Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 605-617
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145214

外部区域上非线性椭圆问题正解的多解性

王玉芳

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年4月15日；录用日期：2024年5月17日；发布日期：2024年5月31日

摘 要

研究了外部区域上非线性椭圆问题

$$\begin{cases} -\Delta u = q(|x|)f(u), & x \in \Omega, \\ u(x) + \alpha \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & |x| = 1, \\ u(x) \to 0, & |x| \to +\infty \end{cases} \qquad (\mathbf{P})$$

正解的多解性，其中 $\Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$, $N \geq 3$, $\alpha > 0$ 为常数，n 表示 $\partial\Omega$ 上的单位法向量，$f \in C([0, \infty), [0, \infty))$ 且 f 在 0 或 ∞ 处满足不同增长条件。通过运用不动点指数理论获得了问题 $(\mathbf{P})$ 的多解性结果。

关键词

正解，多解性，不动点指数理论，外部区域，椭圆问题

Multiplicity of Positive Solutions for Nonlinear Elliptic Problems in Exterior Domain

Yufang Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 王玉芳. 外部区域上非线性椭圆问题正解的多解性[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 605-617.
DOI: 10.12677/pm.2024.145214

Received: Apr. 15^{th}, 2024; accepted: May 17^{th}, 2024; published: May 31^{st}, 2024

Abstract

We are concerned with the multiplicity of positive solutions for nonlinear elliptic problems in exterior domain

$$\begin{cases} -\Delta u = q(|x|)f(u), & x \in \Omega, \\ u(x) + \alpha \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & |x| = 1, \\ u(x) \to 0, & |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{P}$$

where $\Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$, $N \geq 3$, $\alpha > 0$ is a constant, n denotes the outer unit normal vector on $\partial\Omega$, and $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$ satisfies different growth conditions at zero and infinity. By using fixed point index theory, we obtain the multiplicity of positive solutions for problem (P).

Keywords

Positive Solutions, Multiplicity, Fixed Point Index Theory, Exterior Domain, Elliptic Problem

1. 引言

二阶椭圆边值问题是一类重要的问题, 引起了许多学者的广泛关注 [1–14]该类问题的研究主要集中在有界区域 Ω 上, 参见文献 [1–10]. 当 Ω 为无界区域时, 由于算子的紧性难以保证, 因此结果相对较少, 参见文献 [11–14]. 例如, 2003 年, Stanczy 在文献 [11]中运用锥上的不动点定理研究了外部区域上非线性椭圆问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u), & |x| > 1,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) = 0, & |x| = 1, \\ u(x) \to 0, & |x| \to +\infty \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性.

令 $u(x)=z(|x|), z: R\to R,\ v(t)=((1-t)^{\frac{1}{2-N}}),\ N\geq 3$, 将问题 (1) 转化为边值问题

$$\begin{cases} v''(t)+g(t,(v(t)))=0, & t\in(0,1),\\ v(0)=v(1)=0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $g(t,v(t))=\frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{\frac{2(N-1)}{2-N}}f((1-t)^{\frac{1}{2-N}},v(t))$, 定义集合 $H=\{h\in C(0,1): h>0, \int_0^1 t(1-t)h(t)dt<+\infty\}$. 他得到如下结果:

定理 A 令 $g:(0,1)\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 假设下述条件成立:

(A1) 存在一个正测度集合 $A\subset(0,1)$, 使得对于几乎处处的 $t\in A$ 有

$$\lim_{v\to\infty}\frac{g(t,v)}{v}=\infty;$$

(A2) 存在一个函数 $h(t)\in H$, 使得对于几乎处处的 $t\in(0,1)$ 有

$$\lim_{v\to 0^+}\frac{g(t,v)}{h(t)v}=0;$$

(A3)对 $\forall M>0$, 存在$h_M\in H$, 使得对任意 $0\leq v\leq M$, 都有

$$0\leq g(t,v)\leq h_M,\ \ t\in(0,1),$$

则问题 (2) 至少有一个解.

注意到问题 (1) 仅证明了外部区域上非线性椭圆方程正解的存在性, 并没有得到多解性结果, 并且其边界条件为 Dirichlet 边界条件. 受上述论文启发, 本文将考虑在更广泛的边界条件下问题

$$\begin{cases} -\Delta u=q(|x|)f(u), & x\in\Omega,\\ u(x)+\alpha\frac{\partial u}{\partial n}=0, & |x|=1,\\ u(x)\to 0, & |x|\to+\infty \end{cases} \tag{3}$$

正解的多解性结果, 其中 $\Omega=\{\, x\in\mathbb{R}^N: |x|>1\}$, $N\geq 3$, $\alpha>0$ 为常数, n 表示 $\partial\Omega$ 上的单位法向量, 作以下假设:

(H1) $f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$;

(H2) $\lim\limits_{u\to 0^+}\min\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(u)}{u}=\infty, \lim\limits_{u\to+\infty}\min\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(u)}{u}=\infty$;

(H3) $\lim\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(u)}{u}=0, \lim\limits_{u\to+\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(u)}{u}=0$;

(H4) 存在常数 $m>0$, 使得当 $0\le u\le m, 0\le t\le 1$ 时有 $f(u)\le \eta m$, 其中

$$\eta=(\int_0^1 G(s,s)h(s)ds)^{-1};$$

(H5) 存在常数 $m>0$, 使得当 $M_1 m\le u\le m$ 时, 有 $f(u)\ge\lambda m$, 其中 $\lambda^{-1}=\int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)h(s)ds$, 并且

$$M_1=\min\{\frac{1}{4(1-s)},\frac{\alpha(N-2)}{\alpha(N-2)+s}\};$$

(H6) $q\in C([1,+\infty),[0,+\infty))$ 并且满足

$$\int_1^{+\infty} rq(r)ds<+\infty.$$

则本文主要结果如下:

定理 1 假设条件 (H1)-(H2), (H4), (H6) 成立, 则问题 (3) 至少存在两个正解 u_1 和 u_2 使得

$$0<\|u_1\|<m<\|u_2\|.$$

定理 2 假设条件 (H1), (H3), (H5)-(H6) 成立, 则问题 (3) 至少存在两个正解 u_1 和 u_2 使得

$$0<\|u_1\|<m<\|u_2\|.$$

注 若 $\Omega=[0,1]$, $q=1$ 时, 问题 (3) 的多解性结果被王海燕研究过, 参见文献 [5]. 本文是将文献 [5]结果发展到了外部区域上.

例1 考虑问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\frac{1}{r^3}(u^2+\sqrt{u}), & x\in\Omega, \\ u(x)+\alpha\frac{\partial u}{\partial n}=0, & |x|=1, \\ u(x)\to 0, & |x|\to+\infty \end{cases} \tag{4}$$

的多解性, 其中 $\alpha>0$.

注意到 $q(r)=\frac{1}{r^3}$, $f(u)=\sqrt{u}+u^2$, 显然 $f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$, 且满足

$$\lim_{u\to 0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(u)}{u}=\infty, \lim_{u\to+\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(u)}{u}=\infty,$$

则 (H1)-(H2) 成立. 由于当 $0 \le u \le m$, $0 \le t \le 1$ 时, 有 $f(u)$ 有界,则 (H4) 成立. 除此之外, 当 $q(r) = \frac{1}{r^3}$ 时, $q \in C([1, +\infty), [0, +\infty))$ 并且满足

$$\int_1^{+\infty} rq(r)ds < +\infty.$$

根据定理 1 问题 (4) 至少存在两个解.

例2 考虑问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{r^3}\sqrt{u}\sin u, & x \in \Omega, \\ u(x) + \alpha\frac{\partial u}{\partial n} = 0, & |x| = 1, \\ u(x) \to 0, & |x| \to +\infty \end{cases} \tag{5}$$

的多解性, 其中 $\alpha > 0$.

注意到 $q(r) = \frac{1}{r^3}$, $f(u) = \sqrt{u}\sin u$, 显然 $f \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$, 且满足

$$\lim_{u \to 0^+} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(u)}{u} = 0, \lim_{u \to +\infty} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(u)}{u} = 0$$

则 (H1) (H3) 成立. 容易验证 (H4) 成立, 且当 $q(r) = \frac{1}{r^3}$ 时, $q \in C([1, +\infty), [0, +\infty))$, 且满足

$$\int_1^{+\infty} rq(r)ds < +\infty.$$

根据定理 2 问题 (5) 至少存在两个解.

2. 预备知识

考虑空间 $E := C[0, 1]$, 其在范数 $\|z\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |z(t)|$ 下构成 Banach 空间.

令 $r = |x|$, 则 (3) 可转化为 $[1, +\infty)$ 上的常微分边值问题

$$\begin{cases} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) = q(r)f(u), & r > 1, \\ u(1) + \alpha u'(1) = 0, \ \ u(\infty) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

再令 $z(t) = u((1-t)^{\frac{1}{2-N}})$, 则方程 (6) 等价于

$$\begin{cases} -z''(t) = h(t)f(z(t)), & t \in (0, 1), \\ z(0) - \alpha(N-2)z'(0) = 0, \ \ z(1) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$h(t)=\frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{\frac{2(N-1)}{2-N}}q((1-t)^{\frac{1}{2-N}}),$$

显然 $h(t)$ 可能在 $t=1$ 处奇异.

很容易得到问题 (7) 等价于

$$z(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(z(s))ds,$$

其中 $G(t,s)$ 为对应的 Green 函数表示为

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{(1-t)(\alpha(N-2)+s)}{\rho}, & 0\le s\le t\le 1,\\ \frac{(1-s)(\alpha(N-2)+t)}{\rho}, & 0\le t\le s\le 1,\end{cases}$$

其中 $\rho:=1+\alpha(N-2)$, 显然 Green 函数满足

$$G(t,s)\le G(s,s)\quad \forall s,t\in[0,1], \tag{8}$$

并且 $\forall t\in[0,\frac{3}{4}]$ 有

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}=\begin{cases}\frac{1-t}{1-s}\ge\frac{1}{4(1-s)} & s\le t,\\ \frac{(\alpha(N-2)+t)}{(\alpha(N-2)+s)}\ge\frac{\alpha(N-2)}{\alpha(N-2)+s} & t\le s.\end{cases}$$

故

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}\ge M_1,\quad 0\le t\le\frac{3}{4}.$$

其中 $M_1=\min\{\frac{1}{4(1-s)},\frac{\alpha(N-2)}{\alpha(N-2)+s}\}$.

考虑锥

$$P:=\{z(t):z(t)\ge 0\text{ 且 }\min_{0\le t\le\frac{3}{4}}z(t)\ge M_1\|z\|_\infty\}. \tag{9}$$

定义一个算子 $T:P\to E$,

$$Tz(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(z(s))ds.$$

故 T 的不动点对应于问题 (7) 的正解.

引理 1 算子 T 是有定义的.

证明 由 H(1) 知函数 $f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$ 连续且递增, 则由 f 的连续性知存在正常数 C 满

足 $|f(z(t))| \leq C$, 由 (9) 知 $G(t,s) \leq G(s,s)$ 则

$$\begin{aligned} Tz(t) &= \int_0^1 G(t,s)h(s)f(z(s))ds \\ &\leq \int_0^1 G(s,s)h(s)f(z(s))ds \\ &\leq C\int_0^1 G(s,s)h(s)ds \\ &< \infty. \end{aligned}$$

故 T 有定义.

引理 2 算子 $T(P) \subset P$.

证明 显然

$$Tz(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(z(s))ds \geq 0,$$

并且 $\forall z \in P$, 有

$$\begin{aligned} \min_{0\leq t \leq \frac{3}{4}} T(z(t)) &= \min_{0\leq t \leq \frac{3}{4}} \int_0^1 G(t,s)h(s)f(z(s))ds \\ &\geq M_1 \int_0^1 G(s,s)h(s)f(z(s))ds \\ &\geq M_1 ||Tz||. \end{aligned}$$

故算子 $T(P) \subset P$.

引理 3 T是全连续算子.

首先证明 T 是连续的. 任取 $z_0 \in P$, 且当 $n \to \infty$ 有 $z_n \to z_0$, 则由 Lebesgue 控制收敛定理知, $n \to \infty$, $z_n \to z_0$ 时, 则有 $f(z_n(t)) \to f(z_0(t))$. 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时有 $|f(z_n(t)) - f(z_0(t))| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \|Tz_n(t) - Tz_0(t)\|_\infty &= \max_{0\leq t\leq 1} |Tz_n(t) - Tz_0(t)| \\ &= \max_{0\leq t\leq 1} |\int_0^1 G(t,s)h(s)f(z_n(s))ds - \int_0^1 G(t,s)h(s)f(z_0(s))ds| \\ &\leq \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)h(s)|f(z_n(s)) - f(z_0(s))|ds \\ &\leq \int_0^1 G(s,s)h(s)|f(z_n(s)) - f(z_0(s))|ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 G(s,s)h(s)ds \to 0. \end{aligned}$$

故上式成立从而 T 连续. 下证 T 是紧集 .

设 $H \subset C[0,1]$ 为有界集, 则存在正数 B, 使得对任意的 $z \in H$ 有 $||z||_\infty \leq B$. 由 f 的连续性知, 存在 $D > 0$, 有

$$f(z) \leq D, \quad z \in H.$$

令 $L = \max\limits_{t\in[-D,D]} |f(z(t))|$ 则对任意的 $z \in H$ 有

$$\begin{aligned}
|T(z(t))| &= |\int_0^1 G(t,s)h(s)f(z(s))ds| \\
&\leq \int_0^1 G(t,s)h(s)|f(z(s))|ds \\
&\leq L\int_0^1 G(s,s)h(s)ds.
\end{aligned}$$

故 T 一致有界. 下证等度连续. 对任意的 $t_1, t_2 \in [0,1]$ 不妨设 $t_1 < t_2$ 有,

$$\begin{aligned}
|T(z(t_1)) - T(z(t_2))| &= |\int_0^1 G(t_1,s)h(s)f(z(s))ds - \int_0^1 G(t_2,s)h(s)f(z(s))ds| \\
&= |\int_0^{t_1} G(t_1,s)h(s)f(z(s))ds + \int_{t_1}^1 G(t_1,s)h(s)f(z(s))ds \\
&- \int_0^{t_2} G(t_2,s)h(s)f(z(s))ds - \int_{t_2}^1 G(t_2,s)h(s)f(z(s))ds| \\
&= |\int_0^{t_1} G(t_1,s)h(s)f(z(s))ds + \int_{t_1}^1 G(t_1,s)h(s)f(z(s))ds \\
&- \int_0^{t_1} G(t_2,s)h(s)f(z(s))ds - \int_{t_1}^{t_2} G(t_2,s)h(s)f(z(s))ds \\
&- \int_{t_2}^{t_1} G(t_2,s)h(s)f(z(s))ds - \int_{t_1}^1 G(t_2,s)h(s)f(z(s))ds| \\
&\leq |t_1 - t_2|\int_0^1 h(s)f(z(s))ds + \frac{|t_1-t_2|}{\rho}\int_0^1 h(s)f(z(s))ds \\
&+ |t_2 - t_1|\int_0^1 h(s)f(z(s))ds \\
&\leq \frac{(2\rho+1)|t_2-t_1|}{\rho}\int_0^1 h(s)f(z(s))ds \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

故对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon\rho}{J(2\rho+1)}, \forall t_1, t_2 \in [0,1]$, 当 $|t_2 - t_1| < \delta$ 时, 对任意的 $z \in C[0,1]$, 有 $|T(z(t_1)) - T(z(t_2))| < \varepsilon$, 其中 $J = \int_0^1 h(s)f(z(s))ds$, 从而 T 等度连续. 由上述证明得 T 全连续.

引理 4 令 E 是一个 Banach 空间, 其范数定义为 $\|\cdot\|$, 且令 $K \subseteq E$ 是一个锥. 对 $r > 0$, 定义 $K_r = \{u \in K : \|u\| \le r\}$. 假设 $T : \overline{K_r} \to K$ 是一个紧映射满足, $Tu \ne u, \forall u \in \partial K_r = \{u \in K : \|u\| = r\}$, 则

(i) 若 $\|u\| \le \|Tu\|, \forall u \in \partial K_r$, 有

$$i(T, K_r, K) = 0;$$

(i) 若 $\|u\| \ge \|Tu\|, \forall u \in \partial K_r$, 有

$$i(T, K_r, K) = 1.$$

3. 主要结果的证明

定理 1 的证明

由 (H2) 知存在 $R_1 > 0$, 使得当 $R_1 < m, 0 \le z \le r$ 时, 有 $f(z) \ge \mu z$. 这里对于任意的 $z \in \partial P_r$ 有 $\|Tz\| > \|z\|$. 事实上, 对任意的 $z \in \partial P_r$ 有

$$\begin{aligned} T(z(\frac{1}{2})) &= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s)h(s)f(z(s))ds \\ &\ge \int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)z\mu ds \\ &\ge \|z\|_\infty M_1\mu \int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)ds \\ &\ge \|z\|_\infty, \end{aligned}$$

其中 $\mu > 0$, 且满足

$$M_1\mu \int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)ds \ge 1.$$

则由引理 (4) 知

$$i(T, P_{R_1}, P) = 0. \tag{10}$$

对于相同的 $\mu > 0$ 满足

$$M_1\mu \int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)ds \ge 1.$$

由 (H2) 知存在 $R_2 > 0$ 使得对任意 $z \geq R_2$ 有 $f(z) \geq \mu z$. 选择 $R > \max\{m, \frac{R_2}{M_1}\}$, 对任意的 $z \in \partial P_R$, $\min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} z(t) \geq M_1 \|z\|_\infty$ 有

$$\begin{aligned}
T(z(\frac{1}{2})) &= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s)h(s)f(z(s))ds \\
&\geq \int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)z\mu ds \\
&\geq \|z\|_\infty M_1 \mu \int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)ds \\
&\geq \|z\|_\infty,
\end{aligned}$$

故 $\forall z \in \partial P_R, \|Tz\| > \|z\|$. 则由引理 (4) 知

$$i(T, P_R, P) = 0. \tag{11}$$

另一方面, 由 (H3) 知 $\forall z \in \partial P_m$,则

$$\begin{aligned}
T(z(t)) &= \int_0^1 G(t, s)h(s)f(z(s))ds \\
&\leq \int_0^1 G(s, s)h(s)z\eta ds \\
&< \|z\|_\infty \eta \int_0^1 G(s, s)h(s)ds \\
&\leq \|z\|_\infty,
\end{aligned}$$

其中 $\eta = (\int_0^1 G(s, s)h(s)ds)^{-1}$, 因此对于任意 $z \in \partial P_m, \|Tz\| < \|z\|$, 显然对于任意 $z \in \partial P_m, Tz \neq z$. 由引理 (4) 知

$$i(T, P_m, P) = 1. \tag{12}$$

故由 (7), (8), (9) 知

$$i(T, P_R \setminus \mathring{P}_m, P) = -1,$$

并且

$$i(T, P_R \setminus \mathring{P}_{R_1}, P) = 1.$$

显然 T 在 $P_R \setminus \mathring{P}_m$ 上有一个不动点 u_1, 在 $P_R \setminus \mathring{P}_{R_1}$ 上有一个不动点 u_2, 且 $u_1, u_2 > 0$. 则定理 (1.1) 结论得证.

定理 2 的证明

由 (H3) 得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M_2 > 0$ 使得对任意的 $t \in [0, 1], z \geq 0$ 有

$$f(z) \leq M_2 + \varepsilon z. \tag{13}$$

则对任意的 $z \in P$ 有

$$T(z(t)) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(z(s))ds$$

$$\leq \int_0^1 G(t,s)h(s)[M_2 + \varepsilon z(s)]ds.$$

显然,当选择的 $\varepsilon > 0$ 充分小, $R > m$ 充分大时, 对任意的 $z \in \partial P_R$ 有

$$\|Tz\| < \|z\|.$$

因此由引理 (4) 知

$$i(T, P_R, P) = 1. \tag{14}$$

同样的, 对于充分小的 $R_1 > 0, R_1 < m$ 有

$$i(T, P_{R_1}, P) = 1. \tag{15}$$

另一方面, 对任意的 $z \in P_m$, 有

$$\min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} z(t) \geq M_1 ||z|| = M_1 m.$$

因此由 (H5) 知对任意的 $z \in \partial P_m$ 有

$$T(z(\frac{1}{2})) = \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s)h(s)f(z(s))ds$$

$$\geq m\lambda \int_0^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)ds$$

$$= m = \|z\|.$$

显然, 对任意的 $z \in \partial P_m$,$Tz \neq z$ 由引理 (4) 知

$$i(T, P_m, P) = 0. \tag{16}$$

故由 (14), (15), (16) 知 T 有两个不动点,即问题 (3) 有两个正解 u_1, u_2. 定理 (1.2) 结论得证.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12061064)。

参考文献

[1] Kharrati, S. and Jaidane, R. (2022) Existence of Positive Solutions to Weighted Linear Elliptic Equations under Double Exponential Nonlinearity Growth. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **48**, 993-1021. https://doi.org/10.1007/s41980-021-00559-x

[2] Wang, H.Y. (1994) On the Existence of Positive Solutions for Semilinear Elliptic Equations in the Annulus. *Journal of Differential Equations*, **109**, 1-7. https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1042

[3] Erbe, L.H. and Wang, H.Y. (1994) On the Existence of Positive Solutions of Ordinary Differential Equations. *Proceedings of the AMS*, **120**, 743-748. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1204373-9

[4] Zhang, S.L. (2022) Existence of Nontrivial Positive Solutions for Generalized Quasilinear Elliptic Equations with Critical Exponent. *AIMS Mathematics*, **7**, 9748-9766. https://doi.org/10.3934/math.2022543

[5] Erbe, L.H., Hu, S.C. and Wang, H.Y. (1994) Multiple Positive Solutions of Some Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **184**, 640-648. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1227

[6] He, W. and Wu, Q.F. (2020) Multiplicity Results for Sublinear Elliptic Equations with Sign-Changing Potential and General Nonlinearity. *Boundary Value Problems*, **159**, 1-9. https://doi.org/10.1186/s13661-020-01456-8

[7] Castro, A. and Kurepa, A. (1987) Infinitely many Radially Symmetric Solutions to a Superlinear Dirichlet Problem in a Ball. *Proceedings of the AMS*, **101**, 57-64. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1987-0897070-7

[8] Ali, I., Castro, A. and Shivaja, R. (1993) Uniqueness and Stability of Nonnegative Solutions for Semipositone Problems in a Ball. *Proceedings of the AMS*, **117**, 775-782. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1993-1116249-5

[9] Benguria, R.D., Doilbeault, J. and Estenban, M.J. (2000) Classification of the Solutions of Semilinear Elliptic Problems in a Ball. *Journal of Differential Equations*, **167**, 438-466. https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3792

[10] Lin, S.S. (1989) On the Existence of Positive Radial Solutions for Nonlinear Elliptic Equations in Annular Domains. *Journal of Differential Equations*, **81**, 221-233. https://doi.org/10.1016/0022-0396(89)90121-6

[11] Stańczy, R. (2003) Positive Solutions for Superlinear Liptic Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **283**, 159-166. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00265-8

[12] Hai, D.D. and Shivaja, R. (2017) Positive Radial Solutions for a Class of Singular Superlinear Problems on the Exterior of a Ball with Nonlinear Boundary Conditions. *Journal of Mathe-*

matical Analysis and Applications, **456**, 872-881.
https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.06.088

[13] do Ó, Lorca, S., Sánchez, J. and Ubilla, P. (2006) Non-Homogeneous Elliptic Equations in Exterior Domains. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **136**, 139-147.
https://doi.org/10.1017/S0308210500004479

[14] Wu, T.F. (2007) Multiple Positive Solutions of Non-Homogeneous Elliptic Equations in Exterior Domains. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **137**, 603-624.
https://doi.org/10.1017/S0308210505000260