

广义BBM-Burgers方程初边值问题的 L^2 衰减估计

刘媛媛

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年4月8日; 录用日期: 2024年5月10日; 发布日期: 2024年5月31日

摘要

本文主要研究如下本文研究的是广义BBM-Burgers方程扩散波的衰减估计问题, 利用已经证明过的广义BBM-Burgers方程的解关于扩散波的渐近稳定, 对该解进行衰减估计, 并且在本文将证明广义

BBM-Burgers方程解在 L^2 范数下的衰减速度为 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 。即对方程:
$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = u_{xx} + u_{xxt} \\ u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), u(0,t) = u_- \end{cases}$$
 在本

文中我们将证明在波的强度 $\delta := |u_+ - u_-|$ 及初值 $u_0(x)$ 适当小的情况下, 广义BBM-Burgers方程的扰动方程形式的解的衰减速度为 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 。

关键词

广义BBM-Burgers方程, 衰减估计, 能量估计, 分部积分

L^2 Attenuation Estimation for the Initial Boundary Value Problem of the Generalized BBM-Burgers Equation

Yuanyuan Liu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 8th, 2024; accepted: May 10th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

This paper mainly studies as follows: This paper studies the attenuation estimation of the diffu-

sion wave of the generalized BBM-Burgers equation. The solution of the generalized BBM-Burgers equation, which has been proved to be about the asymptotic stability of the diffusion wave, is used to estimate the attenuation of the solution. In this paper, it is proved that the decay rate of the solution of the generalized BBM-Burgers equation is $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ under the L^2 norm. Immediate pair

equation:
$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = u_{xx} + u_{xxt} \\ u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), u(0,t) = u_- \end{cases}$$
 in this paper, we will prove that if the wave intensity $\delta := |u_+ - u_-|$ and the initial value $u_0(x)$ are appropriately small, the decay velocity of the perturbation equation of the generalized BBM-Burgers equation is $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$.

Keywords

Generalized BBM-Burgers Equation, Attenuation Estimation, Energy Estimation, Integration by Parts

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑了以下广义 BBM-Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = u_{xx} + u_{xxt}, \\ u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), u(0,t) = u_-. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $(x,t) \in R_+ \times R_+$, $f(u)$ 是一个充分光滑的凸函数, δ 表示色散系数且 $\delta \neq 0$, 常数 $\mu > 0$ 为耗散系数. 此外, 我们假设 $u_0(x)$ 在边界 $x=0$, $x=+\infty$ 上有:

$$u(0,0) = u_-, u(+\infty, 0) = u_+, u_+ \neq u_-. \quad (1.2)$$

BBM 方程是 Benjamin 等人[1]在对流体动力学的物理研究中, 由 Korteweg de Vries 方程精炼而成. 自 1940 年 Burgers 方程提出以来, 对经典 Burgers 方程有了非常全面的研究结果, 徐红梅[2]等人证明了多维空间中 BBM-Burgers 方程的全局解存在初始数据, 并且利用能量估计和时频分解的方法, 得到该解的衰减估计, 证明了衰减速率与热传导方程的相同; 余沛[3]等人研究了带有分数阶扩散的 Burgers 方程在初值属于 L^p 情况下的弱解的衰减估计; 易菊燕[4]等人讨论在半空间中广义 KDV-Burgers 方程解的收敛到稀疏波的收敛率, 并且使用 L^1 -估计导出了解渐近衰减到稀疏波 L^p -估计; 关于 Burgers 方程的衰减估计以及其他模型衰减估计的相关研究成果读者可参考文献[5]-[20].

在 BBM-Burgers 方程的解整体存在的基础上, 本文主要证明广义 BBM-Burgers 方程非线性扩散波的解的衰减速率为 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$, 观察广义 BBM-Burgers 方程中含有热传导方程

$$\bar{u}_t - \bar{u}_{xx} = 0 \quad (1.3)$$

对于热传导方程, 我们知道该方程的解是具有唯一的自相似解, 广义 BBM-Burgers 方程的初边值问题在大时间里的解是非线性稳定的, 我们在扩散波附近定义一个扰动 $\phi = u - \bar{u}$, 证明在波 $\delta := |u_+ - u_-|$ 足

够小的情况下, (1.1)的解已经收敛到(1.5)的自相似解, 本文将利用能量估计来证明扰动方程的衰减估计, 因此定义如下扰动方程

$$\begin{cases} \phi(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x, t) \\ \phi_0(x) = u_0(x) - \bar{u}(x, 0), \phi(0, t) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

则由(1.1) (1.3) (1.4)得到扰动方程为

$$\begin{cases} \phi_t - \phi_{xx} + f(\bar{u} + \phi)_x - (\phi + \bar{u})_{xx} = 0 \\ \phi_0(x) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

下面则是本文的定理。

定理 1: 对于问题(1.7)假设存在足够小的波的强度 δ 和初值 $\Phi_0 = \|\phi_0\|_2^2$, 且 δ 满足 $\|u_0(x) - \bar{u}(x, 0)\|_{H^2(R_+)} + |u_+ - u_-| \leq \delta < \varepsilon$, 初边值问题(1.7)存在唯一解 $u(x, t)$, 且满足

$$u(x, t) - \bar{u}(x, t) \in C([0, \infty), H^2(R_+)) \cap L^2([0, \infty), H^3(R_+)). \quad (1.6)$$

进一步解 $u(x, t)$ 的衰减速度为

$$\sum_{k=0}^1 (1+t)^{k+1} \|\partial_x^k((u-\bar{u}), (u-\bar{u})_x)(t)\|^2 + \sum_{k=0}^2 \int_0^t (1+t)^{k+1} \|\partial_x^k((u-\bar{u}), (u-\bar{u})_x)(\tau)\|^2 d\tau \leq C(\Phi_0 + \delta). \quad (1.7)$$

2. 预备知识

引理 2.1 (Sobolev 不等式)对于任意函数 $f(x) \in H^1(R)$, 有

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_2^{\frac{1}{2}} \|f_x\|_2^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.1)$$

引理 2.2 (Young 不等式)设 $1 < p, q < +\infty$, 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} (a, b > 0). \quad (2.2.2)$$

特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 我们称之为 Cauchy 不等式。

以下均设 $\Omega \subset R^n$ 。

在本文中, 对于函数空间而言, $L^p = L^p(R_+)$ ($1 \leq p < \infty$) 表示通常的 Lebesgue 空间, 其范数可定义为

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{R_+} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty, \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in R^n} |f(x)|. \quad (2.2.3)$$

H^l 表示通常的 Sobolev 空间, 其范数为

$$\|f\|_{H^l} = \sum_{k=0}^l \|\partial_x^k f(x)\|_{L^2}^2 dx \quad (2.2.4)$$

特别地, 当 $l=0$ 时, 记 $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|$, 在不会导致混淆的情况下, 我们将区域 R_+ 省略不写, 并且大写字母 C 和 $O(1)$ 表示一般常数。

3. 定理 1 的证明

为了证明定理 1, 先将给出先验假设, 再将证明先验估计从而证明定理 1。

命题 3.1 (先验假设)在定理 1 的条件下, 若使得 $\phi(x, t) \in X(x, T)$ 为问题(1.7)的解, 则我们作出如下的先验假设:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{k=0}^2 (1+t)^k \left\| \partial_x^k \phi(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C\varepsilon. \tag{3.1}$$

其中 C 为正常数, ε 是依赖于初值以及波的强度的一个充分小的正常数. 根据以上先验假设, 我们用 Sobolev 不等式 $\|f\|_{L^\infty} \leq (\|f\|_{L^2})^{\frac{1}{2}} (\|\partial_x f\|_{L^2})^{\frac{1}{2}}$ 可以得到相应函数的 L^∞ 范数, 则我们可以得到如下的先验估计:

$$\sum_{k=0}^1 (1+t)^{k+1} \left\| \partial^k (\phi, \phi_x)(t) \right\|_{L^2}^2 + \sum_{k=0}^1 \int_0^t (1+t)^{k+1} \left\| \partial_x^k (\phi, \phi_x)(t) \right\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(\|\phi\|_2^2 + \delta). \tag{3.2}$$

引理 3.2: 在先验假设(3.1)的情况下, 对于充分小的正数 δ , 有

$$\int_0^{+\infty} (1+t)(\phi^2 + \phi_x^2) dx + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi^2 dx d\tau \leq C(\Phi_0 + \delta). \tag{3.2.1}$$

证明: 在扰动方程(1.5)两边同时乘以 $(1+t)\phi$ 可得

$$(1+t)\phi\phi_t - (1+t)\phi\phi_{xx} + (1+t)\phi f(\bar{u} + \phi)_x - (1+t)\phi(\phi + \bar{u})_{xx} = 0. \tag{3.2.2}$$

在 $[0, t] \times [0, +\infty)$ 上对(3.2.2)进行积分可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi\phi_t dx d\tau - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi\phi_{xx} dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi f(\bar{u} + \phi)_x dx d\tau \\ & - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi(\phi + \bar{u})_{xx} dx d\tau = 0. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

对(3.2.3)的各项运用分部积分进行计算

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi\phi_t dx d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1+t)\phi^2 \Big|_0^t dx - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi^2 dx d\tau, \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi\phi_{xx} dx d\tau &= - \int_0^t (1+t)\phi\phi_x \Big|_0^{+\infty} d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi_x^2 dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi_x^2 dx d\tau, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi f(\bar{u} + \phi)_x dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi [f(\bar{u} + \phi) - f(\bar{u})]_x dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi f(\bar{u})_x dx d\tau \\ &= A + B. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

对于式(3.2.6)中的 A 通过泰勒展开式(其中 $\bar{u} < \xi < \bar{u} + \phi$)则有

$$\begin{aligned} A &= \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi [\phi f'(\xi)]_x dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi\phi_x f'(\xi) dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi^2 f''(\xi) dx d\tau, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$B = \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi f'(\bar{u}) \bar{u}_x dx d\tau. \tag{3.2.8}$$

将(3.2.7)与(3.2.8)代入到(3.2.6)中可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi f(\bar{u} + \phi)_x dx d\tau = \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi\phi_x f'(\xi) dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi^2 f''(\xi) dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi f'(\bar{u}) \bar{u}_x dx d\tau, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi(\phi + \bar{u})_{xx} dx d\tau = \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi\phi_{xx} dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t)\phi \bar{u}_{xx} dx d\tau. \tag{3.2.10}$$

其中式(3.2.10)右侧的第一项分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi \phi_{xx} dx d\tau &= \int_0^t (1+t) \phi \phi_x \Big|_0^{+\infty} d\tau - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x \phi_{xt} dx d\tau \\ &= - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x \phi_{xt} dx d\tau \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x^2 \Big|_0^t dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi_x^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

式(3.2.10)右侧的第二项通过分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi \bar{u}_{xx} dx d\tau &= \int_0^t (1+t) \phi \bar{u}_x \Big|_0^{+\infty} d\tau - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x \bar{u}_{xt} dx d\tau \\ &= - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x \bar{u}_{xt} dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

将(3.2.11)与(3.2.12)代入到(3.2.10)中可得

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi (\phi + \bar{u})_{xx} dx d\tau = - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x^2 \Big|_0^t dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi_x^2 dx d\tau - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x \bar{u}_{xt} dx d\tau. \quad (3.2.13)$$

将(3.2.4)~(3.2.5)(3.2.9)以及(3.2.13)代入到(3.2.3)中可得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1+t) \phi^2 \Big|_0^t dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x^2 \Big|_0^t dx + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi^2 f''(\xi) dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi^2 dx d\tau - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi \phi_x f'(\xi) dx d\tau - \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi f'(\bar{u}) \bar{u}_x dx d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x \bar{u}_{xt} dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

对式(3.2.14)右侧的各项运用能量法进行估计

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi^2 dx d\tau \leq C(\Phi_0 + \delta), \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi \phi_x f'(\xi) dx d\tau &\leq C\delta \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi^2 dx d\tau + C\varepsilon \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi_x^2 dx d\tau \\ &\leq C\delta \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi^2 dx d\tau + C(\Phi_0 + \delta), \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi f'(\bar{u}) \bar{u}_x dx d\tau \leq C\delta + C\delta \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi^2 dx d\tau, \quad (3.2.17)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \phi_x^2 dx d\tau \leq C(\Phi_0 + \delta), \quad (3.2.18)$$

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x \bar{u}_{xt} dx d\tau \leq C\delta + C\delta \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x^2 dx d\tau. \quad (3.2.19)$$

将(3.2.15)~(3.2.19)代入到(3.2.14)中整理可得

$$\int_0^{+\infty} (1+t) \phi^2 dx + \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x^2 dx + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) \phi^2 dx d\tau \leq C(\Phi_0 + \delta). \quad (3.2.20)$$

因此引理 3.2 得证。

类似可得到更高阶的估计

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^2 (\phi_x^2 + \phi_{xx}^2) dx + \int_0^t \int_0^{+\infty} (1+t) (\phi_x^2 + \phi_{xx}^2) dx d\tau \leq C(\Phi_0 + \delta). \quad (3.2.21)$$

又因为 $\phi(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x, t)$ ，所以我们有

$$\sum_{k=0}^l (1+t)^{k+1} \left\| \partial_x^k \left((u-\bar{u}), (u-\bar{u})_x \right) (t) \right\|_{L^2}^2 + \sum_{k=0}^l \int_0^t (1+t)^{k+1} \left\| \partial_x^k \left((u-\bar{u}), (u-\bar{u})_x \right) (\tau) \right\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(\Phi_0 + \delta). \quad (3.2.22)$$

由此定理 1 的证明完成, 即证明了广义 BBM-Burgers 方程初边值问题的 L^2 衰减估计为 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 。

参考文献

- [1] Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J. (1972) Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **272**, 47-78. <https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0032>
- [2] 徐红梅, 朱丽丽. 高维 BBM-Burgers 方程解的衰减估计[J]. 数学杂志, 2018, 38(6): 1049-1053.
- [3] 余沛. 带有分数扩散的多维 Burgers 方程的衰减估计[J]. 数学物理学报, 2016, 36(2): 340-352.
- [4] 易菊燕, 罗祠军, 陈诚. Kdv-Burgers 方程初边值问题的 L^p -衰减估计[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2012, 28(5): 609-615.
- [5] 孙露露. 二维半空间上 BBM-Burgers 方程平面边界层解的稳定性及衰减估计[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2015.
- [6] 王玮. 具有耗散项的广义 BBM-Burgers 方程的初值问题[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 华北水利水电大学, 2014.
- [7] 张卫国, 徐晋, 李想, 等. MKdV-Burgers 方程衰减振荡解的近似解和误差估计[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(5): 409-418+490.
- [8] 阮立志. 无粘性 Burgers 方程黎曼问题光滑近似解的高阶衰减估计[J]. 中南民族大学学报(自然科学版), 2006, 25(4): 97-100.
- [9] 张能伟, 陈翔英. 一类广义 BBM-Burgers 方程的 Cauchy 问题[J]. 郑州大学学报(理学版), 2012, 44(2): 24-30.
- [10] Gheraibia, B. and Boumaza, N. (2023) Initial Boundary Value Problem for a Viscoelastic Wave Equation with Balakrishnan—Taylor Damping and a Delay Term: Decay Estimates and Blow-Up Result. *Boundary Value Problems*, **2023**, Article No. 93. <https://doi.org/10.1186/s13661-023-01781-8>
- [11] Li, H., Li, J. and Zhang, J. (2023) Existence and Decay Estimates of Solution for a Fourth Order Quasi-Geostrophic Equation. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **30**, 1282-1294. <https://doi.org/10.1007/s44198-023-00130-8>
- [12] Fukuda, I. and Hirayama, H. (2023) Large Time Behavior and Optimal Decay Estimate for Solutions to the Generalized Kadomtsev-Petviashvili-Burgers Equation in 2D. *Nonlinear Analysis*, **234**, Article 113322. <https://doi.org/10.1016/j.na.2023.113322>
- [13] Ma, C. (2023) Global Well-Posedness and Optimal Decay Estimate for the Incompressible Porous Medium Equation Near a Nontrivial Equilibrium. *Applied Mathematics and Computation*, **440**, Article 127680. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127680>
- [14] Kagei, Y. and Takeda, H. (2023) Decay Estimates of Solutions to Nonlinear Elastic Wave Equations with Viscoelastic Terms in the Framework of L_p -Sobolev Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **519**, Article 126801. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126801>
- [15] Tong, L. (2024) Global Existence and Decay Estimates of the Classical Solution to the Compressible Navier-Stokes-Smoluchowski Equations in \mathbb{R}^3 . *Advances in Nonlinear Analysis*, **13**, 20230131. <https://doi.org/10.1515/anona-2023-0131>
- [16] Miao, X., Zhao, J. and Chu, C. (2024) Sharp Decay Estimate for Solutions of General Choquard Equations. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **190**, Article 103374. <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2023.103374>
- [17] Taira, K. (2022) A Remark on Strichartz Estimates for Schrödinger Equations with Slowly Decaying Potentials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **150**, 3953-3958. <https://doi.org/10.1090/proc/15954>
- [18] Bouclet, J.-M. and Burq, N. (2021) Sharp Resolvent and Time-Decay Estimates for Dispersive Equations on Asymptotically Euclidean Backgrounds. *Duke Mathematical Journal*, **170**, 2575-2629. <https://doi.org/10.1215/00127094-2020-0080>
- [19] Berbiche, M. (2021) Energy Decay Estimates of Solutions for Viscoelastic Damped Wave Equations in \mathbb{R}^n . *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **44**, 3175-3214. <https://doi.org/10.1007/s40840-021-01097-9>
- [20] Del Pezzo, L.M. and Quaas, A. (2020) Spectrum of the Fractional P-Laplacian in \mathbb{R}^N and Decay Estimate for Positive Solutions of a Schrödinger Equation. *Nonlinear Analysis*, **193**, Article 111479.