Advances in Education 教育进展, 2024, 14(5), 1529-1536
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.145873

Hans汉斯

高考向量数量积最值问题分析与研究

赵　亮，孙爱慧*，陈旭洋

吉林师范大学数学与计算机学院，吉林　四平

收稿日期：2024年4月27日；录用日期：2024年5月24日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

数学思维能力，对于学生形式数学学科素养、提升综合素质至关重要。文章探讨了平面向量数量积最值问题的解题路径与适用情况，并以高考真题为例，多视角解析平面向量数量积最值问题，探究出有关培养学生数学思维能力的教学启示。鼓励教师启发学生多角度思考问题，引导学生寻找不同的解题切入点。教师应丰富学生的思维方式，重点培养学生的发散思维，重视学生思维品质，关注学生数学思维发展特点。

关键词

数学思维能力，向量数量积，一题多解，高考真题

Analysis and Research on the Maximum and Minimum Value Problems of Vector Scalar Product in the College Entrance Examination

Liang Zhao, Aihui Sun*, Xuyang Chen

College of Mathematics and Computer Science, Jilin Normal University, Siping Jilin

Received: Apr. 27th, 2024; accepted: May 24th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

The ability of mathematical thinking is very important for students' formal mathematics discipline accomplishment and improving their comprehensive quality. This paper discusses the solution path and application of the plane vector scalar product maximum and minimum value, and analyzes the plane vector scalar product maximum value problem from multiple perspectives by taking the college entrance examination as an example, and probes into the teaching enlightenment on cultivating students' mathematical thinking ability. Encourage teachers to inspire students to

*通讯作者。

文章引用: 赵亮, 孙爱慧, 陈旭洋. 高考向量数量积最值问题分析与研究[J]. 教育进展, 2024, 14(5): 1529-1536.
DOI: 10.12677/ae.2024.145873

think from multiple angles, guide students to find different problem solving pointcuts. Teachers should enrich students' thinking mode, focus on cultivating students' divergent thinking, pay attention to the quality of students' thinking, and pay attention to the development characteristics of students' mathematical thinking.

Keywords

Mathematical Thinking Ability, Vector Scalar Product, Multiple Solutions to One Problem, Actual College Entrance Examination Questions

1. 引言

向量理论既有丰富的数学意义，又有重要的物理意义。向量既是代数的研究对象，又是几何的研究对象，向量问题的分析与求解往往体现了数形结合的数学思想。在高考中，向量数量积问题的分析路径多维，解题方法多样，往往将划归与转化思想体现的淋漓尽致。向量是高考考查的重点，尤其是共起点向量数量积的最值问题，分别在 2023 年、2022 年和 2020 年的高考试卷中出现。不少学者对向量数量积进行了研究，如魏智琴探讨了平面向量数量积求解的四种途径[1]；冯平借助零向量、平行向量和垂直向量等例谈了求解平面向量数量积的方法和策略[2]。本文主要通过多视角解析高考中的向量数量积最值问题，帮助教师改进教学方法，帮助学生优化解题思路，提高学生数学思维能力。数学思维能力的提高有助于数学核心素养的形成。

2. 解题路径探究与真题解析

向量是解决直线、曲线、平面、曲面等数学问题的基本工具，是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础。高中数学课标中要求学生能用向量语言表述和解决现实生活、数学和物理中的问题。高考中向量数量积的题目较为综合，往往会结合直线、圆、三角函数、多边形等知识点命题，求解方法多样，通常有定义法、坐标法、基底法、极化恒等式法和投影向量法。每种方法的应用背景和适用情况不同。下面，就以近几年高考真题为例，探讨共起点向量数量积最值问题的解题途径与方法。

2.1. 定义法

在平面向量数量积的应用问题中，应首先考虑到平面向量数量积的定义，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是任意的两个向量，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是他们的夹角。如果能够在题干中找到两向量的模长及其夹角，就可以选择定义法，只需将其代入平面向量数量积公式，即可运算求解。对于单一向量知识点的题目，可以使用定义法时，往往需要已知条件清晰、明了，学生只需要进行简单的运算，无需过多的分析和思考环节。下面举例说明定义法的应用。

例 1 (2023 年全国乙卷理科第 12 题)已知 $\odot O$ 的半径为 1，直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A，直线 PB 与 $\odot O$ 交于 B，C 两点，D 为 BC 的中点。若 $|PO|=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为(　　)

A. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

分析 本题通过勾股定理计算可以得出$\left|\overrightarrow{PA}\right|=1$为定值，此时只需再求出$\left|\overrightarrow{PD}\right|$与$\angle APD$的值，或者将二者用参数表示出来，即可用向量数量积公式表示出$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$，再借助三角函数相关公式进行化简，最后求得最值。

解析 如图1所示，$OA\perp PA$，且$\left|OA\right|=1$，$\left|PO\right|=\sqrt{2}$，则$\left|PA\right|=1$，$\angle APO=\frac{\pi}{4}$。设$\angle OPD=\theta$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，则$\angle APD=\theta+\frac{\pi}{4}$。在$\triangle ODP$中，$OD\perp PD$，则$\left|PD\right|=\sqrt{2}\cos\theta$。根据平面向量数量积定义得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}&=\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PD}\right|\cdot\cos\angle APD\\&=1\cdot\sqrt{2}\cos\theta\cdot\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right).\end{aligned}$$

当$\theta=-\frac{\pi}{8}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$取得最大值为$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。

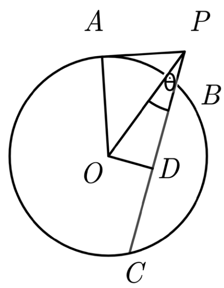

Figure 1. Example analysis diagram of definition method
图1. 定义法例题解析示意图

2.2. 坐标法

平面向量数量积的坐标表示：两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和。在面对一些特殊的平面图形问题、动点问题及向量数量积的取值范围问题时，可以尝试建立合适的平面直角坐标系，表示出各点和各向量所对应的坐标，根据平面向量数量积的坐标表示，可将平面向量数量积的最值问题转化成函数的取值范围问题，借助这种划归与转化思想往往可以降低解题的难度，提高解题效率和正确率。坐标法的适用性相对较强，不过往往有一定的运算量，要求学生具有较强的运算能力。下面举例说明坐标法的应用。

例2 (2022年北京卷第10题)在$\triangle ABC$中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90^{\circ}$。P为$\triangle ABC$所在平面内的动点，且$PC=1$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是(　　)

A. $[-5,3]$　　B. $[-3,5]$　　C. $[-6,4]$　　D. $[-4,6]$

分析 本题中$\triangle ABC$为直角三角形，点P在$\odot C$上，可采取坐标法，以C为原点建立坐标系，再简洁地表示出A，B，P三点的坐标，将其带入数量积公式，通过进一步化简，最终转化为圆外一点到圆上一点距离的最值问题，结合几何法求得结果。

解析 如图2所示，以C为坐标原点，以CA，CB所在的直线分别为x轴，y轴建立平面直角坐标系。

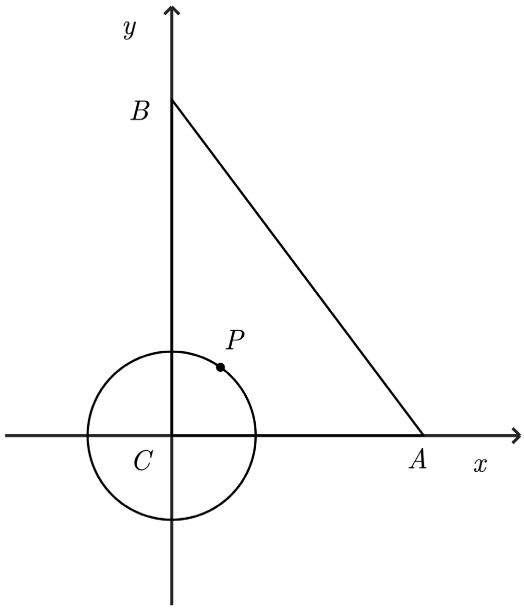

Figure 2. Example analysis diagram of coordinate method
图 2. 定义法例题解析示意图

结合题意可得，$A(3,0)$，$B(0,4)$。设 $P(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$。此时 $\overrightarrow{PA}=(3-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-x,4-y)$。所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=x^2-3x+y^2-4y\\&=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2-\frac{25}{4}.\end{aligned}$$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2$ 的几何意义为点 $P(x,y)$ 与点 $Q\left(\frac{3}{2},2\right)$ 之间距离的平方。点 P 在以原点为圆心，以 1 为半径的 $\odot C$ 上，点 Q 在 $\odot C$ 外，所以 $|PQ|$ 的最大值为 $|OQ|+1$，最小值为 $|OQ|-1$。因此 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-4,6]$。

2.3. 基底法

平面向量基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么，对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$。我们把 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。运用平面向量基本定理，可以把未知向量用两个不共线的非零已知向量来表示，通过求两个已知向量的模长和夹角来解决未知向量数量积的问题。当构成数量积的两个向量的模长和夹角均未知或者变化时，可以尝试使用该方法，但需要注意的是，要根据已知条件选择合适的基底，通常要已知基底向量的模长和夹角。下面用基底法分析并解析例 2。

分析 例 2 中 $|\overrightarrow{PA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$，$\angle APB$ 三者均为变量，因此不宜使用定义法求解。不过 $|\overrightarrow{CA}|$，$|\overrightarrow{CA}|$ 是定值，$\angle PCA$ 与 $\angle PCB$ 相差 $\frac{\pi}{2}$，可借助平面向量基本定理，将 $\overrightarrow{PA}$ 用 $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CP}$ 表示，将 $\overrightarrow{PB}$ 用 $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}$ 表示，再借助数量积定义和三角函数求得最值。

解析 如图 3 所示，设 $\angle PCA=\theta$，则 $\angle PCB=\theta-\frac{\pi}{2}$。由题意可得：$|\overrightarrow{CP}|=1$，$|\overrightarrow{CA}|=3$，$|\overrightarrow{CB}|=4$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}\right)\\&=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}^2\\&=-3\cos\theta-4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+1\\&=1-\left(4\sin\theta+3\cos\theta\right)\\&=1-5\sin\left(\theta+\varphi\right).\end{aligned}$$

其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$，因此 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-4,6]$。

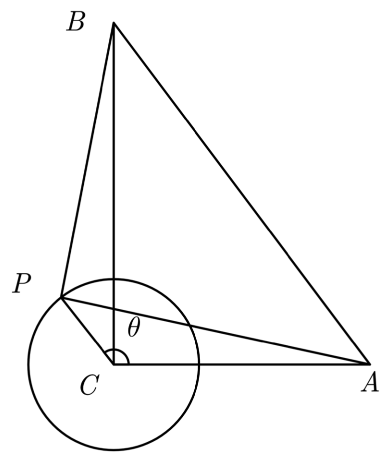

Figure 3. Example analysis diagram of base vector method
图 3. 基底法例题解析示意图

2.4. 极化恒等式法

在 $\triangle ABC$ 中，取 D 为 AB 的中点，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}\right)\\&=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{DB}^2\\&=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2.\end{aligned}$$

得到极化恒等式公式。只要两共起点向量的终点为定点，它们终点的中点一定为定点，同时两向量终点间的距离也为定长，这时用极化恒等式法解决向量数量积问题比较简便，即将共起点向量数量积问题转化为线段的长度问题，便于进一步分析与求解。对于一些综合问题，没有直接给出向量的模长和夹角，也没有办法表示出向量的坐标时，可以尝试使用极化恒等式法来解决平面向量数量积问题。下面，用极化恒等式法分析并解析例 2。

分析 例 2 的 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 中，两向量的起点 P 为动点，终点 A，B 是定点，因此 AB 的中点也是定点，$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 是定值，可利用极化恒等式，将 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最值问题转化 $\left|\overrightarrow{PD}\right|$ 的取值范围问题，再进一步运算求出结果。

解析 如图 4 所示，取 AB 的中点 $D\left(\frac{3}{2},2\right)$，则

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left|\overrightarrow{PD}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{PD}\right|^2-\frac{25}{4}.$$

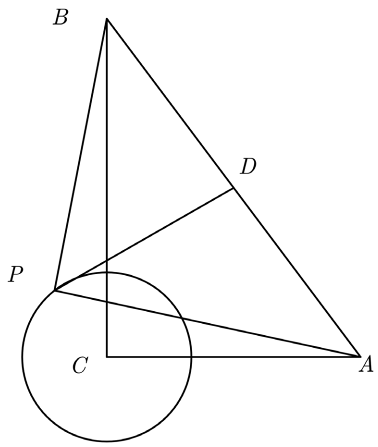

Figure 4. Example analysis diagram of polarization equation method
图 4. 极化恒等式法例题解析示意图

由于点 P 在 $\odot C$ 上，点 D 为 $\odot C$ 外的定点，所以 $\left|CD\right|-r\le\left|PD\right|\le\left|CD\right|+r$，即 $\frac{3}{2}\le\left|PD\right|\le\frac{7}{2}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in\left[-4,6\right]$。

2.5. 投影向量法

通过分析平面向量数量积定义以及几何意义，不难发现，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积。该方法比较适用于 $\boldsymbol{b}$ 已知，而 $\boldsymbol{a}$ 未知，同时可以探索出 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量 $\boldsymbol{c}$，这时可以将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 划归转化为 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$，再进一步分析与求解。对于一些向量与其他知识点结合的综合题目或者向量数量积取值范围问题，无法轻松地找到向量的模长和坐标时，可以尝试使用该方法。下面举例说明投影向量法的应用。

例 3 (2020 年新高考全国卷第 7 题)已知点 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是(　　)

A. $\left(-2,6\right)$　B. $\left(-6,2\right)$　C. $\left(-2,4\right)$　D. $\left(-4,6\right)$

分析 当 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{c}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。本题中 $\overrightarrow{AB}$ 固定，P 点运动，可将 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积转化为 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量 $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积，便于几何法求出其最值。

解析 如图 5 所示，过 P 点向直线 AB 作垂线，设垂足为 H，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$，当 $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 反向时，$\overrightarrow{AH}$ 的最大值为 1，此时 P 与 F 重合，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 取得最小值−2；当 $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向时，$\overrightarrow{AH}$ 的最大值为 3，此时 P 与 C 重合，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 取得最大值 6。

综上，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left(-2,6\right)$。

3. 培养学生数学思维的教学启示

吕松涛认为数学思想是数学知识的本质体现，中学向量教学应采取低起点引入、高观点分析的教学策略，以让学生理解向量的本质，领悟向量的思想，体现向量的教育价值[3]。课堂教学往往以数学知识

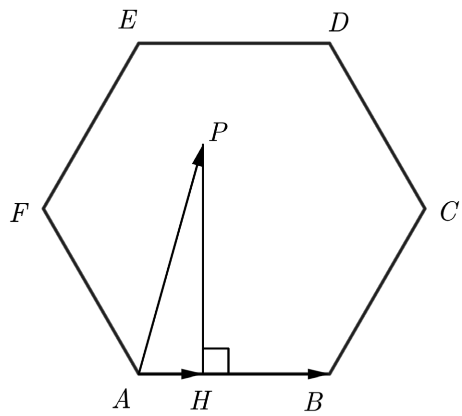

Figure 5. Example analysis diagram of projected vector method
图 5. 投影向量法例题解析示意图

为载体，以探究为手段，通过培养数学思维促进学生核心素养发展[4]。通过探索向量数量积最值问题的解题路径，结合学生心理发展和认知发展的规律，可以总结出以下几点教学启示。

3.1. 丰富数学思维方式，培养学生发散思维

人的思维方式是复杂多样的，为了便于研究，人们常常将思维方式进行分类。按照思维发展水平，将思维的方式分为直观动作思维、具体形象思维和抽象逻辑思维；根据逻辑性的不同，将思维分为直觉思维和分析思维；根据思维指向性的不同，可将思维分为收敛思维和发散思维；根据创新性的不同，可以分为常规思维和创造性思维。

发散思维是指从某一条件出发，从多方面思考，产生出多种答案。这种思维方式是向外发散的，朝着不同的方向进行的，开阔思路有助于产生新思想和新方法[5]。数学课堂教学中应摆脱惯常思维，加强数学内容间的联系，培养综合化解题思路，探究结构不良的开放式问题，拓展学生的思维空间[6]。在探究数学问题时，教师要积极引导学生向外思考，鼓励学生表达新思路、探索新方法。例如，在平面向量数量积的运算中，教师可以创设不同的向量数量积问题情境，引导学生总结出多样的解决方法，如公式法、坐标法、基底法、极化恒等式法和投影法等，同时分析各种方法的适用情境和优缺点，并强化每种方法的易错点。并且向学生不断追问，启发学生思考，培养学生的数学思维能力。

3.2. 重视数学思维品质，提高学生数学思维的灵活性

数学思维品质是评价学生数学思维的重要标志。数学思维的品质主要包括：广阔性、深刻性、敏捷性、灵活性、独创性、批判性、概括性和间接性。殷木森认为在日常教学中要选择恰当的问题载体，在思考、分析与解决问题的过程中有意识地培养学生的数学思维，逐渐提升学生的数学思维品质[7]。各种思维品质都会影响学生的思考、分析和解题过程，向量数量积最值问题的解决路径多样，解析向量最值问题最需要的思维品质是灵活性。

数学思维的灵活性是指思维活动的灵活程度，对具体问题做具体分析，根据问题的特征，灵活运用相关知识，使用简单、优异的方法，顺利地解决问题。在向量数量积的教与学中，教师要引导学生总结出不同方法的适用情况，根据不同的问题情境，灵活运用数形结合思想和划归与转化思想，寻找解题突破口，采用恰当而优异的解法。打破传统的解题“套路”，超脱公式法这一种习惯解法的束缚，实现“一题多解”“一题多变”，要求教师要做到“教无定法”，学生要实现“学无定法”。审题时注意多元表征已知条件和发掘隐藏条件，解题时注意数形结合、划归与转化和分类讨论，回顾时要注意总结、检查

和方法迁移。

3.3. 关注学生数学思维发展特点，助力学生全面发展

中学生的思维具有较强的可塑性，由直观思维向抽象思维过过渡，具有跳跃性和螺旋性，历史性和共识性等特点。对于不同的数学知识和思想方法，中学生具有不同的思维方式和水平。因此，中学教师在培养学生数学思维能力过程中，要遵循科学性原则、严谨性原则和量力性原则，做到循循善诱，因材施教，因题施教。根据学生数学思维发展的特点，教师的教学目标要恰当、具体，教学过程要逻辑严谨、思路清晰，教学内容要严谨得当、层层递进。根据学生认知结构的特点，在数学教学实践中，可以采用灵活性高和综合性强的题组，帮助学生合理重组知识，不仅可以提高学生对知识的理解和应用水平，而且可以提升学生的思维水平[8]。总之，要有计划、有目的地培养学生的数理逻辑思维。如在平面向量数量积的解题方法探究中，教师应先讲解定义法，当学生已经理解平面向量数量积的定义并会运用定义法解题后，再介绍坐标法和基底法，当学生能够熟练掌握这三种基本解法后，最后再和学生探讨极化恒等式法和投影法这两种综合方法。

数学思维是客观世界中纯粹的量的本质属性，以“纯粹的量”的形式反映事物的本质和事物之间的规律关系。因此，正确培养学生数学思维能力，可促进学生养成科学精神，发展数学学科核心素养，提升创新意识，形成正确人生观和价值观，助力学生全面发展。

4. 结语

文章总结提炼了共起点向量数量积最值问题的求解方法，通过多视角探析高中真题，得出培养学生数学思维能力的教学启示，为一线高中教师提供了教学参考。普通高中数学课程标准的基本理念是以学生发展为本，立德树人，提升素养，把握数学本质，启发思考，改进教学，与之对应高考命题的方向是“素养导向，能力为重”。教师在教学过程中，要关注学生数学思维的发展，精心设计教学过程，注重对学生解题思路和过程的训练，要将传授知识技能和培养数学学科核心素养有机结合，使得每一位学生都能具备良好的数学素养。

基金项目

吉林省教育科学“十四五”规划课题“基于核心素养的‘项目式学习’课堂教学模式研究”(GH22763)；吉林师范大学 2022 年度校级教育教学改革研究课题“基于核心素养的高中数学情境化试题设计研究”。

参考文献

[1] 魏智琴. 浅谈平面向量数量积求解的几种途径[J]. 数学学习与研究, 2015(17): 124, 126.

[2] 冯平. 例谈求解平面向量数量积的方法和策略[J]. 数学学习与研究, 2016(20): 133.

[3] 吕松涛, 曹广福. 高中向量教学中数学思想的渗透[J]. 数学教育学报, 2021, 30(4): 19-24.

[4] 沈良. 试论“知识·探究·思维”路径下学生核心素养的培养[J]. 数学通报, 2017, 56(10): 18-22.

[5] 程晓亮, 刘影. 数学教学论[M]. 北京: 北京大学出版, 2013.

[6] 张婷. 生本课堂下高中生数学发散思维的培养研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2022.

[7] 殷木森. 重视问题解决过程 提升数学思维品质[J]. 数学通报, 2023, 62(7): 55-59.

[8] 林国夫. 高中生数学思维能力提升的实践研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2016.