

# 基于新循环算法的低旁瓣非周期单模序列设计

肖芷诺

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2024年4月29日; 录用日期: 2024年5月22日; 发布日期: 2024年5月31日

## 摘要

针对雷达波形设计中旁瓣过高的问题, 提出了一种基于快速傅里叶变换的新循环算法的单模非周期序列优化方法。首先, 构建了以最小化积分旁瓣水平(integrated-sidelobe-level, ISL)为优化准则, 以单模序列为约束条件的优化问题。由于该优化问题的非凸性, 提出一种基于新循环算法的迭代优化算法对其进行求解。此外, 还在理论上改进其算法的收敛性, 确保它在迭代过程中能稳定地收敛到最优解或局部最优解。仿真实验结果表明, 该方法有效降低非周期单模序列自相关旁瓣, 提高单模非周期序列的优点因子。

## 关键词

快速傅里叶变换, 单模非周期序列, 自相关旁瓣, 优点因子

# Design of Low Sidelobe Aperiodic Unimodular Sequences Based on New Cycling Algorithm

Zhinuo Xiao

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 29<sup>th</sup>, 2024; accepted: May 22<sup>nd</sup>, 2024; published: May 31<sup>st</sup>, 2024

## Abstract

Because of the issue of high sidelobes in radar waveform design, we proposed a new optimization method for unimodular aperiodic sequences based on fast Fourier transform cyclic algorithm. Firstly, an optimization problem is constructed with the minimization of integrated sidelobe level (ISL) as the optimization criterion and single-mode sequences as constraint conditions. Due to the non-convex nature of the optimization problem, a new iterative optimization algorithm based on a new cycling algorithm is proposed to solve it. Furthermore, improvements are being made in the

theoretical convergence of its algorithm, ensuring that it can stably converge to the optimal or local optimal solution during the iterative process. Simulation experiment results show that the method effectively reduces the autocorrelation sidelobes of single-mode non-periodic sequences, and improves the merit factor of single-mode non-periodic sequences.

## Keywords

Fast Fourier Transform, Unimodular Aperiodic Sequences, Autocorrelation Sidelobe, Merit Factor

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

雷达系统中存在干扰、强杂波、多路径等多种因素,信号在进行多目标检测时,会出现微弱目标被掩盖在较强的目标或者强杂波旁瓣中的情况[1]。所以雷达波形设计一般以降低旁瓣电平为主[2]。

在雷达波形设计中,典型的波形有线性调频波形、相位编码波形等,相位编码波形又分为多相编码序列和二相编码序列。多相编码序列也叫做单模序列[3]。常见的单模序列有 Chu 序列、Px 序列、Frank 序列、golomb 序列等[4]。二相编码序列有 m 序列、Gold 序列、Kasami 序列等。对于非周期情况,两类序列都存在自相关旁瓣过高的缺点,但是单模序列 Chu 序列要比 m 序列的自相关旁瓣低,并且单模序列的相位自由度比 m 序列要高,设计性强。在进行雷达探测时,不易被侦察和识别,隐蔽性好。

在不同的主动传感应用中,需要设计具有良好自相关特性的序列。例如,在雷达和声纳系统中使用低自相关峰值旁瓣水平(peak-sidelobe-level, PSL)序列进行距离压缩,可以缓解强回波掩蔽弱目标的旁瓣问题[5] [6]。使用低自相关 ISL 序列可以减少接近感兴趣目标的分布式杂波返回的有害影响[7]。根据使用场景的不同,在许多领域都需要低周期或低非周期自相关旁瓣的序列。所以我们设计的目标是使序列的 ISL 或 PSL 尽可能低。

文献[8]通过代数构造,构造出巴克序列,它具有良好的非周期自相关性,但是长度不超过 13,不适用于实际应用[8]。文献[9]中基于勒让德多项式和旋转构建了勒让德序列[9],并且长度满足特定需求。然而,这些序列的长度并非任意可选,因为它们必须是质数。还有一些其他的构造序列,如鲁丁-夏皮罗序列[10]、雅克布序列[11]、Gold 序列[12]。这些通过构造出来的低旁瓣序列,都存在着长度受限,多样性受限的问题。于是一部分学者通过算法来设计足够长度、多样性的良好非周期自相关序列。如文献[13]中通过穷举搜索最优的序列[13],对于短长度的序列来说,搜索算法比较简便,但是搜索较长的序列,需要花费较多时间。文献[14]提出新循环算法即 CAN 算法,将现有的良好的单模序列进行初始化,经过算法迭代后,能优化该序列。因为使用快速傅里叶变换的方法来优化序列,所以计算效率高,能设计较长长度的序列,复杂度低,实现方便。但 CAN 算法收敛性不能保证,文献[15]中使用 Golomb 序列也存在局限性,长度只能为奇数。不能有效解决序列存在旁瓣过高,会造成微弱目标丢失的问题。

本文针对此问题,选取长度不受限制的单模非周期序列 Chu 序列作为优化对象,提出了基于快速傅里叶变换的新循环算法的单模非周期序列的方法,并改进了算法的收敛性,确保它在迭代过程中能稳定的收敛到最优解或局部最优解。该方法能有效降低单模非周期序列的旁瓣,提高优点因子以及弱目标的分辨能力。

## 2. 单模非周期序列

相位编码信号如下:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N x(n) \sqrt{\frac{1}{t_p}} \text{rect}\left(\frac{t - (n-1)t_p}{t_p}\right), n=1, \dots, N. \quad (1)$$

$\{x(n)\}$  是相位编码序列,  $t_p$  是脉宽。实际传输的波形是由  $s(t)e^{j2\pi f_c t}$  的同相分量和正交分量组成的, 其中  $f_c$  为载波频率。假设信号解调已经在接收端完成, 所以在分析中, 我们就忽略  $e^{j2\pi f_c t}$ 。

为了避免非线性的副作用和最大化传输在系统中可用的功率, 发射的相位编码序列为单模序列或者低峰均功率比的序列。

$$x(n) = \exp(j\phi(n)), n=1, \dots, N \quad (2)$$

式(2)为相位编码序列表达式, 对其施加单位模量约束, 即  $|x(n)|=1$ 。满足这个条件的序列叫做单模序列。那么降低单模非周期序列的旁瓣的问题, 实际上就是以最小化 ISL 为目标函数, 单位模量为约束条件的优化问题。

$\phi(n)$  是相位, 二相编码序列的相位只有  $0$  或  $\pi$  两个取值, 可以用二进制相位序列  $\{\phi(n)=0, \pi\}$  表示, 也可以用二进制序列  $\{x(n)=+1, -1\}$  来代替。如巴克码、m 序列、Gold 序列等; 巴克码副瓣均匀, 具有良好的自相关性, 但是长度限制在 13; Gold 序列长度限制在  $2^{n-1}$ ,  $n$  为整数; m 序列是周期自相关性比较好, 但是缺乏多样性并且非周期自相关性不太好; 多相编码序列的相位是  $[0, 2\pi]$ , 相位范围更大, 设计更具有自由度。如 Frank 序列、Px 序列、Golomb 序列、Chu 序列等。

其中 Chu 序列表达式为

$$x(n) = \begin{cases} \exp\left[jQ\pi \frac{n(n-1)}{N}\right], N \text{ 为奇数,} \\ \exp\left[jQ\pi \frac{n^2}{N}\right], N \text{ 为偶数,} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $Q$  是与  $N$  互素的任意整数。Chu 序列相比于 Golomb 序列和 Frank 序列, 对于长度  $N$  的选择范围更广, 所以在接下来的优化中, 我们选择 Chu 序列作为优化对象。

## 3. 基于快速傅里叶变换的优化旁瓣算法

### 3.1. 优化目标函数

设  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  是长度为  $N$  的非周期离散序列, 其自相关函数如下:

$$r(k) = \sum_{n=k+1}^N x(n)x^*(n-k) = r^*(-k), k=0, \dots, N-1. \quad (4)$$

式(1)中,  $r(0)$  是零时延的自相关函数, 等于信号能量  $N$ , 我们也称作主瓣。除去在零时延处的自相关函数外, 其余的自相关函数, 即  $\{r(k)\}_{k=1}^{N-1}$  称为自相关旁瓣。但是旁瓣峰值过高, 在检测目标时会造成多目标检测的丢失, 以及弱目标的检测性能差等问题。所以我们要尽可能的降低旁瓣, 也就是使  $\{r(k)\}_{k=1}^{N-1}$  尽可能小。

在本文中我们专注于最小化 ISL, 其定义如下:

$$\text{ISL} = \sum_{\substack{k=-(N-1) \\ k \neq 0}}^{N-1} |r(k)|^2 = 2 \sum_{k=1}^{N-1} |r(k)|^2. \quad (5)$$

优点因子(merit factor, MF)与 ISL 成反比, 定义

$$\text{MF} = \frac{|r(0)|^2}{\sum_{\substack{k=-(N-1) \\ k \neq 0}}^{N-1} |r(k)|^2} = \frac{N^2}{\text{ISL}}. \quad (6)$$

根据式(5), 通过最小化 ISL 来设计具有良好自相关特性的序列。根据式(6), 最小化 ISL 就相当于最大化 MF。

为了更好的研究非周期序列的自相关性, 我们用归一化非周期自相关函数来表示

$$\text{NAAF}(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left| \frac{r(k)}{r(0)} \right|, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

### 3.2. 优化旁瓣算法

CAN 算法是专门针对单模非周期序列的 ISL 问题所设计的算法[14]。其核心思想是基于快速傅里叶变换。

首先将时域上的自相关函数转化成频域上的表达, 令

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &\triangleq \left| \sum_n x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} r(k) e^{-j\omega k}, \quad \omega \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (8)$$

那么 ISL 可以写成[15]:

$$\text{ISL} = \frac{1}{2N} \sum_{p=1}^{2N} [\Phi(\omega_p) - N] \quad (9)$$

其中

$$\omega_p = \frac{\pi}{N} p, \quad p = 1, \dots, 2N. \quad (10)$$

则 ISL 的优化问题可以表述为:

$$\begin{aligned} \min_{\{x(n)\}_{n=1}^N} & \sum_{p=1}^{2N} \left( \left| \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j\omega_p n} \right|^2 - N \right)^2 \\ \text{s.t.} & \quad |x(n)| = 1, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)又近似等价于以下二次优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\{x(n)\}_{n=1}^N; \{\psi_p\}_{p=1}^{2N}} & \sum_{p=1}^{2N} \left| \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j\omega_p n} - \sqrt{N} e^{j\psi_p} \right|^2 \\ \text{s.t.} & \quad \psi_p \in [0, 2\pi], \quad p = 1, \dots, 2N, \\ & \quad |x(n)| = 1, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (12)$$

为了简化目标函数, 将式(12)表示

$$\begin{aligned} & \text{成矩阵形式} \quad \left\| \mathbf{A}^H \mathbf{z} - \mathbf{v} \right\|^2 \\ \min_{\{x(n)\}_{n=1}^N; \{\psi_p\}_{p=1}^{2N}} & \\ \text{s.t.} & \quad \psi_p \in [0, 2\pi], \quad p = 1, \dots, 2N, \\ & \quad |x(n)| = 1, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

所以最小化 ISL 问题就转化成当目标函数  $\|A^H z - v\|$  最小时, 求  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  的值的二次函数优化问题。此时的序列  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  就是优化后的序列。

其中

$$\alpha_p^H = [e^{-j\omega_p} \dots e^{-j2N\omega_p}], \quad (14)$$

$$A^H = \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \vdots \\ \alpha_{2N}^H \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$z = [x(1) \dots x(N) \ 0 \dots 0]_{2N \times 1}^T, \quad (16)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{j\psi_1} \dots e^{j\psi_{2N}}]. \quad (17)$$

$A^H$  是  $2N \times 2N$  的离散傅里叶变换半酉矩阵。令  $f = A^H z$ , 则  $f$  是  $z$  的快速傅里叶变换矩阵。  $\psi$  为  $f$  的相位角, 所以有  $\psi_p = \arg(f_p)$ ,  $p = 1, \dots, 2N$ , 计算出  $\{\psi_p\}_{p=1}^{2N}$  的最小值。令  $g = Av$ , 则  $g$  是  $v$  的逆快速傅里叶变换。因为  $\|A^H z - v\|^2 = \|z - Av\|^2 = \|z - g\|^2$ , 所以有  $x(n) = e^{j\arg(g_n)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , 可以通过该式计算序列的最小值  $\{x(n)\}_{n=1}^N$ 。

### 3.3. 改进后的优化旁瓣算法

CAN 算法是通过交替优化  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  和  $v$  来求解式(13)。文献[15]中结束迭代的条件是满足  $\|X^{i+1} - X^i\| < \xi$ ,  $X^i$  是第  $i$  次迭代后生成的序列,  $\xi$  是一个事先设置好的阈值。如  $10^{-3}$ 。然而, 优化变量  $X^i$  的收敛性在理论上不能保证。我们的目标是最小化 ISL, 目标函数是  $\|A^H z - v\|$ 。如果使用  $\|X^{i+1} - X^i\| < \xi$  作为终止标准, 则目标函数可能在满足所述终止标准之前就已经停止改变。所以我们将目标函数作为迭代结束的条件。接下来是证明其收敛性。

令  $g = Av$ ,  $z^i = [x^i(1) \dots x^i(N) \ 0 \dots 0]_{2N \times 1}^T$ ,  $D_i$  表示在  $i$  次迭代时  $\|A^H z^i - v^i\|^2$  的值, 我们有

$$\begin{aligned} D_i &= \|A^H z^i - v^i\|^2 \geq \|A^H z^i - v^{i+1}\|^2 \\ &\geq \|A^H z^{i+1} - v^{i+1}\|^2 = D_{i+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

计算  $D_i$  就是计算  $\|z^i - g^i\|$ 。由于  $g^i$  在第  $i$  次迭代中已经储存。  $D_i$  是一个二范数, 计算复杂度与  $\|X^{i+1} - X^i\|$  一样。以  $|D_i - D_{i-1}| < \xi$  作为终止准则, 符合优化问题的目标(即降低目标函数的值), 理论上保证了  $D_i$  的单调减小并且计算复杂度保持与原 CAN 算法不变。改进后的 CAN 算法步骤如下:

---

#### 改进后 CAN 算法

---

初始化: 将  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  设置为随机初始值 (例如  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  设置为  $e^{j\theta(n)}$ , 其中  $\{\theta(n)\}$  是均匀分布在  $[0, 2\pi]$  中的独立随机变量, 或者  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  可以由一个良好的现有序列初始化, 如 Golomb 序列、Chu 序列等。

1: 固定第  $i-1$  次迭代的  $\{x(n)\}_{n=1}^N$ , 通过最小化  $\|A^H z^{i-1} - v^i\|^2$  来计算  $\{\psi_p\}_{p=1}^{2N}$  的值。

2: 在约束条件  $|x(n)| = 1$  下, 当  $\{\psi_p\}_{p=1}^{2N}$  不变时, 通过最小  $\|A^H z - v\|^2 = \|z - Av\|^2$  来计算第  $i$  次  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  的值。

迭代: 重复步骤 1 和 2, 直到满足  $|D_i - D_{i-1}| < \xi$  停止。否则更新次数令  $i = i + 1$ , 继续进行迭代。

输出:  $\{x(n)\}_{n=1}^N$  的值。

---

## 4. 数值结果与分析

### 4.1. 初始序列的选择

从图 1 可以看出, Chu 序列的自相关函数旁瓣总体比 m 序列的自相关旁瓣要低很多, 但是未被优化的 Chu 序列两端的旁瓣峰值距离主瓣的旁瓣也很高, 很容易导致在目标检测时, 相邻的目标不能被分辨以及小目标被掩盖在大目标下的问题[3]。所以我们选择对 Chu 序列进行优化, 来降低其自相关旁瓣。

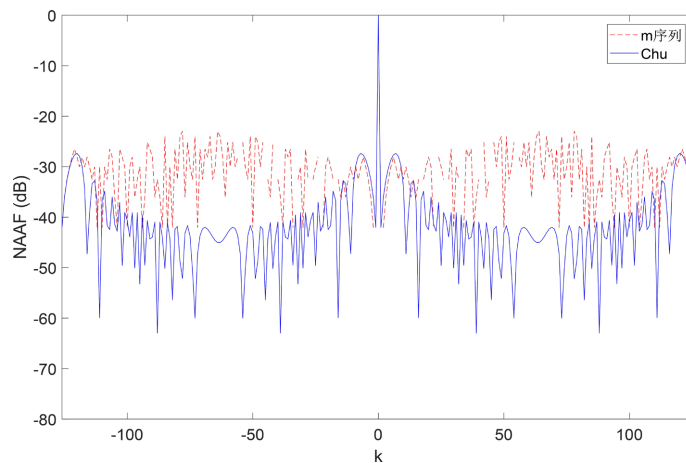


Figure 1. The normalized aperiodic auto-correlation function  
图 1. 归一化非周期自相关函数

### 4.2. 对 Chu 序列用改进后的 CAN 算法进行优化

图 2 是长度为 127 的 Chu 序列和经过 CAN 算法优化后的 Chu 序列的 NAAF, 根据前文的公式(4), 当  $k=0$  时,  $r(0)=N$ ,  $\text{NAAF}=20\log_{10}1=0$ 。从图中可以看出  $k$  在零处, 对应为主瓣, 相应的剩下的部分为旁瓣。当  $k$  接近 0 和  $N-1$  时, Chu 序列的自相关旁瓣比起其他旁瓣都要高, 称作峰值旁瓣。经过 CAN 算法优化后的 Chu 序列在接近 0 和  $N-1$  时, 其峰值旁瓣有了很明显的降低。Chu 序列的峰值旁瓣为  $-27.8$  dB, 经过优化后的峰值旁瓣为  $-45.6$  dB。从整体来看, 经过 CAN 算法优化后的 Chu 序列的自相关旁瓣比 Chu 的自相关旁瓣都很大程度的降低了。有些地方的旁瓣都达到了  $-80$  dB 以下。

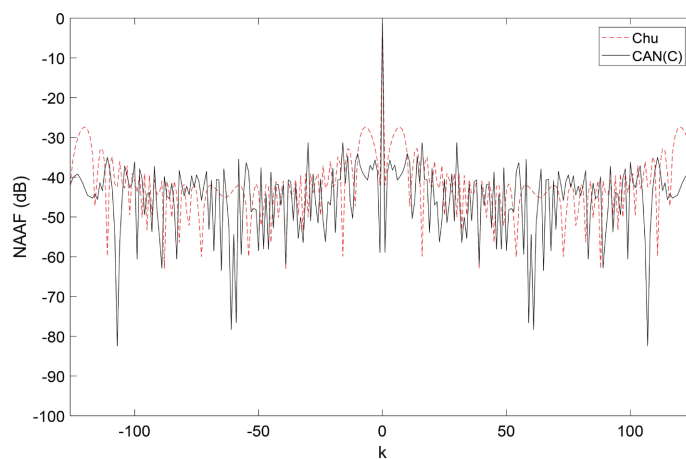


Figure 2. The NAAF of the Chu and CAN(C) sequences  
图 2. 优化序列后的归一化非周期自相关函数

验证了改进后的 CAN 算法能够优化已有良好非周期单模序列的旁瓣。接下来用 MF 数值来进一步验证改进后的 CAN 算法能降低其旁瓣。

### 4.3. 优点因子比较

从图 3 可以很清晰的看出经过 CAN 算法优化 Chu 序列的优点因子比 m 序列、Chu 序列、随机相位序列都要高。所以很容易观察到，CAN(C)序列比 m 序列或随机相位序列提供了更低的相关性旁瓣。随着长度的增加，优点因子也在不断的增加。在长度为  $2^5 - 1$  的 Chu 序列和 CAN(C)序列的优点因子非常接近。通过表 1，当长度为  $2^{13} - 1$  时，CAN(C)的优点因子为 1431.5，而未经优化的 Chu 序列的优点因子为 142.15。在优点因子方面，CAN 算法可以将优点因子提升了将近十倍。

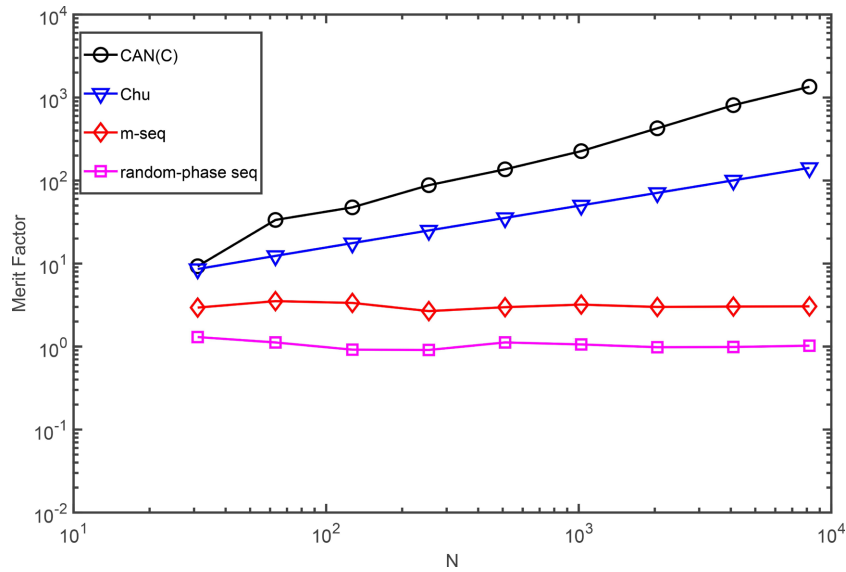


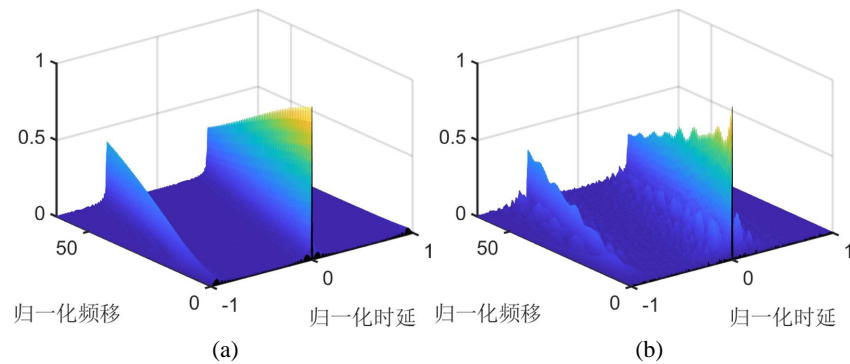
Figure 3. The merit factors of four types of sequences  
图 3. 四种序列的优点因子

Table 1. Merit factor  
表 1. 优点因子

序列长度	$2^5 - 1$	$2^6 - 1$	$2^7 - 1$	$2^8 - 1$	$2^9 - 1$	$2^{10} - 1$	$2^{11} - 1$	$2^{12} - 1$	$2^{13} - 1$
MF Chu	8.59	12.36	17.62	25.03	35.47	50.21	71.05	100.50	142.15
MF CAN(C)	9.3	33.5	47.5	87.9	136.6	226	426	809.3	1431.5
MF m 序列	2.94	3.52	3.35	2.67	2.98	3.20	2.99	3.03	3.04
MF 随机 相位序列	1.23	0.81	1.45	1.00	0.95	0.99	0.96	0.95	0.97

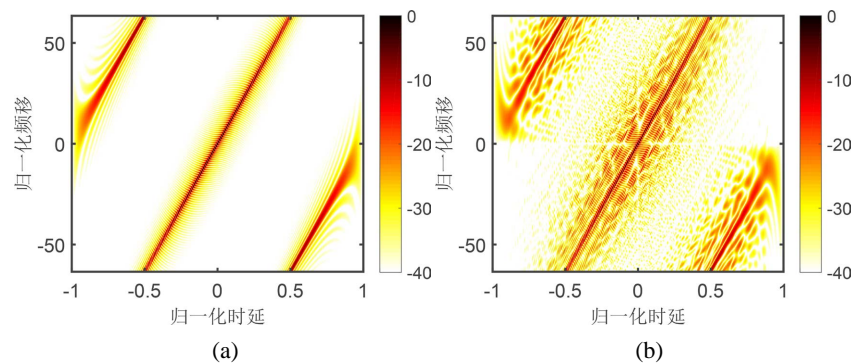
### 4.4. 模糊函数对比

前文所提出的 CAN 算法能够降低 Chu 序列的自相关旁瓣，解决被旁瓣掩盖的弱目标问题。但是只考虑了固定目标，在实践中更多的是移动目标，所以在进行波形设计时，还要考虑多普勒频移问题。模糊函数是时延和多普勒频移的相关函数，其零多普勒切割就是序列的自相关函数。所以模糊函数可以看作是序列自相关函数的二维拓展。



**Figure 4.** Ambiguity function. (a) The AF of a length-127 Chu sequence; (b) The AF of a length-127 CAN(C) sequence

**图 4.** 模糊函数。(a) 长度 127 的 Chu 序列模糊函数；(b) 长度 127 的 CAN(C) 序列模糊函数



**Figure 5.** 2D-Ambiguity function. (a) The AF of a length-127 Chu sequence; (b) The AF of a length-127 CAN(C) sequence

**图 5.** 2D 模糊函数。(a) Chu 序列的 2D 模糊函数；(b) CAN(C) 序列的 2D 模糊函数

图 4(a) 是长度为 127 的 Chu 序列的模糊函数图，图 4(b) 是相同长度下用 Chu 序列进行优化后的序列模糊函数图。可以看出呈斜刃状，周围的相关旁瓣都有所降低。图 5 是 2D 的模糊函数图，用颜色的深浅来表示能量的高低。从图 5 中可以看出相比于未进行优化前的 Chu 序列，无论是主瓣还是旁瓣，它们的能量都较之前更为分散了，由密集的斜刃峰值变成了稀疏的斜刃峰值，也在一定程度上降低了旁瓣，验证了 CAN 算法的有效性。

## 5. 结论

提出了基于快速傅里叶变换的算法优化方法，并改进了算法的收敛性。改进后能优化现有的单模序列 Chu 序列，通过数值实验，发现经过优化后的 Chu 序列能够获得更高的优点因子，达到了优化的目的。最后的模糊函数图也进一步表明，由该算法优化后的序列，能获得较低的旁瓣，在一体化波形设计时，可以考虑使用其优化后的序列。

## 参考文献

- [1] 赵金珊, 全英汇, 刘代军, 张瑞, 邢孟道. 基于遗传算法的 OFDM 雷达低旁瓣波形优化设计[J]. 航空兵器, 2021, 28(5): 76-80.
- [2] 王佳欢, 范平志, 时巧, 等. 一种具有多普勒容忍性的通感一体化波形设计[J]. 雷达学报, 2023, 12(2): 275-286.



- 
- [3] 冯日博, 冯西安, 谭伟杰, 祝朝晖. 基于新循环算法的多相编码波形优化[J]. 探测与控制学报, 2015, 37(1): 11-15.
- [4] Pishrow, M.M. and Abouei, J. (2023) A Sequential Constraint Relaxation Framework to Design Phase-Coded Sequences for Radar Systems. *Digital Signal Processing*, **136**, 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.103985>
- [5] Stimson, G.W. (1998) Introduction to Airborne Radar. SciTech Publishing, New York City. <https://doi.org/10.1049/SBRA101E>
- [6] Yu, G.Y. and Liang, J.L. (2018) Sequence Set Design with Accurately Controlled Correlation Properties. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **54**, 3023-3046. <https://doi.org/10.1109/TAES.2018.2836778>
- [7] Nunn, C.J. and Coxson, G.E. (2008) Best-Known Autocorrelation Peak Sidelobe Levels for Binary Codes of Length 71 to 105. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **44**, 392-395. <https://doi.org/10.1109/TAES.2008.4517015>
- [8] Jedwab, J. (2004) A Survey of the Merit Factor Problem for Binary Sequences. *SEquences and Their Applications*, Korea, 24-28 October 2004, 30-55. [https://doi.org/10.1007/11423461\\_2](https://doi.org/10.1007/11423461_2)
- [9] Golay, M. (1983) The Merit Factor of Legendre Sequences (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, **29**, 934-936. <https://doi.org/10.1109/TIT.1983.1056744>
- [10] Rudin, W. (1959) Some Theorems on Fourier Coefficients. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **10**, 855-859. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1959-0116184-5>
- [11] Jensen, J.M., Jensen, H.E. and Hoholdt, T. (1991) The Merit Factor of Binary Sequences Related to Difference Sets. *IEEE Transactions on Information Theory*, **37**, 617-626. <https://doi.org/10.1109/18.79917>
- [12] Gold, R. (1967) Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing(corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, **13**, 619-621. <https://doi.org/10.1109/TIT.1967.1054048>
- [13] Mow, W.H., et al. (2015) New Evolutionary Search for Long Low Autocorrelation Binary Sequences. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **51**, 290-303. <https://doi.org/10.1109/TAES.2014.130518>
- [14] Stoica, P., He, H. and Li, J. (2009) New Algorithms for Designing Unimodular Sequences with Good Correlation Properties. *IEEE Trans. Signal Processing*, **57**, 1415-1425. <https://doi.org/10.1109/TSP.2009.2012562>
- [15] He, H., Li, J. and Stoica, P. (2012) Waveform Design for Active Sensing Systems: A Computational Approach. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139095174>