Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(5), 2331-2341**
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135220

Hans汉斯

三维不可压MHD方程在变指数Lebesgue空间中的适定性

陈　浩，赵继红*

宝鸡文理学院数学与信息科学学院，陕西　宝鸡

收稿日期：2024年4月29日；录用日期：2024年5月22日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

该文主要考虑了三维不可压MHD方程在变指数Lebesgue空间中的适定性。通过克服变指数Lebesgue空间与经典的Lebesgue空间不同所带来的困难，建立了三维不可压MHD方程在空间 $\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^3, L^\infty(0,\infty)\right)$ 中小初值问题的整体适定性，并在空间 $L^{p(\cdot)}\left([0,T], L^q\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ 中证明了大初值问题的局部适定性。

关键词

MHD方程，变指数Lebesgue空间，适定性

Well-Posedness for 3D Incompressible MHD Equations in Lebesgue Spaces with Variable Exponents

Hao Chen, Jihong Zhao*

School of Mathematics and Information Science, Baoji University Arts and Sciences, Baoji Shaanxi

Received: Apr. 29th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

In this paper, we are mainly concerned with the well-posedness of the 3D incompressible MHD equations in Lebesgue spaces with variable exponents. By overcoming some difficulties caused by the differences between the Lebesgue spaces with variable exponents and the usual one, we establish,

*通讯作者。

文章引用: 陈浩, 赵继红. 三维不可压 MHD 方程在变指数 Lebesgue 空间中的适定性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2331-2341. DOI: 10.12677/aam.2024.135220

for the 3D incompressible MHD equations, the global well-posedness in space $\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^3, L^\infty(0,\infty)\right)$ with small initial data, and the local well-posedness in $L^{p(\cdot)}\left([0,T], L^q\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ with general initial data.

Keywords

MHD Equations, Lebesgue Spaces with Variable Exponents, Well-Posedness

1. 引言

本文我们将研究磁流体动力学(Magneto-hydrodynamics)的基本方程，即MHfD方程，它是流体力学中的不可压的Navier-Stokes方程和电动力学中的Maxwell方程的耦合，其初值问题具体形式如下：

$$\begin{cases}\partial_t u+(u\cdot\nabla)u-\nu\Delta u+\nabla P=(b\cdot\nabla)b,\\ \partial_t b+(u\cdot\nabla)b-\mu\Delta b=(b\cdot\nabla)u,\\ \nabla\cdot u=0,\ \nabla\cdot b=0,\\ u(x,0)=u_0(x), b(x,0)=b_0(x).\end{cases} \tag{1.1}$$

这里未知函数 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 和 $b=(b_1,b_2,b_3)$ 分别表示流体的速度场和磁场， $P=p+\frac{1}{2}|b|^2$ 表示压力，u_0 和 b_0 是给定的满足条件 $\nabla\cdot u_0=0$ 和 $\nabla\cdot b_0=0$ 的初值。ν 和 μ 分别表示流体的粘性系数和磁场耗散系数，由于它们的具体取值不影响本文的主要结果，所以为简单起见，我们假设 $\nu=\mu=1$。

注意到，若在方程(1.1)中我们不考虑磁场，即 $b=0$，则方程(1.1)约化为下述经典的不可压 Navier-Stokes (NS)方程：

$$\begin{cases}\partial_t u+(u\cdot\nabla)u-\nu\Delta u+\nabla P=0,\\ \nabla\cdot u=0,\\ u(x,0)=u_0(x).\end{cases} \tag{1.2}$$

在其开创性工作中，Leray [1]证明了对任意的初值 $u_0\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$，NS 方程(1.2)存在唯一的整体弱解(证明也可见 Hopf [2])

$$u\in L^\infty\left((0,\infty), L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap L^2\left((0,\infty), \dot{H}^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

但众所周知，三维 Leary Hopf [2]弱解的正则性和唯一性还是悬而未决的开问题。另一方面，基于解析半群理论及 NS 方程(1.2)自身满足的 Scaling 不变性，Fujita-Kato [3]证明了 NS 方程(1.2)在临界 Sobolev 空间 $H^{1/2}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 中小初值问题的整体适定性和大初值问题的局部适定性。其后，许多学者建立了 NS 方程(1.2)在各种临界空间中的适定性，例如，Lebesgue 空间 $L^n\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中结果见 Kato [4]和 Giga [5]，Besov 空间 $u_0\in B_{p,\infty}^{-1+3/p}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 中结果见 Cannone [6]和 Planchon [7]，Modulation 空间 $M_{q,\sigma}^s\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中的结果见 Iwabuchi [8]，BMO^{-1} 中的结果见 Koch-Tataru [9]。

对于 MHD 方程(1.1)，Duraut 和 Lions [10]，Sermange 和 Temam [11]分别证明了三维 MHD 方程(1.1)在空间 $H^s\left(\mathbb{R}^3\right)$ ($s\ge 3$)中的局部适定性，并且对任意的 $(u_0,b_0)\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$，其 Leray-Hopf 弱解 (u,b) 也是

整体存在的，且满足如下的能量不等式：

$$\|u\|_{L^2}+\|b\|_{L^2}+2\int_0^t\left(\|\nabla u\|_{L^2}+\|\nabla b\|_{L^2}\right)\mathrm{d}\tau\le\|u_0\|_{L^2}+\|b_0\|_{L^2}. \tag{1.3}$$

类似于三维 NS 方程(1.2)、三维 MHD 方程(1.1)的 Leray-Hopf 弱解的正则性和唯一性也是开问题。随后，MHD 方程(1.1)在各种函数空间中的适定性得到了广泛的研究。Kozono [12]证明了二维 MHD 方程初边值问题整体弱解的存在性及经典解的存在唯一性。Miao 和 Yuan [13]建立了 MHD 方程在 Besov 空间 $\dot{B}^{n/p-1}_{p,r}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ($1\le p<\infty$，$1\le r\le\infty$)中小初值问题的整体适定性和大初值的局部适定性。Liu 和 Cui [14]研究了 MHD 方程在 Modulation 空间 $M^s_{q,\sigma}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中的适定性。Miao，Yuan 和 Zhang [15]建立了方程(1.1)在空间 BMO-1 中小初值问题的整体适定性以及空间 VMO-1 中的局部适定性。有关 MHD 方程及广义 MHD 方程更多的适定性结果见文献[16]-[21]。

最近，Chamorro 和 Vergara-Hermosilla [22]研究了三维 NS 方程在变指数 Lebesgue 空间中的适定性。具体来说，他们证明了当初值 u_0 属于混合型变指数 Lebesgue 空间 $\mathcal{L}^{p(\cdot)}_3\left(\mathbb{R}^3\right)$ 时，NS 方程(1.2)存在唯一的整体解；进一步，当初值 u_0 属于次临界 Lebesgue 空间 $L^q\left(\mathbb{R}^3\right)$ 时，作者还证明了解关于时间属于变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}\left([0,T]\right)$ 中的局部存在性。本文主要将上述结果推广至 MHD 方程(1.1)，我们建立了 MHD 方程(1.1)在变指数 Lebesgue 空间 $\mathcal{L}^{p(\cdot)}_3\left(\mathbb{R}^3,L^\infty(0,\infty)\right)$ 中小初值问题解的整体存在性以及在变指数空间 $L^{p(\cdot)}\left([0,T],L^q\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ 中解的局部存在性。

下面我们陈述本文的主要结果，其中出现一些符号的具体含义见第二节。第一个结果是 MHD 方程(1.1)在变指数 Lebesgue 空间中小初值问题的整体适定性。

定理1.1 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^3\right)$，$(u_0,b_0)\in\mathcal{L}^{p(\cdot)}_3\left(\mathbb{R}^3\right)$ 且满足 $\nabla\cdot u_0=0$，$\nabla\cdot b_0=0$。则存在常数 $\eta>0$，使得若初值 $\|u_0\|_{\mathcal{L}^{p(\cdot)}_3}+\|b_0\|_{\mathcal{L}^{p(\cdot)}_3}\le\eta$，MHD方程(1.1)存在唯一的整体解 $(u,b)\in\mathcal{L}^{p(\cdot)}_3\left(\mathbb{R}^3,L^\infty(0,\infty)\right)$。

本文的第二个结果是 MHD 方程(1.1)在变指数 Lebesgue 空间中大初值问题的局部适定性。

定理1.2 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 且满足 $\operatorname*{infess}_{x\in\mathbb{R}^n}\{p(x)\}>2$，并设 $q>3$ 且满足关系式 $2/p(\cdot)+3/q<1$。则对任意的满足条件 $\nabla\cdot u_0=0$，$\nabla\cdot b_0=0$ 的初值 $(u_0,b_0)\in L^q\left(\mathbb{R}^3\right)$，存在 $T>0$ 使得MHD方程(1.1)存在唯一的局部解 $(u,b)\in L^{p(\cdot)}\left([0,T],L^q\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$。

本文的结构安排如下：第 2 节，首先我们通过 Luxemburg 范数给出了变指数 Lebesgue 空间的定义，然后介绍了 Hardy-Littlewood 极大函数及 Riesz 位势在变指数 Lebesgue 空间中的一些有界性结果。第 3 节和第 4 节，我们通过建立 MHD 方程(1.1)在变指数 Lebesgue 空间相应的线性及双线性估计，然后利用 Banach 不动点定理分别给出了定理 1.1 和定理 1.2 的证明。

2. 准备工作

变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}$ 首次出现在 1931 年 Orlicz [23]空间理论中，它与经典 L^p 空间的不同之处在于指数 $p(\cdot)$ 不是一个常数，而是一个从 Ω 到 $[1,\infty]$ 的可测函数。空间 $L^{p(\cdot)}$ 符合 Musielak-Orlicz [24] [25]空间的框架，因此也是半模空间。在 Orlicz 空间理论中，对于 $\lambda>0$，定义空间 L^φ （φ 必须满足某些条件)为满足条件 $\varrho(\lambda u)=\int_\Omega\varphi\left(\lambda|u(x)|\right)\mathrm{d}x<\infty$ 的可测函数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 全体构成的集合。我们首先定义模空间[26] [27]和 Musielak-Orlicz 空间，它为变指数 Lebesgue 空间提供了框架。

定义 2.1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，函数 $\varrho:X\to[0,+\infty]$ 如果满足以下性质，则称为 X 上的半模。

(i) $\varrho(0)=0$；

(ii)对于所有 $x\in X,\lambda\in\mathbb{K}$ 与 $|\lambda|=1$ 有 $\varrho(\lambda x)=\varrho(x)$；

(iii) ϱ 是凸的；

(iv) ϱ 是左连续的；

(v)对所有的 $\lambda>0$， $\varrho(\lambda x)=0$ 意味着 $x=0$。

进一步，若 $\varrho(x)=0$ 蕴含着 $x=0$，则半模 ϱ 称为模。

定义 2.2 若 ϱ 是 X 上的半模或者模，则 $X_\varrho:=\left\{x\in X:\lim\limits_{\lambda\to 0}\varrho(\lambda x)=0\right\}$ 称为半模空间或者模空间。

定义 2.3 设 $\varphi\in\Phi(A,\mu)$，对于所有 $f\in L^0(A,\mu)$， ϱ_φ 由 $\varrho_\varphi(f):=\int\limits_A\varphi(y,|f(y)|)\mathrm{d}\mu(y)$ 给出，则半模空间

$$\left(L^0(A,\mu)\right)_{\varrho_\varphi}=\left\{f\in L^0(A,\mu):\lim_{\lambda\to 0}\varrho_\varphi(\lambda f)=0\right\}=\left\{f\in L^0(A,\mu):\varrho_\varphi(\lambda f)<\infty,\lambda>0\right\}\tag{2.1}$$

被称为 Musielak-Orlicz 空间，通常表示为 $L^\varphi(A,\mu)$ 或者 L^φ。

现在，为定义变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}$，对于可测函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，我们考虑与 $p(\cdot)$ 相关的模函数 $\varrho_{p(\cdot)}$，它由下列表达式给出

$$\varrho_{p(\cdot)}(f)=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x.\tag{2.2}$$

若 $p(\cdot)$ 是常数，则我们得到的就是经典的 Lebesgue 空间，其范数可以由经典 Lebesgue 空间的范数定义，即 $\|f\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$。然而若 $p(\cdot)$ 是可测函数，显然不能简单用 $1/p(\cdot)$ 取代范数中的常指数 $1/p$。为了克服这个困难，我们考虑与模函数 $\varrho_{p(\cdot)}$ 相关的 Luxemburg 范数。

引理 2.4 设 ϱ 是 X 上的半模， X_ϱ 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间，定义

$$\|x\|_\varrho:=\inf\left\{\lambda>0,\varrho(x/\lambda)\le 1\right\}.\tag{2.3}$$

称上述范数为 Luxemburg 范数，并且我们将变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 定义为使上面给出的范数 $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$ 有限的所有可测函数构成的集合。

为了能使一些有效的分析工具能应用于变指数 Lebesgue 空间，我们再做一些假设。对 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，用符号 $\mathcal{P}(\Omega)$ 表示 Ω 上可测函数构成的集合。并对任意的 $p(x)\in\mathcal{P}(\Omega)$，令

$$p^-=\operatorname*{infess}_{x\in\mathbb{R}^n}\{p(x)\},\quad p^+=\inf\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{p(x)\}.$$

为避免一些技术上的困难，本文我们假设

$$1<p^-\le p^+<\infty.$$

在这个条件下我们考虑上述定义的 Luxemburg 范数，则 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 空间具有赋范线性空间的结构和性质，但也呈现出一些新的特性。特别的，为了将 Hardy-Littlewood 极大函数在 L^p $(1<p<\infty)$ 空间中的有界性推广至变指数 Lebesgue 空间，我们还需要引入下面的 Log-Hölder 连续性条件。

定义 2.5 我们定义函数 $p:\Omega\to\mathbb{R}$，若存在 $c_1>0$ 使得对所有 $x,y\in\Omega$，有

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{\log(e+1/|x-y|)},\tag{2.4}$$

则称函数 p 在 Ω 上是局部 Log-Hölder 连续的。同时若存在 $p_\infty\in\mathbb{R}$ 和正常数 c_2 使得对所有 $x\in\Omega$，有

$$|p(x)-p_\infty|\le\frac{C}{\log(e+|x|)},\tag{2.5}$$

则我们称 p 满足 Log-Hölder 衰减条件。我们说 p 在 Ω 上是整体 Log-Hölder 连续的是指它是局部

Log-Hölder 连续，且满足 Log-Hölder 衰减条件。

定义 2.6 定义如下变指数类

$$\mathcal{P}^{\log}(\Omega)=\left\{p(\cdot)\in\mathcal{P}(\Omega)\text{是全局 log-Hölder 连续的}\right\}.$$

下面我们介绍 Hardy-Littlewood 极大函数[28] [29]及 Riesz 位势[28]在空间 $\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上的有界性，我们有以下结果成立：

引理 2.7 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是局部可积函数，$\mathcal{M}$ 是由 $\mathcal{M}(f)(x)=\sup\limits_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y$ 给出的 Hardy-Littlewood 极大函数，其中 B 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开球。若 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^n\right)$，则有

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}}. \tag{2.6}$$

特别的，我们有

$$\left\|\mathcal{R}_j(f)\right\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}}, \tag{2.7}$$

其中 $\mathcal{R}_j$ 是 Riesz 变换，即 $\widehat{\mathcal{R}_j(f)}(\xi)=-\hat{f}(\xi)i\xi/|\xi|$，$1\le j\le n$。

进一步，对于 $0<\sigma<n$，定义 Riesz 位势如下：

$$\mathcal{I}_\sigma(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|/|x-y|^{n-\sigma}\mathrm{d}y. \tag{2.8}$$

若 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^n\right)$，$0<\sigma<n/p^+$，则有

$$\left\|\mathcal{I}_\sigma(f)\right\|_{L^{q(\cdot)}}\le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}},\text{其中}1/q(\cdot)=1/p(\cdot)-\sigma/n. \tag{2.9}$$

由于(2.9)中参数 $p(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 之间的关系是确定的，这并不利于公式的实际应用。为此，我们引入混合变指数 Lebesgue 空间：$\mathcal{L}_r^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^n\right)=L^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^n\right)\cap L^r\left(\mathbb{R}^n\right)$，其中 $1<r<+\infty$，并定义范数如下：

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}_r^{p(\cdot)}}=\max\left\{\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}},\|\cdot\|_{L^r}\right\}. \tag{2.10}$$

在此基础上，文献[30]中证明了以下引理。

引理 2.8 设 $1<r<+\infty$，$p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^n\right)$，$0<\sigma<\min\left\{n/p^+,n/r\right\}$。若 $f\in\mathcal{L}_r^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^n\right)$，则

$$\left\|\mathcal{I}_\sigma(f)\right\|_{L^{\rho(\cdot)}}\le C\|f\|_{\mathcal{L}_r^{p(\cdot)}}, \tag{2.11}$$

其中指标 $\rho(\cdot)$ 满足下列关系式

$$\rho(\cdot)=np(\cdot)/(n-\sigma r). \tag{2.12}$$

我们还需要利用变指数 Lebesgue 空间中的嵌入定理，具体证明见文[31]。

引理 2.9 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界区域，$p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{P}(\Omega)$ 且满足 $1<p_1^+,p_2^+<+\infty$。则 $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)\subset L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ 当且仅当 $p_1(x)\le p_2(x)$，a.e. $x\in\Omega$。并且以下嵌入不等式成立：

$$\|u\|_{L^{p_1(\cdot)}}\le(1+|\Omega|)\|u\|_{L^{p_2(\cdot)}}. \tag{2.13}$$

最后我们介绍证明定理 1.1 和定理 1.2 的 Banach 不动点定理。

定理 2.10 设 $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ 是 Banach 空间。若双线性算子 $B:E\times E\to E$ 有是有界的，即

$$\|B(e,e)\|_E\le C_B\|e\|_E\|e\|_E,$$

则对任意的 $0<\delta<1/(4C_B)$ 及满足 $\|e_0\|_E\le\delta$ 的 $e_0\in E$，方程

$$e=e_0+B(e,e)$$

存在唯一的解 $e\in E$，且满足 $\|e\|_E\le 2\delta$。

3. 定理 1.1 的证明

为消除压力项 P 产生的影响，在方程(1.1)两端同时作用 Leray 投影算子 $\mathbb{P}$，并利用 Duhamel 原理可将方程(1.1)约化为如下等价的积分方程：

$$\begin{cases} u(x,t)=\mathrm{g}_t*u_0(x)-\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\mathbb{P}\left(div(u\otimes u)\right)+\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\mathbb{P}\left(div(b\otimes b)\right), \\ b(x,t)=\mathrm{g}_t*b_0(x)-\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\mathbb{P}\left(div(u\otimes b)\right)+\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\mathbb{P}\left(div(b\otimes u)\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

这里的 $\mathrm{g}_t(x):=\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 表示高斯核。

为应用定理 2.10，对任意的 $0<T\le\infty$，我们取解空间 $E=\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^3,L^\infty(0,T)\right)$，并赋予其上范数为

$$\|\cdot\|_E=\max\left\{\|\cdot\|_{L_x^{p(\cdot)}\left(L_t^\infty\right)},\|\cdot\|_{L_x^3\left(L_t^\infty\right)}\right\}, \tag{3.2}$$

其中 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 且 $1<p^-\le p^+<\infty$。再令

$$B(u,v)=\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\mathbb{P}\left(div(u\otimes v)\right)\mathrm{d}s.$$

则证明定理 1.1，我们需要证明对任意的 $u_0\in\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^3\right)$，$u,v\in E$，有下面的线性及双线性估计成立：

$$\|\mathrm{g}_t*u_0\|_E\le C\|u_0\|_{\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}}, \tag{3.3}$$

$$\left\|\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\mathbb{P}\left(div(u\otimes v)\right)\mathrm{d}s\right\|_E\le C\|u\|_E\|v\|_E. \tag{3.4}$$

接下来我们分别证明估计(3.3)和(3.4)。我们先介绍如下引理，其证明可见文[29]。

引理 3.1 若 φ 是径向递减函数，f 是局部可积函数，则有

$$\left|(\varphi*f)(x)\right|\le\|\varphi\|_{L^1}\mathcal{M}(f)(x), \tag{3.5}$$

其中 $\mathcal{M}$ 是 Hardy-Littlewood 极大函数。

注意到，热核 g_t 关于空间变量是径向递减函数，初值 u_0 是局部可积函数，从而由引理 3.1 可知

$$\|\mathrm{g}_t*u_0\|_{L_t^\infty}\le C\mathcal{M}(u_0)(x).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathrm{g}_t*u_0\|_E&=\max\left\{\|\mathrm{g}_t*u_0\|_{L_x^{p(\cdot)}\left(L_t^\infty\right)},\|\mathrm{g}_t*u_0\|_{L_x^3\left(L_t^\infty\right)}\right\}\\&\le C\max\left\{\|\mathcal{M}(u_0)\|_{L_x^{p(\cdot)}},\|\mathcal{M}(u_0)\|_{L_x^3}\right\}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

进一步，由于 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}\left(\mathbb{R}^3\right)$，由(2.6)可知极大函数 $\mathcal{M}$ 在变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 中是有界的，当然其在 Lebesgue 空间 $L^3\left(\mathbb{R}^3\right)$ 中的有界性是熟知的。因此，

$$\|\mathrm{g}_t*u_0\|_E\le C\max\left\{\|u_0\|_{L_x^{p(\cdot)}},\|u_0\|_{L_x^3}\right\}\le C\|u_0\|_{\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}}. \tag{3.7}$$

这样我们就得到了(3.3)。

下面我们证明(3.4)。首先我们利用 Leray 投影算子的性质，有

$$\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\mathbb{P}\left(div(u\otimes v)\right)\mathrm{d}s=\mathbb{P}\left(\int_0^t \mathrm{g}_{t-s}*\left(div(u\otimes v)\right)\mathrm{d}s\right). \tag{3.8}$$

其次我们利用热核的衰减性质及 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right| &\le C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\left\|\nabla g_{t-s}\left(x-y\right)\right\|u\left(s,y\right)\left\|v\left(s,y\right)\right\|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\frac{1}{\left|t-s\right|^2+\left|x-y\right|^4}\left|u\left(s,y\right)\right|\left|v\left(s,y\right)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{3.9}$$

注意到 $\left|u\left(t,x\right)\right|\le\left\|u\left(\cdot,x\right)\right\|_{L_t^\infty}$，从而

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right| &\le C\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_0^t\frac{1}{\left|t-s\right|^2+\left|x-y\right|^4}\mathrm{d}s\right)\left\|u\left(\cdot,x\right)\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\left(\cdot,x\right)\right\|_{L_t^\infty}\mathrm{d}y \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\left|x-y\right|^2}\left\|u\left(\cdot,x\right)\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\left(\cdot,x\right)\right\|_{L_t^\infty}\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{3.10}$$

由引理 2.8 (取 $\sigma=1$)，有

$$\left|\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right|\le C\mathcal{I}_1\left(\left\|u\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\right\|_{L_t^\infty}\right)\left(x\right).\tag{3.11}$$

回到(3.8)可知

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right)\le C\mathbb{P}\left(\mathcal{I}_1\left(\left\|u\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\right\|_{L_t^\infty}\right)\left(x\right)\right).\tag{3.12}$$

基于 Leray 投影算子 $\mathbb{P}=I_{3\times3}-R\otimes R$ （$R=\left(R_1,R_2,R_3\right)$）及 Riesz 算子 R_j 在 $\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 空间中的有界性(2.7)可得

$$\left\|\mathbb{P}\left(\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right)\right\|_{L_x^{p(\cdot)}\left(L_t^\infty\right)}\le C\left\|\mathcal{I}_1\left(\left\|u\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\right\|_{L_t^\infty}\right)\right\|_{L_x^{p(\cdot)}\left(L_t^\infty\right)},\tag{3.13}$$

$$\left\|\mathbb{P}\left(\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right)\right\|_{L_x^3\left(L_t^\infty\right)}\le C\left\|\mathcal{I}_1\left(\left\|u\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\right\|_{L_t^\infty}\right)\right\|_{L_x^3\left(L_t^\infty\right)}.\tag{3.14}$$

最后我们再次利用引理 2.8 (取 $\sigma=1, r=3/2$)可知：$\left\|\mathcal{I}_1\left(f\right)\right\|_{L^3}\le C\left\|f\right\|_{L^{3/2}}$ 及 $\left\|\mathcal{I}_1\left(f\right)\right\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\left\|f\right\|_{\mathcal{L}_{3/2}^{p(\cdot)/2}}$，并利用 Hölder 不等式，可得

$$\left\|\mathbb{P}\left(\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right)\right\|_{L_x^{p(\cdot)}\left(L_t^\infty\right)}\le C\left\|\left\|u\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\right\|_{L_t^\infty}\right\|_{\mathcal{L}_{3/2}^{p(\cdot)/2}}\le C\left\|u\right\|_{\mathcal{L}_{3,x}^{p(\cdot)}\left(L_t^\infty\right)}\left\|v\right\|_{\mathcal{L}_{3,x}^{p(\cdot)}\left(L_t^\infty\right)},\tag{3.15}$$

$$\left\|\mathbb{P}\left(\int_0^t g_{t-s}*\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right)\right\|_{L_x^3\left(L_t^\infty\right)}\le C\left\|\left\|u\right\|_{L_t^\infty}\left\|v\right\|_{L_t^\infty}\right\|_{L_x^{3/2}}\le C\left\|u\right\|_{L_x^3\left(L_t^\infty\right)}\left\|v\right\|_{L_x^3\left(L_t^\infty\right)}.\tag{3.16}$$

综合上述(3.15)和(3.16)，我们就证明了

$$\left\|\int_0^t g_{t-s}*\mathbb{P}\left(div\left(u\otimes v\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_E\le C\left\|u\right\|_E\left\|v\right\|_E,$$

此即为(3.4)。

基于估计(3.3)和(3.4)，我们可知存在正常数 C_1 和 C_2 使得

$$\left\|\left(u,b\right)\right\|_E\le C_1\left\|\left(u_0,b_0\right)\right\|_{\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}}+C_2\left\|u\right\|_E\left\|v\right\|_E.$$

再由 Banach 不动点定理 2.10 可知只要 $\left\|\left(u_0,b_0\right)\right\|_{\mathcal{L}_3^{p(\cdot)}}\le\frac{1}{4C_1C_2}$，MHD 方程(1.1)存在唯一的解 $\left(u,b\right)\in E$。定理 1.1 得证。

4. 定理 1.2 的证明

在定理 1.2 的假设条件下，我们选取解空间 $E = L^{p(\cdot)}\left([0,T], L^q\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，其中 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}\left((0,+\infty)\right)$，$0 < T < +\infty$ 待定，并且赋予 E 上的范数为：

$$\|f\|_E = \inf\left\{\lambda > 0, \int_0^T \left|\|f(t,\cdot)\|_{L_q} / \lambda\right|^{p(t)} \mathrm{d}t \le 1\right\}. \tag{4.1}$$

类似于定理 1.1 的证明，我们需要建立下面的线性和双线性估计：

$$\|\mathrm{g}_t * u_0\|_E \le C(t)\|u_0\|_{L_x^q}, \tag{4.2}$$

$$\left\|\int_0^t \mathrm{g}_{t-s} * \mathbb{P}\left(div(u\otimes v)\right)\mathrm{d}s\right\|_E \le C(t)\|u\|_E\|v\|_E, \tag{4.3}$$

其中 $C(t)$ 表示依赖于时间变量 t 有关的常数，其具体的依赖关系将在下面给出。

为证明(4.2)和(4.3)。我们先介绍如下引理，其证明可见文[28]。

引理 4.1 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}\left((0,\infty)\right)$，其中 $1 < p^- \le p^+ < \infty$，则有

$$\frac{1}{C}\min\left\{T^{1/p^-}, T^{1/p^+}\right\} \le \|1\|_{L_t^{p(\cdot)}([0,T])} \le C\max\left\{T^{1/p^-}, T^{1/p^+}\right\}. \tag{4.4}$$

下面我们证明(4.2)。首先根据卷积的 Young 不等式可知

$$\|\mathrm{g}_t * u_0\|_{L_x^q} \le \|\mathrm{g}_t\|_{L_x^1}\|u_0\|_{L_x^q} = \|u_0\|_{L_x^q}. \tag{4.5}$$

对(4.5)式两端关于时间变量取 $L^{p(\cdot)}$ 范数，并利用引理 4.1 可知

$$\|\mathrm{g}_t * u_0\|_{L_t^{p(\cdot)}\left(L_x^q\right)} \le C\|1\|_{L_t^{p(\cdot)}([0,t])}\|u_0\|_{L_x^q} \le C\max\left\{T^{1/p^-}, T^{1/p^+}\right\}\|u_0\|_{L_x^q}. \tag{4.6}$$

此即为(4.2)，其中 $C(t) = C\max\left\{T^{1/p^-}, T^{1/p^+}\right\}$。

接下来我们证明(4.3)。再次利用卷积的 Young 不等式可知

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \mathrm{g}_{t-s} * \mathbb{P}\left(div(u\otimes v)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L_x^q} &\le C\int_0^t \left\|\nabla \mathrm{g}_{t-s} * (u\otimes v)\right\|_{L_x^q}\mathrm{d}s \\ &\le C\int_0^t \|\nabla \mathrm{g}_{t-s}\|_{L_x^{q/(q-1)}}\|u\otimes v\|_{L_x^{q/2}}\mathrm{d}s \\ &\le C\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.7}$$

对(4.7)式两端关于时间变量取 $L^{p(\cdot)}$ 范数得

$$\left\|\int_0^t \mathrm{g}_{t-s} * \mathbb{P}\left(div(u\otimes v)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L_t^{p(\cdot)}\left(L_x^q\right)} \le C\left\|\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\mathrm{d}s\right\|_{L_t^{p(\cdot)}([0,T])}.$$

利用范数的共轭定义，有

$$\left\|\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\mathrm{d}s\right\|_{L_t^{p(\cdot)}([0,T])} = \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\int_0^T\int_0^t \frac{|\varphi(t)|}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

这里 $p'(\cdot)$ 是 $p(\cdot)$ 的共轭指标，即满足 $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$。再利用 Fubini 定理可知

$$\left\|\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\mathrm{d}s\right\|_{L_t^{p(\cdot)}([0,T])} = \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\int_0^T\int_0^T \frac{1_{\{0<s<t\}}|\varphi(t)|}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\mathrm{d}t\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\mathrm{d}s. \tag{4.8}$$

为利用引理 2.8，我们将函数 $\varphi(t)$ 在 $t<0$ 和 $t>T$ 上进行零延拓(我们仍用 $\varphi(t)$ 表示延拓之后的函数)，从而(4.8)可重新表示为

$$\begin{aligned}\sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\int_0^T\int_0^T\frac{1_{\{0<s<t\}}|\varphi(t)|}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\mathrm{d}t\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\,\mathrm{d}s &= \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\varphi(t)|}{(t-s)^{1/2+3/(2q)}}\mathrm{d}t\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\,\mathrm{d}s.\\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\int_0^T\mathcal{I}_\sigma(|\varphi|)(s)\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{4.9}$$

其中(4.9)式中的 $\mathcal{I}_\sigma$ 是 1 维的 Riesz 位势，$\sigma=\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}<1$。因此，利用 Hölder 不等式(指标关系为 $\frac{1}{p(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}+\frac{1}{\tilde{p}(\cdot)}=1$)及(2.9)可知

$$\begin{aligned}\sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\int_0^T\mathcal{I}_\sigma(|\varphi|)(s)\|u\|_{L_x^q}\|v\|_{L_x^q}\,\mathrm{d}s &\le C\sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\|\mathcal{I}_\sigma(\varphi)\|_{L_t^{\tilde{p}(\cdot)}}\left\|\|u\|_{L_x^q}\right\|_{L_t^{p(\cdot)}}\left\|\|v\|_{L_x^q}\right\|_{L_t^{p(\cdot)}}\\ &\le C\sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\|\varphi\|_{L_t^{r(\cdot)}}\|u\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}\|v\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)},\end{aligned}\tag{4.10}$$

其中 $\frac{1}{\tilde{p}(\cdot)}=\frac{1}{r(\cdot)}-\frac{\sigma}{n}=\frac{1}{r(\cdot)}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}\right)$。注意到定理 1.2 的假设条件要求 $\frac{2}{p(\cdot)}+\frac{3}{q}<1$，从而由 $\frac{1}{\tilde{p}(\cdot)}=1-\frac{2}{p(\cdot)}$ 及 $\frac{1}{p'(\cdot)}=1-\frac{1}{p(\cdot)}$ 可知 $\frac{2}{\tilde{p}(\cdot)}=\frac{2}{r(\cdot)}-1+\frac{2}{p(\cdot)}+\frac{3}{q}$，这就说明了 $r(\cdot)<p'(\cdot)$。因此我们就可以利用引理 2.9 可得

$$\begin{aligned}\sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}\|\varphi\|_{L_t^{r(\cdot)}}\|u\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}\|v\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)} &\le \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}}\le 1}(1+T)\|\varphi\|_{L_t^{p'(\cdot)}}\|u\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}\|v\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}\\ &\le (1+T)\|u\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}\|v\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

结合(4.7)~(4.11)，我们证明了

$$\left\|\int_0^t g_{t-s}*\mathbb{P}(div(u\otimes v))\mathrm{d}s\right\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}\le(1+T)\|u\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}\|v\|_{L_t^{p(\cdot)}(L_x^q)}.$$

此即为(4.3)，其中 $C(t)=C(1+t)$。

基于估计(4.2)和(4.3)，我们可知存在正常数 C_1 和 C_2 使得

$$\|(u,b)\|_E\le C_1\max\left\{T^{1/p^-},T^{1/p^+}\right\}\|(u_0,b_0)\|_{L_x^q}+C_2(1+T)\|u\|_E\|v\|_E.$$

再由定理 2.10 可知只要取 T 充分小使得

$$\|(u_0,b_0)\|_{L_x^q}\le\frac{1}{4C_1C_2(1+T)\max\left\{T^{1/p^-},T^{1/p^+}\right\}},$$

则 MHD 方程(1.1)存在唯一的局部解 $(u,b)\in E$。定理 1.2 得证。

5. 总结

本文我们证明了定理 1.1 和定理 1.2，主要建立了 MHD 方程组在变指数 Lebesgue 空间中的适定性。由于变指数 Lebesgue 空间在应用于发展方程适定性问题方面局限性较大，在这类空间中最基本的 Young 不等式都不再成立，因此我们引入一类混合变指数 Lebesgue 空间，通过建立奇异积分算子及 Riesz 位势在这类混合变指数 Lebesgue 空间中的有界性，克服了一般变指数 Lebesgue 空间应用于发展方程时遇到的

困难，然后利用 Banach 不动点定理证明了 MHD 方程组在混合变指数 Lebesgue 空间中小初值问题的整体适定性以及一般初值对应的局部适定性。

基金项目

国家自然科学基金(No.11961030)，陕西省自然科学基金(No.2022JM-034)。

参考文献

[1] Leray, J. (1934) Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, **63**, 193-248. https://doi.org/10.1007/BF02547354

[2] Hopf, E. (1950) Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet. *Mathematische Nachrichten*, **4**, 213-231. https://doi.org/10.1002/mana.3210040121

[3] Kato, T. and Fujita, H. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. https://doi.org/10.1007/BF00276188

[4] Kato, T. (1984) Strong L^p-Solutions of the Navier-Stokes Equation in R^m with Applications to Weak Solutions. *Mathematische Zeitschrift*, **187**, 471-480. https://doi.org/10.1007/BF01174182

[5] Giga, Y. (1986) Solutions for Semilinear Parabolic Equations in L^p and Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes System. *Journal of Differential Equations*, **62**, 186-212. https://doi.org/10.1016/0022-0396(86)90096-3

[6] Cannone, M. (1997) A Generalization of a Theorem by Kato on Navier-Stokes Equations. *Revista Matemática Iberoamericana*, **13**, 515-541. https://doi.org/10.4171/rmi/229

[7] Planchon, F. (1996) Global Strong Solutions in Sobolevor Lebesgue Spaces to the Incompressible Navier-Stokes Equations in R^3. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **13**, 319-336. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30107-x

[8] Iwabuchi, T. (2010) Navier-Stokes Equations and Nonlinear Heat Equations in Modulation Spaces with Negative Derivative Indices. *Journal of Differential Equations*, **248**, 1972-2002. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.08.013

[9] Koch, H. and Tataru, D. (2001) Well-Posedness for the Navier-Stokes Equations. *Advances in Mathematics*, **157**, 22-35. https://doi.org/10.1006/aima.2000.1937

[10] Duvaut, G. and Lions, J.L. (1972) Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **46**, 241-279. https://doi.org/10.1007/BF00250512

[11] Sermange, M. and Temam, R. (1983) Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 635-664. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360506

[12] Kozono, H. (1989) Weak and Classical Solutions of the Two-Dimensional Magnetohydrodynamic Equations. *Tohoku Mathematical Journal*, **41**, 471-488. https://doi.org/10.2748/tmj/1178227774

[13] Miao, C. and Yuan, B. (2009) On the Well-Posedness of the Cauchy Problem for an MHD System in Besov Spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **32**, 53-76. https://doi.org/10.1002/mma.1026

[14] Liu, Q. and Cui, S. (2012) Well-Posedness for the Incompressible Magneto-Hydrodynamic System on Modulation Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **389**, 741-753. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.12.015

[15] Miao, C., Yuan, B. and Zhang, B. (2007) Well-Posedness for the Incompressible Magneto-Hydrodynamic System. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **30**, 961-976. https://doi.org/10.1002/mma.820

[16] Liu, Q., Zhao, J. and Cui, S. (2012) Existence and Regularizing Rate Estimates of Solutions to a Generalized Magnetohydrodynamic System in Pseudomeasure Spaces. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **191**, 293-309. https://doi.org/10.1007/s10231-010-0184-8

[17] Liu, Q. and Zhao, J. (2014) Global Well-Posedness for the Generalized Magneto-Hydrodynamic Equations in the Critical Fourier-Herz Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **420**, 1301-1315. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.06.031

[18] Liu, F., Xi, S., Zeng, Z., *et al*. (2022) Global Mild Solutions to Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Equations in Morrey Spaces. *Journal of Differential Equations*, **314**, 752-807. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.12.027

[19] Wang, Y. and Wang, K. (2014) Global Well-Posedness of the Three Dimensional Magnetohydrodynamics Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **17**, 245-251. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.12.002

[20] Tan, Z., Wu, W. and Zhou, J. (2018) Existence and Uniqueness of Mild Solutions to the Magneto-Hydro-Dynamic Equations. *Applied Mathematics Letters*, **77**, 27-34. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.09.013

[21] Wang, S., Ren, Y. and Xu, F. (2018) Analyticity of Mild Solution for the 3D Incompressible Magneto-Hydrodynamics Equations in Critical Spaces. *Acta Mathematica Sinica*, **34**, 1731-1741. https://doi.org/10.1007/s10114-018-8043-4

[22] Chamorro, D. and Vergara-Hermosilla, G. (2023) Lebesgue Spaces with Variable Exponent: Some Applications to the Navier-Stokes Equations. Preprint. https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3365250/v1

[23] Orlicz, W. (1931) Über konjugierte exponentenfolgen. *Studia Mathematica*, **3**, 200-211. https://doi.org/10.4064/sm-3-1-200-211

[24] Musielak, J. (2006) Orlicz Spaces and Modular Spaces. Springer Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0072210

[25] Musielak, J. and Orlicz, W. (1959) On Modular Spaces. *Studia Mathematica*, **18**, 49-65. https://doi.org/10.4064/sm-18-1-49-65

[26] Nakano, H. (1950) Modulared Semi-Ordered Linear Spaces. Maruzen Co., Ltd., Tokyo.

[27] Nakano, H. (1951) Topology and Linear Topological Spaces. Maruzen Co., Ltd., Tokyo.

[28] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., *et al*. (2011) Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8

[29] Grafakos, L. (2008) Classical Fourier Analysis. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09432-8

[30] Chamorro, D. (2022) Mixed Sobolev-Like Inequalities in Lebesgue Spaces of Variable Exponents and in Orlicz Spaces. *Positivity*, **26**, Article No. 5. https://doi.org/10.1007/s11117-022-00882-5

[31] Cruz-Uribe, D.V. and Fiorenza, A. (2013) Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis. Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0548-3