Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(5), 2561-2570**
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135244

Hans汉斯

Bergman空间上一类斜Toeplitz算子的不变子空间

刘朝美，王高鹤

大连交通大学理学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年4月29日；录用日期：2024年5月22日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

本文研究了单位圆盘的Bergman空间上斜Toeplitz算子的不变子空间问题，分别利用m和$p_1, p_2, \cdots, p_n$的奇偶性和大小关系充分描述了Bergman空间的有限维子空间$span\{z^{p_1}, z^{p_2}, \cdots, z^{p_n}\}$是以函数$\varphi(z) = z^m$为符号的斜Toeplitz算子$B_\varphi$及其共轭算子$B_\varphi^*$的不变子空间的充要条件，以及该子空间何时是算子$B_\varphi$的约化子空间，这将有利于对算子$B_\varphi$结构特征的认识。

关键词

Bergman空间，斜Toeplitz算子，不变子空间，约化子空间

Invariant Subspaces of a Class of Slant Toeplitz Operators on the Bergman Space

Chaomei Liu, Gaohe Wang

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 29th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

In this paper we study the problem of invariant subspaces of slant Toeplitz operators on the Bergman space of the unit disk, and respectively describe the necessary and sufficient condition for the finite dimensional subspaces $span\{z^{p_1}, z^{p_2}, \cdots, z^{p_n}\}$ of Bergman space to be invariant subspaces of slant Toeplitz operators B_φ and their conjugate operators B_φ^* with symbol $\varphi(z) = z^m$

文章引用：刘朝美，王高鹤．Bergman 空间上一类斜 Toeplitz 算子的不变子空间[J]．应用数学进展，2024，13(5): 2561-2570. DOI: 10.12677/aam.2024.135244

by utilizing the parity and size relationship of m and $p_1, p_2, \cdots, p_n$, as well as when this subspace is a reducing subspace of the operator B_φ. This will benefit the knowledge of the structural features of the operator B_φ.

Keywords

Bergman Space, Slant Toeplitz Operator, Invariant Subspace, Reducing Subspace

1. 引言

不变子空间问题是线性算子理论中的一个著名问题，该问题研究的是“是否每个无限维的可分 Hilbert 空间上的有界线性算子都有非平凡的不变子空间”。多年来人们利用各种不同方法对该问题进行大量研究，取得众多结果，但距离问题的解决还比较远。1949 年 Beurling [1]通过将移位算子酉等价于 Hardy 空间上的一类特殊乘法算子，利用内函数完整地刻画了移位算子的不变子空间，得到了 Hardy 空间 $H^2(T)$ 的闭子空间 M 是单边移位算子的不变子空间当且仅当该空间 $M=\varphi H^2(T)$，其中 $\varphi \in H^\infty(T)$ 是内函数。Bercovici 等人[2]得到了每个无穷维可分 Hilbert 空间上的不变子空间问题等价于 Bergman 空间上以 z 为符号的乘法算子的不变子空间的万有性问题，这吸引了人们对 Bergman 空间及该空间上算子性质展开了深入研究。

斜 Toeplitz 算子是函数空间上的一类算子，是 Toeplitz 算子的一类推广，由于该类算子的谱和谱半径与小波的光滑性以及一些特殊方程解的性质存在密切联系，所以该类算子吸引了人们的关注。1995 年 Mark [3]给出了单位圆周的 Lebesgue 空间和 Hardy 空间上的斜 Toeplitz 算子，并研究该类算子及其共轭算子的表达式、判别标准、谱和谱半径等性质[3] [4] [5] [6]。Arora 与 Batra 将 Mark 给出的斜 Toeplitz 算子推广为广义斜 Toeplitz 算子，并探讨了广义斜 Toeplitz 算子的若干性质[7] [8] [9]。此后人们又对该类算子的性质展开更为深入研究，并推广到各类空间上，如：Bergman 空间、Dirichlet 空间、Fock 空间以及环面的 Hardy 空间和 Lebesgue 空间等[10]-[27]。鉴于斜 Toeplitz 算子性质的研究，本文主要对 Bergman 空间上斜 Toeplitz 算子的不变子空间和约化子空间问题展开研究。

设 V 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，X 是 H 的一个闭子空间，如果 $VX \subset X$，则称 X 是 V 的不变子空间；如果 $VX \subset X$，$V^*X \subset X$，则称 X 是 V 的约化子空间，其中 V^* 是 V 的共轭算子。

在本文中设 N 和 N_+ 分别表示自然数集和正整数集，D 表示复平面内的单位开圆盘，dA 表示单位圆盘 D 上的正规化面积测度，即 $dA=\frac{1}{\pi}dxdy$。设 $L^2(D,dA)$ 表示 D 上平方可积的复值可测函数全体构成的 Hilbert 空间，其内积为 $\langle f,g\rangle=\int_D f(z)\overline{g(z)}dA(z)$，这里 $f,g \in L^2(D,dA)$。$L^2(D,dA)$ 中所有解析函数构成的闭子空间是 Bergman 空间 $A^2(D)$，既然 $L^2(D,dA)$ 是 Hilbert 空间，所以 Bergman 空间 $A^2(D)$ 也是 Hilbert 空间，且该空间的一组正交基是 $\{z^i\}_{i\in N}$。设 $L^\infty(D)$ 表示在 D 上的所有本性有界函数全体构成的 Banach 空间。

对于 $\varphi \in L^\infty(D)$，Bergman 空间 $A^2(D)$ 上以函数 φ 为符号的斜 Toeplitz 算子定义为 $B_\varphi = WT_\varphi$，其中

W 是 $A^2(D)$ 上的算子：对任意的 $n\in N$，$Wz^{2n}=z^n$，$Wz^{2n+1}=0$；T_φ 是 $A^2(D)$ 上以函数 φ 为符号的 Toeplitz 算子，定义为 $T_\varphi=PM_\varphi$，这里 P 是从 $L^2(D,dA)$ 到 $A^2(D)$ 的投影算子，即对于 $f\in L^2(D,dA)$，

$$P(f)(z)=\int_D f(w)\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}dA(w),\quad z\in D;$$

M_φ 是定义在 $A^2(D)$ 上以函数 φ 为符号的乘法算子：$M_\varphi(f)=\varphi f$，$f\in L^2(D,dA)$。

2. B_φ 的不变子空间

由于 Bergman 空间 $A^2(D)$ 是无穷维的，所以该空间的子空间既有有限维的也有无穷维的。本节主要研究 Bergman 空间 $A^2(D)$ 的有限维子空间是一类斜 Toeplitz 算子 B_φ （$\varphi(z)=z^m$，$m\in N_+$）的不变子空间的充要条件。

既然 $\{z^i\}_{i\in N}$ 是 Bergman 空间 $A^2(D)$ 的正交基，那么 Bergman 空间 $A^2(D)$ 必定具有以下形式的有限维子空间：$span\{z^{p_1},z^{p_2},\cdots,z^{p_n}\}$，其中 n 是正整数，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都是非负整数且 $p_i<p_{i+1}$ （$i=1,2,\cdots,n-1$）。为了讨论方便，这里首先给出以下记号：

$$G_n=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\},\quad N_0^n=\{m+p_i\,|\,1\le i\le n,i\in N\},\quad N_+^2=\{2k\,|\,k\in N\},\quad a=\mathrm{card}\left(N_+^2\cap N_0^n\right),$$

这里 $\mathrm{card}(A)$ 表示集合 A 中元素的个数。记 $A_n=span\{z^{p_1},z^{p_2},\cdots,z^{p_n}\}$，下面根据正整数 n 的取值不同分为三种情况进行分析。

情况 I 如果 A_1 是 B_φ 的不变子空间，那么对任意的 $f\in A_1$，必有 $B_\varphi(f)\in A_1$，从而可得 $B_\varphi(z^{p_1})\in A_1$。由于 $B_\varphi(z^{p_1})=\begin{cases}z^{(m+p_1)/2}, & m+p_1\in N_+^2\\ 0, & m+p_1\notin N_+^2\end{cases}$，所以 $B_\varphi(z^{p_1})=0$ 或者 $B_\varphi(z^{p_1})=z^{(m+p_1)/2}$。如果 $B_\varphi(z^{p_1})=0$，那么可得 $m+p_1\notin N_+^2$。如果 $B_\varphi(z^{p_1})=z^{(m+p_1)/2}$，由于 $B_\varphi(z^{p_1})\in A_1$，且 A_1 是一维的，所以只能有 $z^{(m+p_1)/2}=z^{p_1}$，于是可得 $m=p_1$。

反之当 $m=p_1$ 时，$B_\varphi(z^{p_1})=z^{p_1}$，于是由于 A_1 是由 z^{p_1} 生成的子空间，所以 A_1 是算子 B_φ 的不变子空间。当 $m+p_1\notin N_+^2$ 时，$B_\varphi(z^{p_1})=0$，而 $0\in A_1$，所以 A_1 是算子 B_φ 的不变子空间。

命题 1 线性空间 A_1 是算子 B_φ 的不变子空间当且仅当 $m=p_1$ 或 $m+p_1\notin N_+^2$。

由上述结论可以得到 B_φ 的一维不变子空间有无穷多个，且一维空间 $span\{z^{p_1}\}$ 能否成为算子 B_φ 的不变子空间与该算子的符号函数有关。若 $m\in N_+^2$，则 $span\{z^{p_1}\}$ 是算子 B_φ 的不变子空间当且仅当 $A_1=span\{z^m\}$ 或 $A_1=span\{z^{2i+1}\}$，$i\in N$；若 $m\notin N_+^2$，则 $span\{z^{p_1}\}$ 是算子 B_φ 的不变子空间当且仅当 $A_1=span\{z^m\}$ 或 $A_1=span\{z^{2i}\}$，$i\in N$。

情况 II 如果空间 A_2 是算子 B_φ 的不变子空间，那么对任意的函数 $f\in A_2$，必有 $B_\varphi(f)\in A_2$，从而可得 $B_\varphi(z^{p_i})\in A_2$ （$i=1,2$）。由于 $B_\varphi(z^{p_i})=\begin{cases}z^{(m+p_i)/2}, & m+p_i\in N_+^2\\ 0, & m+p_i\notin N_+^2\end{cases}$，所以 $B_\varphi(z^{p_i})=0$ 或者 $B_\varphi(z^{p_i})=z^{(m+p_i)/2}$ （$i=1,2$）。下面将根据函数 $B_\varphi(z^{p_i})$ （$i=1,2$）的性质分为四种情况进行分析。

如果 $B_\varphi(z^{p_1})=0$，$B_\varphi(z^{p_2})=0$，那么可得 $m+p_1\notin N_+^2$，$m+p_2\notin N_+^2$。

如果 $B_\varphi(z^{p_1})=0$，$B_\varphi(z^{p_2})=z^{(m+p_2)/2}$，那么可得 $m+p_1\notin N_+^2$，$m+p_2\in N_+^2$。又由于 $B_\varphi(z^{p_i})\in A_2$ （$i=1,2$），所以有 $z^{(m+p_2)/2}=z^{p_1}$ 或 $z^{(m+p_2)/2}=z^{p_2}$，于是可得 $m=2p_1-p_2$ 或 $m=p_2$。

如果 $B_\varphi(z^{p_1})=z^{(m+p_1)/2}$，$B_\varphi(z^{p_2})=0$，那么可得 $m+p_1\in N_+^2$，$m+p_2\notin N_+^2$。又由于 $B_\varphi(z^{p_i})\in A_2$

$(i=1,2)$，所以有 $z^{(m+p_1)/2}=z^{p_1}$ 或 $z^{(m+p_1)/2}=z^{p_2}$，于是可得 $m=p_1$ 或 $m=2p_2-p_1$。

如果 $B_\varphi\left(z^{p_1}\right)=z^{(m+p_1)/2}$，$B_\varphi\left(z^{p_2}\right)=z^{(m+p_2)/2}$，那么可得 $m+p_1\in N_+^2$，$m+p_2\in N_+^2$。又由于 $B_\varphi\left(z^{p_i}\right)\in A_2$ $(i=1,2)$，所以只有 $z^{(m+p_1)/2}=z^{p_1}$ 且 $z^{(m+p_2)/2}=z^{p_2}$，于是得 $m=p_1$ 且 $m=p_2$，这与已知条件 $p_1<p_2$ 相矛盾。于是可得 $B_\varphi\left(z^{p_1}\right)\neq 0$，$B_\varphi\left(z^{p_2}\right)\neq 0$ 的情况不成立。

反之，当 $m+p_i\notin N_+^2$ $(i=1,2)$时，$B_\varphi\left(z^{p_i}\right)=0$，而 $0\in A_2$，所以空间 A_2 是算子 B_φ 的不变子空间。当 $m+p_1\notin N_+^2$，$m=2p_1-p_2$ 或 $m=p_2$ 时，$B_\varphi\left(z^{p_1}\right)=0$，$B_\varphi\left(z^{p_2}\right)=z^{p_1}$ 或 $B_\varphi\left(z^{p_2}\right)=z^{p_2}$，且 $A_2=span\left\{z^{p_1},z^{p_2}\right\}$，所以可得 A_2 是算子 B_φ 的不变子空间。当 $m+p_2\notin N_+^2$，$m=p_1$ 或 $m=2p_2-p_1$ 时，那么可得 $B_\varphi\left(z^{p_1}\right)=z^{p_1}$ 或 $B_\varphi\left(z^{p_1}\right)=z^{p_2}$，$B_\varphi\left(z^{p_2}\right)=0$。又由于 $A_2=span\left\{z^{p_1},z^{p_2}\right\}$，所以可得 A_2 是算子 B_φ 的不变子空间。

命题 2 线性空间 A_2 是算子 B_φ 的不变子空间当且仅当以下条件之一成立：

1) $m+p_i\notin N_+^2$，$i=1,2$；

2) $m+p_i\notin N_+^2$，$p_j=2p_l-m$，其中 $i\in\{1,2\}$，$j\in\{1,2\}-\{i\}$ 且 $l\in\{1,2\}$。

根据上述结论显然可以得到 B_φ 的二维不变子空间有无穷多个，且二维空间 $span\left\{z^{p_1},z^{p_2}\right\}$ 是否是算子 B_φ 的不变子空间与该类算子的符号函数有关。

若 $m\in N_+^2$，则 $A_2=span\left\{z^{p_1},z^{p_2}\right\}$ 是算子 B_φ 的不变子空间当且仅当下列条件之一成立：

$A_2=span\left\{z^{2k+1},z^{2l+1}\right\}$，$k,l\in N$，$k<l$；

$A_2=span\left\{z^{2k+1},z^{m}\right\}$，$k\in N$，$k<(m-1)/2$；

$A_2=span\left\{z^{2k+1},z^{4k+2-m}\right\}$，$k\in N$，$k>(m-1)/2$；

$A_2=span\left\{z^{m},z^{2l+1}\right\}$，$l\in N$，$l>(m-1)/2$；

$A_2=span\left\{z^{4l+2-m},z^{2l+1}\right\}$，$l\in N$，$l<(m-1)/2$。

若 $m\notin N_+^2$，则 $A_2=span\left\{z^{p_1},z^{p_2}\right\}$ 是算子 B_φ 的不变子空间当且仅当下列条件之一成立：

$A_2=span\left\{z^{2k},z^{2l}\right\}$，$k,l\in N$，$k<l$；

$A_2=span\left\{z^{2k},z^{m}\right\}$，$k\in N$，$k<m/2$；

$A_2=span\left\{z^{2k},z^{4k-m}\right\}$，$k\in N$，$k>m/2$；

$A_2=span\left\{z^{m},z^{2l}\right\}$，$l\in N$，$l>m/2$；

$A_2=span\left\{z^{4l-m},z^{2l}\right\}$，$l\in N$，$l<m/2$。

情况 III 如果空间 $A_n\ (n\geq 3)$ 是算子 B_φ 的不变子空间，那么对任意的 $f\in A_n$，必有 $B_\varphi(f)\in A_n$，从而可得 $B_\varphi\left(z^{p_i}\right)\in A_n$，$i=1,2,\cdots,n$。由于

$$B_\varphi\left(z^{p_i}\right)=\begin{cases} z^{(m+p_i)/2}, & m+p_i\in N_+^2 \\ 0, & m+p_i\notin N_+^2 \end{cases}, \tag{1}$$

所以对任意满足 $1\leq i\leq n$ 的正整数 i，$B_\varphi\left(z^{p_i}\right)=0$ 或者 $B_\varphi\left(z^{p_i}\right)=z^{(m+p_i)/2}$。下面就函数 $B_\varphi\left(z^{p_i}\right)$ 的取值情况展开讨论。

首先，如果对任意的 $p_s\in G_n$，$B_\varphi\left(z^{p_s}\right)=0$，那么根据(1)式可得 $m+p_s\notin N_+^2$，从而可得 $N_+^2\cap N_0^n=\varnothing$，故 $a=0$。

其次，如果存在唯一的 $p_{i_1}\in G_n$ 使得 $B_\varphi\left(z^{p_{i_1}}\right)\neq 0$，那么根据(1)式可得仅有 $m+p_{i_1}\in N_+^2$，从而可得

$N_+^2 \cap N_0^n = \left\{m + p_{i_1}\right\}$，所以可得 $a=1$。又因为 $B_\varphi\left(z^{p_{i_1}}\right) \in A_n$ 且 $B_\varphi\left(z^{p_{i_1}}\right) = z^{\left(m+p_{i_1}\right)/2}$，所以存在 $p_{t_1} \in G_n$，使得 $z^{\left(m+p_{i_1}\right)/2} = z^{p_{t_1}}$，即 $m = 2p_{t_1} - p_{i_1}$。又由于 $m \ge 1$，所以 $2p_{t_1} - p_{i_1} \ge 1$。

再者，如果仅存在 k 个 $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_k} \in G_n$ 使得 $B_\varphi\left(z^{p_{i_j}}\right) \ne 0$ （$j = 1,2,\cdots,k$），其中 $k \in N_+$ 且 $2 \le k \le n-1$，$p_{i_j} < p_{i_{j+1}}$ （$j = 1,2,\cdots,k-1$），那么根据(1)式可得 $m + p_{i_j} \in N_+^2$ （$j = 1,2,\cdots,k$），即

$$N_+^2 \cap N_0^n = \left\{m + p_{i_1}, m + p_{i_2}, \cdots, m + p_{i_k}\right\},$$

所以 $a = k$。又因为 $B_\varphi\left(z^{p_{i_j}}\right) \in A_n$ （$j = 1,2,\cdots,k$），且 $B_\varphi\left(z^{p_{i_j}}\right) = z^{\left(m+p_{i_j}\right)/2}$，所以存在 $p_{t_1}, p_{t_2}, \cdots, p_{t_a} \in G_n$，使得 $z^{\left(m+p_{i_j}\right)/2} = z^{p_{t_j}}$ （$j = 1,2,3,\cdots,a$），于是可得 $m = 2p_{t_1} - p_{i_1}$，且 $p_{t_c} = p_{t_1} + \frac{1}{2}\left(p_{i_c} - p_{i_1}\right)$，$c \in \{2,3,\cdots,a\}$。又因为 $m \ge 1$，所以 $2p_{t_1} - p_{i_1} \ge 1$。

最后，如果对所有的 $p_s \in G_n$，$B_\varphi\left(z^{p_s}\right) \ne 0$，那么 $m + p_s \in N_+^2$，$p_s \in G_n$，即 $N_+^2 \cap N_0^n = N_0^n$，故 $a = n$。又因为对任意的 $p_s \in G_n$，都有 $B_\varphi\left(z^{p_s}\right) \in A_n$ 且 $B_\varphi\left(z^{p_s}\right) = z^{(m+p_s)/2}$，所以只能有

$$z^{(m+p_1)/2} = z^{p_1}, \quad z^{(m+p_2)/2} = z^{p_2}, \quad \cdots, \quad z^{(m+p_n)/2} = z^{p_n},$$

从而 $m = p_1 = p_2 = \cdots = p_n$，这与已知条件 $p_i < p_{i+1}$ （$i = 1,2,3,\cdots,a-1$）相矛盾，故对所有的 $p_s \in G_n$，$B_\varphi\left(z^{p_s}\right) \ne 0$ 的情况不成立。

反之，如果 $a = 0$，那么对所有的 $p_s \in G_n$，$m + p_s \notin N_+^2$，从而 $B_\varphi\left(z^{p_s}\right) = 0$，而 $0 \in A_n$，所以 A_n 是 B_φ 的不变子空间。如果 $a = 1$，且存在 $p_{i_1}, p_{t_1} \in G_n$ 使得 $m = 2p_{t_1} - p_{i_1}$，那么可得

$$B_\varphi\left(z^{p_{i_1}}\right) = z^{m+p_{i_1}/2} = z^{p_{t_1}}, \quad B_\varphi\left(z^{p_s}\right) = 0 \left(p_s \in G_n - \left\{p_{i_1}\right\}\right),$$

从而可得空间 A_n 是算子 B_φ 的不变子空间。如果 $n-1 \ge a \ge 2$，且存在 $p_{i_j}, p_{t_j} \in G_n$ （$j = 1,2,\cdots,a$）使得 $m = 2p_{t_1} - p_{i_1}$，$p_{t_c} = p_{t_1} + \frac{1}{2}\left(p_{i_c} - p_{i_1}\right)$，$c \in \{2,3,\cdots,a\}$，那么可以得到

$$B_\varphi\left(z^{p_{i_j}}\right) = z^{m+p_{i_j}/2} = z^{p_{t_j}} \quad (j = 1,2,\cdots,a), \quad B_\varphi\left(z^{p_s}\right) = 0 \left(p_s \in G_n - \left\{p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_a}\right\}\right),$$

于是可得 A_n 是算子 B_φ 的不变子空间。

根据上述分析可以得到以下结论。

定理 1 线性空间 $A_n\ (n \ge 3)$ 是算子 B_φ 的不变子空间当且仅当下列条件之一成立：

1) $a = 0$；

2) $a = 1$，且存在 $p_{i_1}, p_{t_1} \in G_n$，使得 $m = 2p_{t_1} - p_{i_1}$；

3) $n-1 \ge a \ge 2$，且存在 $p_{i_j}, p_{t_j} \in G_n$ （$j = 1,2,\cdots,a$），使得

$$m = 2p_{t_1} - p_{i_1}, \quad p_{t_c} = p_{t_1} + \frac{1}{2}\left(p_{i_c} - p_{i_1}\right), \quad c \in \{2,3,\cdots,a\}.$$

3. B_φ^* 的不变子空间

由于斜 Toeplitz 算子 B_φ 与其共轭算子 B_φ^* 之间存在密切联系，所以本节将对 Bergman 空间 $A^2(D)$ 的有限维子空间何时是 B_φ^* （$\varphi(z) = z^m$，$m \in N_+$）的不变子空间问题展开讨论。记 $A_n = span\left\{z^{p_1}, z^{p_2}, \cdots, z^{p_n}\right\}$，其中 n 是正整数，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 都是非负整数且 $p_i < p_{i+1}$ （$i = 1,2,\cdots,n-1$），$b = \mathrm{card}\left\{p_s \mid m \le 2p_s, p_s \in G_n\right\}$，

这里 $\mathrm{card}\{A\}$ 表示集合 $\{A\}$ 中的元素个数。下面根据正整数 n 的取值不同分为三种情况进行分析。

情况 I 如果空间 A_1 是算子 B_φ^* 的不变子空间，那么对任意的函数 $f\in A_1$，必有 $B_\varphi^*(f)\in A_1$，从而可得 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)\in A_1$。又由于 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=\left(WT_\varphi\right)^*\left(z^{p_1}\right)=T_{\bar\varphi}W^*\left(z^{p_1}\right)=T_{\bar\varphi}\left(\dfrac{2p_1+1}{p_1+1}z^{2p_1}\right)=\begin{cases}\dfrac{2p_1-m+1}{p_1+1}z^{2p_1-m}, & m\le 2p_1\\ 0, & m>2p_1\end{cases}$，所以显然可得 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=0$ 或者 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=\dfrac{2p_1-m+1}{p_1+1}z^{2p_1-m}$。如果 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=0$，那么可得 $m>2p_1$。如果 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=\dfrac{2p_1-m+1}{p_1+1}z^{2p_1-m}$，那么 $m\le 2p_1$，并且由于 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)\in A_1$，空间 A_1 是一维的，所以只能有 $z^{2p_1-m}=z^{p_1}$，于是可得 $m=p_1$。

反之，当 $m=p_1$ 时，$B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=z^{p_1}$，又由于 A_1 是由函数 z^{p_1} 生成的子空间，所以 A_1 是算子 B_φ^* 的不变子空间。当 $m>2p_1$ 时，$B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=0$，而常值函数 $0\in A_1$，所以 A_1 是算子 B_φ^* 的不变子空间。

命题 3 线性空间 A_1 是算子 B_φ^* 的不变子空间当且仅当 $m=p_1$ 或 $m>2p_1$。

由上述结论可以得到一维空间 $span\left\{z^{p_1}\right\}$ 是算子 B_φ^* 的不变子空间当且仅当 $A_1=span\left\{z^m\right\}$ 或 $A_1=span\left\{z^i\right\}$，其中 $i\in N$ 且 $i<\dfrac{m}{2}$。

情况 II 如果空间 A_2 是算子 B_φ^* 的不变子空间，那么对任意函数 $f\in A_n$，必有 $B_\varphi^*(f)\in A_n$，从而可得 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)\in A_2$ $(i=1,2)$。由于 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)=\begin{cases}\dfrac{2p_i-m+1}{p_i+1}z^{2p_i-m}, & m\le 2p_i\\ 0, & m>2p_i\end{cases}$，所以可得 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)=\dfrac{2p_i-m+1}{p_i+1}z^{2p_i-m}$ 或 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)=0$ $(i=1,2)$。

如果 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=0$，$B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=0$，那么可得 $m>2p_2$。

如果 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=0$，$B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=\dfrac{2p_2-m+1}{p_2+1}z^{2p_2-m}$，那么可得 $2p_2\ge m>2p_1$。由于 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)\in A_2$ $(i=1,2)$，所以 $z^{2p_2-m}=z^{p_1}$ 或 $z^{2p_2-m}=z^{p_2}$，于是可得 $m=2p_2-p_1$ 或 $m=p_2$。

如果 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=\dfrac{2p_1-m+1}{p_1+1}z^{2p_1-m}$，$B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=0$，那么可得 $m>2p_2$，$m<2p_1$，这与已知条件 $p_1<p_2$ 相矛盾，于是 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=\dfrac{2p_1-m+1}{p_1+1}z^{2p_1-m}$，$B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=0$ 的情况不成立。

如果 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=\dfrac{2p_1-m+1}{p_1+1}z^{2p_1-m}$，$B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=\dfrac{2p_2-m+1}{p_2+1}z^{2p_2-m}$，那么可得 $m\le 2p_1$。由于 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)\in A_2$

$(i=1,2)$，所以只有 $z^{2p_1-m}=z^{p_1}$ 且 $z^{2p_2-m}=z^{p_2}$，于是得 $m=p_1$ 且 $m=p_2$，这与已知条件 $p_1<p_2$ 相矛盾，故 $B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=\dfrac{2p_1-m+1}{p_1+1}z^{2p_1-m}$，$B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=\dfrac{2p_2-m+1}{p_2+1}z^{2p_2-m}$ 的情况不成立。

反之，当 $m>2p_2$ 时，$B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)=0$ $(i=1,2)$，而常值函数 $0\in A_2$，所以空间 A_2 是算子 B_φ^* 的不变子空间。当 $2p_2\ge m>2p_1$，$m=2p_2-p_1$ 或 $m=p_2$ 时，$B_\varphi^*\left(z^{p_1}\right)=0$，$B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=z^{p_1}$ 或 $B_\varphi^*\left(z^{p_2}\right)=z^{p_2}$，所以 A_2 是算子 B_φ^* 的不变子空间。

命题 4 线性空间 A_2 是算子 B_φ^* 的不变子空间当且仅当以下条件之一成立：

1) $m>2p_2$；

2) $2p_2\ge m>2p_1$，且 $m=2p_2-p_1$ 或 $m=p_2$。

由上述结论可以得到二维空间 $span\left\{z^{p_1},z^{p_2}\right\}$ 是算子 B_φ^* 的不变子空间当且仅当下列条件之一成立：

1) $A_2=span\left\{z^{p_1},z^{p_2}\right\}$，$p_1,p_2\in N$ 且 $p_2<\dfrac{m}{2}$；

2) $A_2=span\left\{z^{p_1},z^{\frac{m+p_1}{2}}\right\}$，$p_1\in N$ 且 $p_1<\dfrac{m}{2}$；

3) $A_2=span\left\{z^{p_1},z^{m}\right\}$，$p_1\in N$ 且 $p_1<\dfrac{m}{2}$。

情况 III 如果空间 $A_n\ (n\ge 3)$ 是算子 B_φ^* 的不变子空间，那么对任意的 $f\in A_n$，必有 $B_\varphi^*(f)\in A_n$，从而可得 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)\in A_n$，$i=1,2,\cdots,n$。由于

$$B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)=\begin{cases}\dfrac{2p_i-m+1}{p_i+1}z^{2p_i-m}, & m\le 2p_i\\ 0, & m>2p_i\end{cases},\tag{2}$$

所以对任意满足 $1\le i\le n$ 的正整数 i，$B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)=0$ 或者 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)=\dfrac{2p_i-m+1}{p_i+1}z^{2p_i-m}$。下面就 $B_\varphi^*\left(z^{p_i}\right)$ 的取值情况展开分析。

如果对于所有的 $p_s\in G_n$，$B_\varphi^*\left(z^{p_s}\right)=0$，那么根据(2)式可得 $m>2p_n$，故 $b=0$。

如果仅存在一个 $p_n\in G_n$ 使得 $B_\varphi^*\left(z^{p_n}\right)\ne 0$，那么根据(2)式可得 $2p_{n-1}<m\le 2p_n$，故 $b=1$。又因为 $B_\varphi^*\left(z^{p_n}\right)\in A_n$ 且 $B_\varphi^*\left(z^{p_n}\right)=\dfrac{2p_n-m+1}{p_n+1}z^{2p_n-m}$，所以存在 $p_{d_1}\in G_n$，使得 $z^{2p_n-m}=z^{p_{d_1}}$，即 $m=2p_n-p_{d_1}$。

如果仅存在 k 个元素 $p_n,p_{n-1},\cdots,p_{n-k+1}\in G_n$ 使得 $B_\varphi^*\left(z^{p_j}\right)\ne 0$ $(j=n-k+1,n-k+2,\cdots,n)$，其中 $k\in N$ 且 $n-1\ge k\ge 2$，那么根据(2)式可得 $2p_{n-k}<m\le 2p_{n-k+1}$，故 $b=k$。又因为 $B_\varphi^*\left(z^{p_j}\right)\in A_n$ 且

$$B_\varphi^*\left(z^{p_j}\right)=\frac{2p_j-m+1}{p_j+1}z^{2p_j-m}\quad (j=n-k+1,n-k+2,\cdots,n),$$

所以必定存在 b 个元素 $p_{d_1},p_{d_2},\cdots,p_{d_b}\in G_n$ 使得 $z^{2p_{n-g}-m}=z^{p_{d_{b-g}}}$ $(g=0,1,\cdots,b-1)$，于是可得 $m=2p_n-p_{d_b}$ 且 $p_n-p_{n-g}=\dfrac{1}{2}\left(p_{d_b}-p_{d_{b-g}}\right)$，$g\in\{0,1,2,\cdots,b-1\}$。

最后如果对于所有的 $p_s\in G_n$，$B_\varphi^*\left(z^{p_s}\right)\ne 0$，那么根据(2)式可得 $m\le 2p_1$，故 $b=n$。又因为对任意 $p_s\in G_n$，都有 $B_\varphi^*\left(z^{p_s}\right)\in A_n$ 且 $B_\varphi^*\left(z^{p_s}\right)=\dfrac{2p_s-m+1}{p_s+1}z^{2p_s-m}$，所以只能有

$$z^{2p_1-m}=z^{p_1},\quad z^{2p_2-m}=z^{p_2},\quad \cdots,\quad z^{2p_n-m}=z^{p_n},$$

于是 $m=p_1=p_2=\cdots=p_n$，这与已知条件 $p_i<p_{i+1}$ $(i=1,2,3,\cdots,n-1)$相矛盾，故对所有的 $p_s\in G_n$，$B_\varphi^*\left(z^{p_s}\right)\ne 0$ 的情况不成立。

反之，如果 $b=0$，即 $m>2p_n$，那么可得对任意的 $p_s\in G_n$，$B_\varphi^*\left(z^{p_s}\right)=0$，而常值函数 $0\in A_n$，所以 A_n 是 B_φ^* 的不变子空间。如果 $b=1$，且存在 $p_{d_1}\in G_n$ 使得 $m=2p_n-p_{d_1}$，即 $2p_{n-1}<m\le 2p_n$，那么可得

$B_\varphi^*\left(z^{p_n}\right)=\frac{p_{d_1}+1}{p_n+1}z^{p_{d_1}}$，$B_\varphi^*\left(z^{p_u}\right)=0$ （$p_u\in G_n-\{p_n\}$），所以可得 A_n 是算子 B_φ^* 的不变子空间。若 $n-1\ge b\ge 2$，且存在 b 个元素 $p_{d_h}\in G_n$ （$h=1,2,\cdots,b$）使得 $m=2p_n-p_{d_b}$，$p_n-p_{n-g}=\frac{1}{2}\left(p_{d_b}-p_{d_{b-g}}\right)$ $\left(g\in\{0,1,2,\cdots,b-1\}\right)$，即 $2p_{n-b}<m\le 2p_{n-b+1}$，那么根据(2)式可得

$$B_\varphi^*\left(z^{p_{n-g}}\right)=\frac{p_{b-g}+1}{p_{n-g}+1}z^{p_{b-g}}\ \left(g\in\{0,1,2,\cdots,b-1\}\right),\quad B_\varphi^*\left(z^{p_l}\right)=0,\quad p_l\in G_n-\left\{p_{n-g}\mid g\in\{0,1,2,\cdots,b-1\}\right\},$$

所以可得 A_n 是算子 B_φ^* 的不变子空间。

定理 2 线性空间 $A_n\,(n\ge 3)$ 是算子 B_φ^* 的不变子空间当且仅当以下条件之一成立：

1) $b=0$；

2) $b=1$ 且存在一个元素 $p_{d_1}\in G_n$，使得 $m=2p_n-p_{d_1}$；

3) $n-1\ge b\ge 2$ 且存在 b 个元素 $p_{d_h}\in G_n$ （$h=1,2,\cdots,b$），使得

$$m=2p_n-p_{d_b},\quad p_n-p_{n-g}=\frac{1}{2}\left(p_{d_b}-p_{d_{b-g}}\right),\quad g\in\{0,1,2,\cdots,b-1\}。$$

4. B_φ 的约化子空间

本节中将根据前面 2 部分的讨论进一步分析 Bergman 空间 $A^2(D)$ 的有限维子空间 A_n 何时是斜 Toeplitz 算子 B_φ 和共轭算子 B_φ^* 的不变子空间的问题，即 A_n 何时是算子 B_φ 的约化子空间的问题。首先根据命题 1 和命题 3 以及约化子空间的概念显然可以得到以下结论。

命题 5 线性空间 A_1 是算子 B_φ 的约化子空间当且仅当 $p_1=m$ 或 p_1 与 m 的奇偶性互异且 $p_1<\frac{m}{2}$。

根据命题 2 和命题 4 以及约化子空间的概念可以得到以下结论。

命题 6 线性空间 A_2 是算子 B_φ 的约化子空间当且仅当以下条件之一成立：

1) $m+p_i\notin N_+^2$ （$i=1,2$），$p_2<\frac{m}{2}$；

2) $m+p_1\notin N_+^2$ 且 $p_1<\frac{m}{2}$，$p_2=m$；

3) $m+p_2\notin N_+^2$ 且 $p_1<\frac{m}{2}<p_2$，$2p_2-p_1=m$。

根据定理 1 和定理 2 以及约化子空间的定义可以得到以下结论。

定理 3 线性空间 $A_n\,(n\ge 3)$ 是算子 B_φ 的约化子空间当且仅当下列条件之一成立：

1) $m+p_i\notin N_+^2$ （$i=1,2,\cdots,n$）且 $p_n<\frac{m}{2}$；

2) 存在唯一的 $p_d\in G_n$ 使得 $m+p_d\in N_+^2$，$2p_n-p_d=m$ 且 $p_{n-1}<\frac{m}{2}$；

3) 仅存在 $a\,(n-1\ge a\ge 2,\ a\in N)$ 个元素 $p_{d_i}\in G_n$ （$i=0,1,\cdots,a-1$）使得

$$m+p_{d_i}\in N_+^2\ (i=0,1,2,\cdots,a-1),\quad 2p_n-p_{d_a}=m \text{ 且 } p_n-p_{n-i}=\frac{1}{2}\left(p_{d_a}-p_{d_{a-i}}\right)\ (i=1,2,\cdots,a-1),$$

且 $p_{a-1}<\frac{m}{2}<p_{n-a+1}$。

基金项目

国家自然科学基金项目(No: 11301046)；辽宁省教育厅科学研究经费项目(JDL2019026)。

参考文献

[1] Beurling, A. (1949) On Two Problems Concerning Linear Transformation in Hilbert Spaces. *Acta Mathematica*, **81**, 239-255. https://doi.org/10.1007/BF02395019

[2] Apostol, C., Bercovici, H., Foias, C. and Pearcy, C. (1985) Invariant Subspaces, Dilation Theory, and the Structure of the Predual of a Dual Algebra, I. *Journal of Functional Analysis*, **63**, 369-404. https://doi.org/10.1016/0022-1236(85)90093-X

[3] Ho, M.C. (1996) Properties of Slant Toeplitz Operators. *Indiana University Mathematics Journal*, **45**, 843-862. https://doi.org/10.1512/iumj.1996.45.1973

[4] Ho, M.C. (1997) Spectra of Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbol. *Michigan Mathematical Journal*, **44**, 157-166. https://doi.org/10.1307/mmj/1029005627

[5] Ho, M.C. (1997) Adjoints of Slant Toeplitz Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **29**, 301-312. https://doi.org/10.1007/BF01320703

[6] Ho, M.C. (2001) Adjoints of Slant Toeplitz Operators II. *Integral Equations and Operator Theory*, **41**, 179-188. https://doi.org/10.1007/BF01295304

[7] Arora, S.C. and Batra, R. (2003) On Generalized Slant Toeplitz Operators. *Indian Journal of Mathematics*, **45**, 121-134.

[8] Arora, S.C. and Batra, R. (2004) On Generalized Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbols. *Yokohama Mathematical Journal*, **51**, 1-9.

[9] Arora, S.C. and Batra, R. (2005) Generalized Slant Toeplitz Operators on H^2. *Mathematische Nachrichten*, **278**, 347-355. https://doi.org/10.1002/mana.200310244

[10] Yang, J., Leng, A.P. and Lu, Y.F. (2007) k-Order Slant Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Northeastern Mathematical Journal*, **23**, 403-412.

[11] Lu, Y.F., Liu, C.M. and Yang, J. (2010) Commutativity of k^{th}-Order Slant Toeplitz Operators. *Mathematische Nachrichten*, **283**, 1304-1313. https://doi.org/10.1002/mana.200710100

[12] 章国凤，于涛. Dirichlet 空间上的斜 Toeplitz 算子[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2011, 29(2): 50-55.

[13] 朱洪敏. 单位多圆盘上 Bergman 空间上的 k 阶斜 Toeplitz 算子的一些研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2012.

[14] Liu, C.M. and Lu, Y.F. (2013) Product and Commutativity of k^{th}-Order Slant Toeplitz Operators. *Abstract and Applied Analysis*, **45**, 900-914.

[15] Liu, C.M. and Lu, Y.F. (2013) Product and Commutativity of Slant Toeplitz Operators. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **33**, 122-126.

[16] 刘朝美，倪维丹. Bergman 空间上 k 阶斜 Toeplitz 算子的正规性及亚正规性[J]. 大连交通大学学报，2016，37(1): 113-116.

[17] 刘朝美，高娇娇. 双圆盘的 Bergman 空间上 k 阶斜 Toeplitz 算子的交换性[J]. 大连交通大学学报，2017，38(5): 115-117, 120.

[18] Singh, S.K. and Gupta, A. (2017) k^{th}-Order Slant Toeplitz Operators on the Fock Space. *Advances in Operator Theory*, **2**, 318-333.

[19] Datt, G. and Ohri, N. (2018) Properties of Slant Toeplitz Operators on the Torus. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, **12**, 195-209.

[20] Datt, G. and Ohri, N. (2019) Slant Toeplitz Operators on the Lebesgue Space of the Torus. *Khayyam Journal of Mathematics*, **5**, 65-76.

[21] Datt, G. and Pandey, S.K. (2020) Compression of Slant Toeplitz Operators on the Hardy Space of *n*-Dimensional Torus. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **70**, 997-1018. https://doi.org/10.21136/CMJ.2020.0088-19

[22] Hazarika, M. and Marik, S. (2020) Reducing and Minimal Reducing Subspaces of Slant Toeplitz Operators. *Advances in Operator Theory*, **5**, 336-346. https://doi.org/10.1007/s43036-019-00022-z

[23] 杜巧玲，许安见. Hardy 空间上的斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间[J]. 重庆理工大学学报(自然科学)，2021, 35(8): 224-229.

[24] Pandey, S.K. and Datt, G. (2021) Multivariate Version of Slant Toeplitz Operators on the Lebesgue Space. *Asian-European Journal of Mathematics*, **14**, Article ID: 2150152. https://doi.org/10.1142/S1793557121501527

[25] Hazarika, M. and Marik, S. (2021) Toeplitz and Slant Toeplitz Operators on the Polydisk. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **27**, 73-93. https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2019.02.003

[26] Łanucha, B. and Michalska, M. (2022) Compressions of *k*th-Order Slant Toeplitz Operators to Model Spaces. *Lithuanian Mathematical Journal*, **62**, 69-87. https://doi.org/10.1007/s10986-021-09548-3

[27] 赵彩竹，许安见．单位圆周 Lebesgue 空间的 3 阶斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间[J]．重庆师范大学学报(自然科学版), 2023, 40(4): 117-121.