}{t^r},$$

其中 $C>0$， $t>0$ 的可测函数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 的函数集合。$M^r(\Omega)$ 上的范数记为

$$\|u\|_{M^r(\Omega)}=\sup_{t>0}t\left(meas\left(\{x\in\Omega:|u(x)|\ge t\}\right)\right)^{\frac{1}{r}}\text{。}$$

对于 $r>1$，我们有 $L^r(\Omega)$ 嵌入到 $M^r(\Omega)$ 是连续的。更多关于 $M^r(\Omega)$ 的相关知识可以参考文献[14]。下面，给出问题(1.1)弱解的定义：

定义 2.1 已知 $f\in L^1(\Omega)$ 是一个非负函数，定义一个可测函数 u 是问题(1.1)的弱解，如果 u 满足：

(1) 对于任意的 $\omega\subset\subset\Omega$，都存在 $C_\omega>0$ 使得在 ω 中

$$u(x)\ge C_\omega>0$$

成立；

(2) 对于任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，都有

$$\iint_Q\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega\frac{f(x)\varphi}{u^\gamma}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{f(x)\varphi}{u^\gamma}\mathrm{d}x+\int_\Omega\varphi\mathrm{d}\mu$$

成立。

3. 主要引理的证明

为了证明问题(1.1)解的存在性，考虑其逼近问题。假设 $f\in L^1(\Omega)$， $f\ge0$，对于 $n\in\mathbb{N}$，定义截断函数

$$f_n(x)=\min(f(x),n),\quad x\in\Omega\text{。}$$

考虑如下逼近问题

$$\begin{cases}(-\Delta)_p^s u_n=\dfrac{f_n(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}+\dfrac{f_n(x)}{u_n+\frac{1}{n}}+\mu_n, & x\in\Omega,\\ u_n>0, & x\in\Omega,\\ u_n=0, & x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 μ_n 是 $L^1(\Omega)$ 中的非负光滑函数，且依测度弱收敛至 μ。我们定义 u_n 是问题(3.1)的弱解，若

$$\begin{aligned}&\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega \frac{f_n(x)\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{f_n(x)\varphi}{u_n+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x+\int_\Omega \mu_n\varphi\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对于任意的 $\varphi\in X_0^{s,p}(\Omega)$ 都成立。

引理 3.1 对于所有 $n\in\mathrm{N}$，问题(3.1)有一个弱解 $u_n\in X_0^{s,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$。

证明： 固定 $n\in\mathrm{N}$，令 $u\in L^p(\Omega)$，

$$\begin{cases}(-\Delta)_p^s w=\dfrac{f_n(x)}{\left(u^++\frac{1}{n}\right)^\gamma}+\dfrac{f_n(x)}{u^++\frac{1}{n}}+\mu_n, & x\in\Omega,\\ w>0, & x\in\Omega,\\ w=0, & x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega,\end{cases}\tag{3.2}$$

其中 $u^+:=\max\{u,0\}$。由[9]中的引理 2.1，问题(3.2)的存在唯一的一个弱解 w。定义映射

$$u\in L^p(\Omega)\mapsto w=S(u)\in X_0^{s,p}(\Omega)\subset L^p(\Omega),$$

取 w 作为问题(3.2)的测试函数，得到

$$\begin{aligned}\iint_Q \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x&=\int_\Omega \frac{f_n(x)w}{\left(u^++\frac{1}{n}\right)^\gamma}\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{f_n(x)w}{u^++\frac{1}{n}}\mathrm{d}x+\int_\Omega \mu_n w\mathrm{d}x\\&\le n^{\gamma+1}\int_\Omega w\mathrm{d}x+n^2\int_\Omega w\mathrm{d}x+C(n)\int_\Omega w\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

分数阶 Sobolev 嵌入不等式，于是

$$\|w\|\le C'\left(n^{\gamma+1}+n^2+C(n)\right),\tag{3.3}$$

其中 C' 和 $C(n)$ 与 u 无关。因此半径为 $R:=C'\left(n^{\gamma+1}+n^2+C(n)\right)$ 的球在 S 的作用下是不变的。为了利用 Schauder's 不动点定理证明问题(3.1)解的存在性，我们需要证明 S 是一个连续的、紧算子。

我们首先证明 S 是连续的。已知 $u_k\in X_0^{s,p}(\Omega)$ 和 $u\in X_0^{s,p}(\Omega)$，且 $\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|=0$，由 $\{u_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ 在 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 中的强收敛性，存在 $\{u_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ 的子列，仍记为 $\{u_k\}$，有

$u_k\to u$ 在 $L^{p_s^*}(\Omega)$ 中，

$u_k\to u$ 对于 $x\in\Omega$ 几乎处处成立。

定义 $w_k:=S(u_k)$ 和 $w:=S(u)$，我们有

$$(-\Delta)_p^s w_k=\frac{f_n(x)}{\left(u_k^++\frac{1}{n}\right)^\gamma}+\frac{f_n(x)}{u_k^++\frac{1}{n}}+\mu_n\tag{3.4}$$

和

$$(-\Delta)_p^s w=\frac{f_n(x)}{\left(u^++\frac{1}{n}\right)^\gamma}+\frac{f_n(x)}{u^++\frac{1}{n}}+\mu_n。\tag{3.5}$$

取 $\overline{w}_k := w_k - w \in X_0^{s,p}(\Omega)$ 为(3.4)和(3.5)的测试函数，可以得到

$$\iint_Q \frac{|w_k(x)-w_k(y)|^{p-2}(w_k(x)-w_k(y))(\overline{w}_k(x)-\overline{w}_k(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega \frac{f_n(x)\overline{w}_k}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{f_n(x)\overline{w}_k}{u_k^+ + \frac{1}{n}}\mathrm{d}x + \int_\Omega \mu_n \overline{w}_k \mathrm{d}x$$

和

$$\iint_Q \frac{|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w_k(y))(\overline{w}_k(x)-\overline{w}_k(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega \frac{f_n(x)\overline{w}_k}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{f_n(x)\overline{w}_k}{u^+ + \frac{1}{n}}\mathrm{d}x + \int_\Omega \mu_n \overline{w}_k \mathrm{d}x.$$

对上述等式做减法，利用基本不等式，我们得到，当 $1<p<2$ 时，有

$$\iint_Q \frac{\left(|w_k(x)-w_k(y)|+|w(x)-w(y)|\right)^{p-2}|\overline{w}_k(x)-\overline{w}_k(y)|^2}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$\le \int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_n(x)}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right)(w_k(x)-w(x))\mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{u_k^+ + \frac{1}{n}} - \frac{f_n(x)}{u^+ + \frac{1}{n}}\right)(w_k(x)-w(x))\mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

当 $p \ge 2$ 时，有

$$\iint_Q \frac{|\overline{w}_k(x)-\overline{w}_k(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$\le \int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_n(x)}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right)(w_k(x)-w(x))\mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{u_k^+ + \frac{1}{n}} - \frac{f_n(x)}{u^+ + \frac{1}{n}}\right)(w_k(x)-w(x))\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

对(3.7)右侧的两项用 Holder 不等式和分数阶 Sobolev 嵌入不等式，我们得到

$$\left|\int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_n(x)}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right)(w_k(x)-w(x))\mathrm{d}x\right|$$
$$\le \left(\int_\Omega \left|\frac{f_n(x)}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_n(x)}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right|^{(p_s^*)'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}} \|\overline{w}_k\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}$$

$$\le C\left(\int_\Omega\left|\frac{f_n(x)}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}-\frac{f_n(x)}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right|^{(p_s^*)'}\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}}\|\overline{w}_k\|,$$

和

$$\left|\int_\Omega\left(\frac{f_n(x)}{u_k^+ + \frac{1}{n}}-\frac{f_n(x)}{u^+ + \frac{1}{n}}\right)(w_k(x)-w(x))\mathrm{d}x\right|$$

$$\le\left(\int_\Omega\left|\frac{f_n(x)}{u_k^+ + \frac{1}{n}}-\frac{f_n(x)}{u^+ + \frac{1}{n}}\right|^{(p_s^*)'}\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}}\|\overline{w}_k\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}$$

$$\le C\left(\int_\Omega\left|\frac{f_n(x)}{u_k^+ + \frac{1}{n}}-\frac{f_n(x)}{u^+ + \frac{1}{n}}\right|^{(p_s^*)'}\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}}\|\overline{w}_k\|,$$

其中$\left(p_s^*\right)'=\frac{Np}{N(p-1)+sp}$。再次利用(3.7)可以得到

$$\|w_k-w\|\le C\left[\left(\int_\Omega\left|\frac{f_n(x)}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}-\frac{f_n(x)}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right|^{(p_s^*)'}\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}}+\left(\int_\Omega\left|\frac{f_n(x)}{u_k^+ + \frac{1}{n}}-\frac{f_n(x)}{u^+ + \frac{1}{n}}\right|^{(p_s^*)'}\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

注意到

$$\left|\frac{f_n(x)}{\left(u_k^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}-\frac{f_n(x)}{\left(u^+ + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right|\le 2n^{\gamma+1}$$

和

$$\left|\frac{f_n(x)}{u_k^+ + \frac{1}{n}}-\frac{f_n(x)}{u^+ + \frac{1}{n}}\right|\le 2n^2,$$

由控制收敛定理和$u_k\to u$对于$x\in\Omega$几乎处处成立，容易得到

$$\lim_{k\to\infty}\|w_k-w\|=0。$$

对(3.6)式左侧利用三角不等式，右侧重复以上步骤，最终可以得到

$$\lim_{k\to\infty}\|w_k - w\| = 0$$

对于所有的 $p>1$ 都成立，即 S 是连续的。

接下来证明 S 是一个紧算子。令 $\{u_k\}_{k\in\mathrm{N}} \subset X_0^{s,p}(\Omega)$ 且满足 $\|u_k\| \le C$ 。那么存在 $\{u_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ 的一个子列和 $u \in X_0^{s,p}(\Omega)$，我们仍记为 $\{u_k\}$，使得在 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 中 $u_k \rightharpoonup u$，在 $L^r(\Omega)$ 中 $u_k \to u$，其中 $1 \le r < p_s^*$。定义 $w_k := S(u_k)$ 和 $w := S(u)$，由(3.3)，我们得到在 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 中 $S(u_k) \rightharpoonup w$，在 $L^r(\Omega)$ 中 $S(u_k) \rightharpoonup w$ 成立。类似于 S 的连续性的证明过程，取 $w_k - w$ 作为测试函数，利用 Holder 不等式，很容易得到

$$\lim_{k\to\infty}\|S(u_k) - S(u)\| = 0,$$

这就表明 S 是一个紧算子。由 Schauder's 不动点定理，存在 $u_n \in X_0^{s,p}(\Omega)$ 使得 $u_n = S(u_n)$。即 u_n 是问题(3.1)的弱解。此外，因为(3.1)的右侧属于 $L^\infty(\Omega)$，由[9]中的引理 2.2，我们得到 $u_n \in L^\infty(\Omega)$。证毕。

下面的一个引理重复[9]中引理 2.4 的证明方法即可得证，在此我们不再叙述证明过程。

引理 3.2 引理 3.1 中的 $\{u_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 满足对于任意的 $\omega \subset\subset \Omega$，都存在一个与 n 无关的正常数 C_ω 使得

$$u_n(x) \le u_{n+1}(x)$$

和

$$u_n(x) \ge C_\omega > 0$$

对于任意的 $x \in \omega$ 和 $n \in \mathrm{N}$ 都成立。

引理 3.3 [15]假设 $0<\alpha<1$， $a,b>0$， $a \ne b$，那么

$$\frac{a-b}{a^\alpha - b^\alpha} \le \frac{1}{\alpha}\left(a^{1-\alpha} + b^{1-\alpha}\right)。$$

引理 3.4 令 $u_n \in X_0^{s,p}(\Omega)$ 是问题(3.1)的解。如果 $0<\gamma\le 1$，那么序列 $\{u_n\}$ 在 $\mathrm{W}_0^{s_1,q}(\Omega)$ 中一致有界，其中 $q < \dfrac{N(p-1)}{N-s}$， $s_1 < s$。更进一步， $T_k(u_n)$ 在 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 中一致有界。

证明：固定 $k \ge 1$，取 $T_k(u_n)$ 作为(3.1)的测试函数。所以。我们得到

$$\begin{aligned}&\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))\left(T_k(u_n(x))-T_k(u_n(y))\right)}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega \frac{f_n T_k(u_n)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{f_n(x)T_k(u_n)}{u_n+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x+\int_\Omega \mu_n T_k(u_n)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 T_k 的定义，可以得到

$$\iint_Q \frac{\left|T_k(u_n(x))-T_k(u_n(y))\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \le k^{1-\gamma}\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)} + k\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \le Ck,$$

其中 $C = 2\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|\mu\|_{M^b(\Omega,d\mu)}$ 是一个与 n 无关的常数。所以 $T_k(u_n)$ 在 $X_0^{s,p}(\Omega)$ 中一致有界。由分数阶索伯列夫嵌入不等式(2.1)，我们得到

$$\frac{1}{C(N,p,s,\Omega)}\left(\int_\Omega |T_k(u_n(x))|^{p_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \le Ck。$$

对于不等式的左边，在集合$\{u_n \geq k\}$上，有$T_k(u_n)=k$，所以

$$\frac{1}{C(N,p,s,\Omega)}k^p\left(meas\left(\{u_n \geq k\}\right)\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq Ck\text{，}$$

于是

$$meas\left(\{u_n \geq k\}\right) \leq \frac{CS}{k^{\frac{N(p-1)}{N-ps}}}\text{。}$$

所以，$\{u_n\}$在$M^{\frac{N(p-1)}{N-ps}}(\Omega,d\mu)$中是一致有界的，因此在$L^r(\Omega)$中是一致有界的，其中$1 \leq r < \frac{N(p-1)}{N-ps}$。

对于任意的$x>0$和$0<\theta \leq 1$，定义函数

$$\phi(x)=1-\frac{1}{(1+x)^\theta}\text{。}$$

观察到函数ϕ满足

$$\phi(x) \leq \min(1,x) \text{ 和 } \phi(x) \leq x^\gamma$$

对于任意的$0<\theta \leq \gamma \leq 1$都成立。取$\phi(u_n)$作为问题(3.1)的测试函数。于是，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))\left(\phi(u_n(x))-\phi(u_n(y))\right)}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&=\int_\Omega \frac{f_n\phi(u_n)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{f_n(x)\phi(u_n)}{u_n+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x+\int_\Omega \mu_n\phi(u_n)\mathrm{d}x \\
&\leq 2\|f\|_{L^1(\Omega)}+\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C.
\end{aligned}$$

令$w_n=u_n+1$，我们有

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^{p-2}(w_n(x)-w_n(y))}{|x-y|^{N+ps}}\frac{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}{(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq C\text{。}$$

下面将证明$\{u_n\}$在在$X_0^{s_1,q}(\Omega)$中一致有界，其中$q<\frac{N(p-1)}{N-s}$，$s_1<s$。

令$q<p$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&=\int_\Omega\int_\Omega \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&=\int_\Omega\int_\Omega \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^q}{|x-y|^{\frac{q}{p}N+qs}}\times\frac{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta} \\
&\quad\times\frac{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}{\left((w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta\right)|x-y|^{\frac{p-q}{p}N-q(s-s_1)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$=\int_\Omega\int_\Omega \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^q}{|x-y|^{\frac{q}{p}N+qs}}\times\left(\frac{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\times\left(\frac{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}\right)^{\frac{p-q}{p}}$$

$$\times\frac{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}{\left((w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta\right)|x-y|^{\frac{p-q}{p}N-q(s-s_1)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

由 Holder 不等式，我们得到

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\le\left[\int_\Omega\int_\Omega \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\times\frac{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}\right]^{\frac{q}{p}}$$

$$\times\left[\int_\Omega\int_\Omega \frac{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}\times\left(\frac{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}\right)^{\frac{p}{p-q}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{|x-y|^{N-\beta}}\right]^{\frac{p-q}{p}},$$

其中 $\beta=\dfrac{pq(s-s_1)}{p-q}>0$。所以，由引理 3.3，

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\le C^{\frac{q}{p}}\times\left[\int_\Omega\int_\Omega\left(\frac{(w_n(x)-w_n(y))(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta}{(w_n(x))^\theta-(w_n(y))^\theta}\right)^{\frac{q}{p-q}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{|x-y|^{N-\beta}}\right]^{\frac{p-q}{p}}$$

$$\le\left(\frac{C}{\theta}\right)^{\frac{q}{p}}\times\left[\int_\Omega\int_\Omega\left(\left((w_n(x))^{1-\theta}+(w_n(y))^{1-\theta}\right)(w_n(x))^\theta(w_n(y))^\theta\right)^{\frac{q}{p-q}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{|x-y|^{N-\beta}}\right]^{\frac{p-q}{p}}$$

$$=\left(\frac{C}{\theta}\right)^{\frac{q}{p}}\times\left[\int_\Omega\int_\Omega\left(w_n(x)(w_n(y))^\theta+w_n(y)(w_n(x))^\theta\right)^{\frac{q}{p-q}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{|x-y|^{N-\beta}}\right]^{\frac{p-q}{p}}.$$

由 Young 不等式，可以得到

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\le C_1\left[\int_\Omega(w_n(x))^{\frac{q(1+\theta)}{p-q}}\left(\int_\Omega\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-\beta}}\right)\right]^{\frac{p-q}{p}}+C_2\left[\int_\Omega(w_n(y))^{\frac{q(1+\theta)}{p-q}}\left(\int_\Omega\frac{\mathrm{d}x}{|x-y|^{N-\beta}}\right)\right]^{\frac{p-q}{p}}.$$

观察到

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-\beta}}\\&=\int_{\Omega\cap|x-y|>1}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-\beta}}+\int_{\Omega\cap|x-y|\le1}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-\beta}}\\&=|\Omega|+\int_{|z|\le1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|^{N-\beta}}=|\Omega|+\frac{|S^{N-1}|}{\beta},\end{aligned}$$

其中$|S^{N-1}|$表示$\mathbb{R}^N$中单位球的 Lebesgue 测度。由x、y的对称性，存在一个与n无关的常数C使得

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\le C\left(\int_{\Omega}(w_n(y))^{\frac{q(1+\theta)}{p-q}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-q}{p}}。$$

现在，我们选择$\theta>0$使得$\frac{q(1+\theta)}{p-q}<\frac{N(p-1)}{N-ps}$。也就是说

$$\theta<\frac{Np(p-1)-pq(N-s)}{q(N-ps)}。$$

为了保证θ的存在，必须有$Np(p-1)-pq(N-s)>0$，即$q<\frac{N(p-1)}{N-s}$。因此序列$\{u_n\}$在$W_0^{s_1,q}(\Omega)$中一致有界，其中$q<\frac{N(p-1)}{N-s}$，$s_1<s$。证毕。

4. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明：对于引理 3.4 中的序列$\{u_n\}$，存在序列$\{u_n\}$的子列，仍记为$\{u_n\}_n$，以及可测函数$u\in W_0^{s_1,q}(\Omega)$，使得

$u_n\rightharpoonup u$ 在$W_0^{s_1,q}(\Omega)$中，

$u_n\to u$ 在$L^r(\Omega)$中，其中$r\in[1,p_{s_1}^*)$，$p_{s_1}^*=\frac{pN}{N-ps_1}$，

$u_n\to u$ 在Ω中几乎处处成立。

存在一个正函数$d\in L^r(\Omega)$，其中$r\in[1,p_{s_1}^*)$，$p_{s_1}^*=\frac{pN}{N-ps_1}$使得$|u_n(x)|\le d(x)$对几乎处处的$x\in\Omega$成立。

显然u在$W_0^{s_1,q}(\Omega)$中是一致有界的，其中$q<\frac{N(p-1)}{N-s}$，$s_1<s$。由法图引理，$T_k(u)$在$X_0^{s,p}(\Omega)$中一致有界，其中$k>0$。下面证明u是问题(1.1)的弱解。

选择$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$作为(3.1)的测试函数，于是

$$\begin{aligned}&\int_{Q}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\int_{\Omega}\frac{f_n\varphi}{u_n+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\frac{f_n\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma}}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\mu_n\varphi\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.1}$$

由引理 3.2，对于任意的$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，记$supp(\varphi)=\omega$，那么存在一个与$n$无关的正数$C_\omega>0$使得

$$0 \le \left| \frac{f_n \varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} \right| \le \frac{|f||\varphi|}{C_{\omega}^{\gamma}} \in L^1(\Omega),$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \frac{f_n \varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma}} \mathrm{d}x \text{。}$$

同理，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \frac{f_n \varphi}{u_n + \frac{1}{n}} \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma}} \mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \mu_n \varphi \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \varphi \mathrm{d}\mu \text{。}$$

对于(4.1)式等号左侧，由[9]中定理 3.2 的证明过程，显然

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \int_Q \frac{\left|u_n(x)-u_n(y)\right|^{p-2}\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\left(\varphi(x)-\varphi(y)\right)}{|x-y|^{N+ps}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_Q \frac{\left|u(x)-u(y)\right|^{p-2}\left(u(x)-u(y)\right)\left(\varphi(x)-\varphi(y)\right)}{|x-y|^{N+ps}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是，对(4.1)式的左右两边同时取极限，可以得到

$$\iint_Q \frac{\left|u(x)-u(y)\right|^{p-2}\left(u(x)-u(y)\right)\left(\varphi(x)-\varphi(y)\right)}{|x-y|^{N+ps}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \frac{f(x)\varphi}{u^{\gamma}} \mathrm{d}x + \int_{\Omega} \frac{f(x)\varphi}{u^{\gamma}} \mathrm{d}x + \int_{\Omega} \varphi \mathrm{d}\mu$$

对任意的 $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ 都成立。即 u 是问题(1.1)的弱解。证毕。

参考文献

[1] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H. and Tartar, L. (1977) On a Dirichlet Problem with a Singular Nonlinearity. *Communications in Partial Differential Equations*, **2**, 193-222. https://doi.org/10.1080/03605307708820029

[2] Coclite, M.M. and Palmieri, G. (1989) On a Singular Nonlinear Dirichlet Problem. *Communications in Partial Differential Equations Partial Differential Equations*, **14**, 1315-1327. https://doi.org/10.1080/03605308908820656

[3] Diaz, I.I., Morel, J.M. and Oswald, L. (1987) An Elliptic Equation with Singular Nonlinearity. *Communications in Partial Differential Equations Partial Differential Equations*, **12**, 1333-1344. https://doi.org/10.1080/03605308708820531

[4] Ghergu, M. and Rădulescu, V. (2003) Sublinear Singular Elliptic Problems with Two Parameters. *Journal of Differential Equations*, **195**, 520-536. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00105-0

[5] Ghergu, M. and Rădulescu, V. (2005) On a Class of Sublinear Singular Elliptic Problems with Convection Term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **311**, 635-646. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.012

[6] Boccardo, L. and Orsina, L. (2010) Semilinear Elliptic Equations with Singular Nonlinearities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **37**, 363-380. https://doi.org/10.1007/s00526-009-0266-x

[7] Barrios, B., De Bonis, I., Medina, M. and Peral, I. (2015) Semilinear Problems for the Fractional Laplacian with a Singular Nonlinearity. *Open Mathematics*, **13**, 390-407. https://doi.org/10.1515/math-2015-0038

[8] Canino, A., Sciunzi, B. and Trombetta, A. (2016) Existence and Uniqueness for p-Laplace Equations Involving Singular Nonlinearities. *Nodea-Nonlinear Differential Equations and Applications*, **23**, 1-18. https://doi.org/10.1007/s00030-016-0361-6

[9] Canino, A., Montoro, L., Sciunzi, B. and Squassina, M. (2017) Nonlocal Problems with Singular Nonlinaertiy. *Bulletin of Mathematical Biology*, **141**, 223-250. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2017.01.002

[10] Masoud, B.A. and Mahmoud, H. (2021) A Fractional Laplacian Problem with Mixed Singular Nonlinearities and Non-regular Data. *Journal of Ellipitic and Parabolic Equations*, **7**, 784-814. https://doi.org/10.1007/s41808-021-00113-0

[11] Youssfi, A. and Ould Mohmoud, G. (2020) On Singular Equations Involving Fractional Laplacian. *Acta Mathematica Scientia*, **40**, 1289-1315. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0509-7

[12] Demengel, F. and Demengel, G. (2012) Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations. Universitext. Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2807-6

[13] Dinezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

[14] Benilan, P., Boccardo L., Gallouet, T., *et al*. (1995) An L1-Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations. *Annali Della Scuola Normal Superiore Di Pisa-Class Di Scienze*, **22**, 241-273.

[15] Iannizzotto, A., Mosconi, S. and Squassina, M. (2016) Global Regularity for the Fractional p-Laplacian. *Revista Matematica Iberoamericana*, **32**, 1353-1392. https://doi.org/10.4171/rmi/921