Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 394-408
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145195

具有Logistic源的三维趋化模型的适定性研究

江昱邦，彭红云

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2024年3月19日；录用日期：2024年4月18日；发布日期：2024年5月31日

摘 要

本文研究了一类在全空间$\mathbb{R}^3$上具有奇性和Logistic源的趋化模型的整体适定性。通过Cole-Hopf型变换，将带奇性的趋化系统转化为非奇性的趋化系统，然后通过能量估计的方法建立该系统解的全局适定性。

关键词

趋化模型，Logistic源，能量估计，全局适定性

Well-Posedness Study on Three-Dimensional Chemotaxis Model with Logistic Source

Yubang Jiang, Hongyun Peng

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Mar. 19^{th}, 2024; accepted: Apr. 18^{th}, 2024; published: May 31^{st}, 2024

Abstract

In this thesis, we study the global well-posedness of a singular chemotaxis system with

文章引用: 江昱邦, 彭红云. 具有Logistic源的三维趋化模型的适定性研究[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 394-408.
DOI: 10.12677/pm.2024.145195

logistic source in three dimensional whole spaces. Through the Cole-Hopf type transformation, the singular chemotaxis is converted into a non-singular hyperbolic system, and then the global well-posedness of the transformed model solution is established through the energy estimation method.

Keywords

Chemotaxis System, Logistic Source, Energy Estimate, Global Well-Posedness

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

趋化性是指细胞对环境中的某些化学物质刺激所产生的趋向性反应，是细胞的基本生理反应。吸引趋化性意味着细胞向化学物质浓度较高的方向移动，而排斥趋化性则相反，是指细胞向化学物质浓度较低的方向移动。在文献 [1–4]，Zeng和Zhao总结了具有对数敏感性和logistic源的Keller-Segel-Fisher模型的一些最新结果，而该模型(1)如下：

$$\begin{cases} c_t = \varepsilon c_{xx} - \mu uc - \sigma c, \\ u_t + \chi \left[u(\ln c)_x\right]_x - Du_{xx} + au\left(1 - \frac{u}{K}\right). \end{cases} \tag{1}$$

在这里未知函数$c = c(x,t)$ 与$u = u(x,t)$ 分别代表化学信号的浓度和细胞群体的密度。该模型最初在文献 [5]中被提出，描述了某些生物体在其局部环境中释放或消耗化学信号从而导致扩散或者其他反应的动态变化，具体可见文献 [6–9]。该系统描述了细胞对信号的对数趋化反应，以及一些机制，例如化学物质的自然降解和细胞的逻辑生长。该模型中的对数敏感性函数解释了Fickner定律，这意味着细胞群对化学信号的趋化反应遵循该定律。该定律指出，主观感知与刺激强度的对数成正比，在生物建模中具有突出的作用。该灵敏度函数在最初的Keller-Segel 模型 [10]中得到了应用。

由细胞动力学理论知，如果趋化性起作用的生物现象不仅仅在小时间尺度上时，那么通常需要考虑种群的增殖和死亡，这在数学模型上体现为logistic 源项的出现。实现这一点的一个典型方法是在数学模型中方程中添加logistic 源项$ku - \mu u^2$。其中u是指种群的密度，$k \in R$是出生率和人口死亡率之间的差异，被用来描述人口增长，而$-\mu u^2$ 模型是额外的过度拥挤效应。k的负值可以

用来将自发性退化等效应纳入模型，比如在饥饿人口的情况下种群数量将降低。该模型可以写成：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) + ku - \mu u^2 \\ v_t = \Delta v - v + u. \end{cases} \tag{2}$$

对于logistic源这个问题目前已经有了广泛研究，这一项的作用是为了防止数据的爆破。例如，Tello和Winkler于文献 [11–13]中在空间维数不超过2的假设下，考虑了模型2的抛物椭圆方程（即其中v_t被0代替），表明对于任意$\mu > 0$，如果$\mu > \frac{n-2}{n}$的情况下，模型2存在全局有界经典解与弱解；而Winkler 在更一般的条件下证明了模型2存在非常弱的弱解，在附加假设下，还显示了$L^\infty(\Omega)$中存在有界吸收集；Cao也在文献 [14] [15]中证明了关于模型2的部分结果。关于原来的抛物系统，Winkler在文献 [16]中给出他的证明，即在μ足够大的情况下，模型2的全局、平滑、有界解的存在性和唯一性。而目前关于三维情况下的研究还比较少，所以在本文中，我们将考虑三维情况下具有对数趋化函数和logistic源的吸引趋化模型(3)：

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D \nabla u - \chi u \nabla \ln c) + au \left(1 - \frac{u}{K}\right), \\ c_t = \varepsilon \Delta c - \mu uc, \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x). \end{cases} \tag{3}$$

其中参数$D > 0$是内皮细胞的扩散性，$\chi > 0$是衡量趋化强度的趋化系数，μ表示化学物质的降解速率，$a > 0$是细胞群的自然生长速率，$K > 0$是细胞群的承载能力。$\epsilon > 0$是化学扩散速率，它可以小到忽略不计。因为其中的化学扩散远没有它与内皮细胞的相互作用重要，这已经在参考文献 [17]中已经讨论过。为了方便起见，我们令$D = \chi = 1$。通过观察我们可以发现该模型存在奇性，故我们通过应用Cole-Hopf变换 [18] [19]

$$\mathbf{v} = -\nabla \ln c = -\frac{\nabla c}{c},$$

同时$\tilde{t} = \mu t, \tilde{x} = \sqrt{\mu} x, \tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \mathbf{v}, r = \frac{a}{\mu K}$，将模型(3)转化为如下的数学模型：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + ru(1-u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \mathbf{v}_t - \varepsilon \Delta \mathbf{v} = \nabla \left(-\varepsilon |\mathbf{v}|^2 + u\right), & x \in \Omega, t > 0, \\ (u, \mathbf{v})(x, 0) = (u_0, \mathbf{v}_0)(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

目前对于模型(4)的研究还不多，因此本文将开展关于模型(4)柯西问题解的全局适定性研究，研究结果如下：

定理1. 对常状态$\bar{u} > 0$以及整数$k \geq 2$，令$(u_0 - \bar{u}, \mathbf{v}_0) \in H^k(\mathbb{R}^3) \times H^k(\mathbb{R}^3)$，那么对任意常数$M_0 > 0$，$\|\nabla^2 u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 \mathbf{v}_0\|_{L^2}^2 \leq M_0^2$，存在一个与$M_0$有关的正常数$\eta$，使得如果

$$\|u_0 - \bar{u}\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{v}_0\|_{H^1}^2 \leq \eta^2,$$

当$\varepsilon \geq 0$时，模型(4)的全局唯一解$(u, \mathbf{v}) \in C\left([0,+\infty), H^k(\mathbb{R}^3)\right)$满足对所有$t>0$，

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)-\tilde{u}\|_{H^k}^2+\|\mathbf{v}(t)\|_{H^k}^2+\int_0^t\left(\|\nabla u(\tau)\|_{H^k}^2+\|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|_{H^{k-1}}^2+\varepsilon\|\nabla^{k+1} \mathbf{v}(\tau)\|_{L^2}^2\right) d\tau \\
&\leq C\left(\|u_0-\bar{u}\|_{H^k}^2+\|\mathbf{v}_0\|_{H^k}^2\right),
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中C为常数，且与η和t无关。

2. 预备知识

在证明中，我们将使用以下两个基本事实：

$$
\Delta \mathbf{v}=\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \|\nabla^{l+1} \mathbf{v}\|_{L^2} \simeq \|\nabla^{\ell} \nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2}.
$$

其中ℓ为任意的非负整数。“$\simeq$”表示左右两个范数是等价的。为了使结果更加简明，在后续证明中取$\bar{u}=1$，并令$p=u-1$，则方程组(4)可以改写为

$$
\begin{cases}
p_t-\Delta p-\nabla \cdot \mathbf{v}+r p=\nabla \cdot(p \mathbf{v})-r|p|^2, \\
\mathbf{v}_t-\varepsilon \Delta \mathbf{v}-\nabla p=\nabla\left(-\varepsilon|\mathbf{v}|^2\right), \\
(p, \mathbf{v})(x, 0)=\left(p_0, \mathbf{v}_0\right)(x).
\end{cases} \tag{6}
$$

这样我们就将问题转化为求方程组(6)的全局适定性。

引理1. *(局部存在性) [20] [21] 假设对任意的$s>\frac{d}{2}$，有$(p_0, \mathbf{v}_0) \in H^s\left(\mathbb{R}^d\right) \times H^s\left(\mathbb{R}^d\right)$。存在一个时间$T$，满足*

$$
T=T\left(\|p_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},\|\mathbf{v}_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right)>0, \text{ 使得系统(6)有唯一的解} (p, \mathbf{v}) \in C\left([0, T), H^s\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\text{。}
$$

接下来我们将逐步开始证明所需要使用引理，为了接下来证明的方便，我们首先构建关于系统(6)的一个线性系统：

$$
\begin{cases}
p_t-\Delta p-\nabla \mathbf{v}+r p=0, \\
\mathbf{v}_t-\varepsilon \Delta \mathbf{v}-\nabla p=0.
\end{cases} \tag{7}
$$

对于任意的非负整数l，方程组(7)的l阶能量恒等式如下：

$$
\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+r \int_{R^3}\left(\nabla^l p\right)^2 dx=0. \tag{8}
$$

这里的想法是利用方程组(7)中的第一个方程中$\mathbf{v}$的耗散结构来构造p和$\mathbf{v}$之间的交互能量估计。我们将∇^l分别应用于方程$(7)_1$和$(7)_2$，再分别与$-\nabla^l \nabla \cdot \mathbf{v}$ 和$\nabla^{l+1} p$取内积。然后对结果进行积分并相

加，我们可以得到如下结果：

$$\frac{d}{dt}\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^l\mathbf{v}dx+\left\|\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+(1+\varepsilon)\int_{R^3}\nabla^{l+2}p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx$$
$$-\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+r\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^l\mathbf{v}dx=0. \tag{9}$$

显然这样还不足以做出对等式(8)的估计。故我们写下关于p的能量耗散方程：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^{l+2}p\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+r\int_{R^3}\left(\nabla^{l+1}p\right)^2dx=0. \tag{10}$$

对任意的$\delta>0$，我们结合等式(8)，(9)和(10)，可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+2\delta\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^l\mathbf{v}dx\right)$$
$$+\Big[\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2}p\right\|_{L^2}^2+\delta\left\|\nabla'\nabla\cdot\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2$$
$$+(1+\varepsilon)\delta\int_{R^3}\nabla^{l+2}p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx-\delta\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+r\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+r\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\delta r\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^l\mathbf{v}dx\Big]=0. \tag{11}$$

通过取适当小的δ，我们可以通过控制其中的交叉项来建立与ϵ无关的p和$\mathbf{v}$的能量耗散。根据以上结果的总和，我们可以得出能量估计：

$$\mathcal{E}_l(t):=\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+2\delta\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^l\mathbf{v}dx,$$
$$F_l(t):=\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2}p\right\|_{L^2}^2+\delta\left\|\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2$$
$$+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+(1+\varepsilon)\delta\int_{R^3}\nabla^{l+2}p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx-\delta\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2$$
$$+r\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+r\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\delta r\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^l\mathbf{v}dx. \tag{12}$$

其中l为任意的非负整数，常数δ满足$0<\delta<1$。这样我们就有了一个基本的能量耗散结构(12)。

引理2. 对任意的非负整数l，$\mathcal{E}_l(t)$ 和$F_l(t)$满足*(12)*中的定义。那么有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_l(t)+F_l(t)=\int_{R^3}\nabla^l p\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx+\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\nabla^{l+1}\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-\delta\int_{R^3}\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx$$
$$-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^l\mathbf{v}\cdot\nabla^l\nabla|\mathbf{v}|^2dx-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}\mathbf{v}\cdot\nabla^{l+1}\nabla|\mathbf{v}|^2dx-\delta\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|\mathbf{v}|^2dx$$
$$-r\int_{n^3}\nabla^l p\cdot\nabla^l|p|^2dx-r\int^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|p|^2dx+\delta r\int_{R^3}\nabla^l|p|^2\cdot\left(\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\right)dx. \tag{13}$$

证明 将∇^l分别作用于方程$(6)_1$和$(6)_2$，再分别与$\nabla^\ell p$和$\nabla^\ell \mathbf{v}$做内积，我们可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2-\int_{R^3}\nabla^l p\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}dx+r\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2$$

$$=\int_{R^3}\nabla^l p\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-r\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^l|p|^2dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^l \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2-\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\nabla^l\mathbf{v}dx=-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^l\mathbf{v}\cdot\nabla\nabla^l|\mathbf{v}|^2dx,$$

由上面的两个等式我们可以得到：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+r\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2\\&=\int_{R^3}\nabla^l p\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-r\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^l|p|^2dx-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^l\mathbf{v}\cdot\nabla\nabla^l|\mathbf{v}|^2dx.\end{aligned}\tag{14}$$

同样，我们将∇^{l+1}分别作用于方程$(6)_1$和$(6)_2$，再分别与$\nabla^{l+1}p$和$\nabla^{l+1}\mathbf{v}$做内积，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^{l+2}p\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+r\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2\\&=\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\nabla^{l+1}\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-r\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|p|^2dx-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}\mathbf{v}\cdot\nabla\nabla^{l+1}|\mathbf{v}|^2dx.\end{aligned}\tag{15}$$

接着，我们将∇^{l+1}分别作用于方程$(6)_1$和$(6)_2$，并分别与$-\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}$ 和$\nabla^{\ell+1}p$做内积，便可以得到如下等式：

$$-\int_{R^3}\left(\nabla^l p\right)_t\cdot\nabla^l\nabla\mathbf{v}dx+\int_{R^3}\nabla^{l+2}p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx+\left\|\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2-r\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx$$

$$=-\int_{R^3}\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}dx+r\int_{R^3}\nabla^l|p|^2\cdot\left(\nabla^l\nabla\mathbf{v}\right)dx,$$

$$\int_{R^3}\left(\nabla^l\mathbf{v}\right)_t\cdot\nabla^{l+1}pdx-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+2}\mathbf{v}\cdot\nabla^{l+1}pdx-\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2=-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|\mathbf{v}|^2dx.$$

将以上两式整合有：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\nabla\mathbf{v}dx+\left\|\nabla^{l+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+(1+\varepsilon)\int_{R^3}\nabla^{l+2}p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx-\left\|\nabla^{l+1}p\right\|_{L^2}^2-r\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx\\&=-\int_{R^3}\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}dx-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|\mathbf{v}|^2dx+r\int_{R^3}\nabla^l|p|^2\cdot\left(\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\right)dx.\end{aligned}\tag{16}$$

故我们将等式(14)，(15)和(16)整合起来后就有以下等式：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+2\delta\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^l\mathbf{v}dx\right)$$
$$+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2} p\right\|_{L^2}^2+r\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+r\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\delta\left\|\nabla^l\nabla \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2$$
$$+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\delta(1+\varepsilon)\int_{R^3}\nabla^{l+2}p\cdot\nabla^{l+1}\mathbf{v}dx-\delta\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2-\delta r\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^l\nabla\mathbf{v}dx$$
$$=\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx+\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-\delta\int_{R^3}\nabla^l\nabla\mathbf{v}\cdot\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx$$
$$-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^l\mathbf{v}\cdot\nabla^l\nabla\cdot|\mathbf{v}|^2dx-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}\mathbf{v}\cdot\nabla^{l+1}\nabla\cdot|\mathbf{v}|^2dx-\delta\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|\mathbf{v}|^2dx$$
$$-r\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^l|p|^2dx-r\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|p|^2dx+\delta r\int_{R^3}\nabla^l|p|^2\cdot\left(\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\right)dx.$$

经过一定的分部积分后便可以得到(13)，以上就是引理2的相关证明。

□

引理3. 对任意$l\geq 0$有

$$\mathcal{E}_l(t):\simeq\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2,$$
$$F_l(t):\simeq\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2,$$

其中，$A\simeq B\Leftrightarrow c_0B\leq A\leq\hat{c}_0B$，$c_0$ 和$\hat{c}_0$为常数。

证明 通过Young不等式与本文所提到的两个基本事实，我们可以推出

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{\ell+1}p\cdot\nabla^\ell\mathbf{v}dx\right|\leq\left\|\nabla^{\ell+1} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^\ell \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2,$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{\ell+2}p\cdot\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}dx\right|\leq\left\|\nabla^{\ell+2} p\right\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla^\ell\nabla\cdot \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2$$

因此，可以很容易地找到常数c_0 和$\hat{c}_0$ ，从而得到所需的结论。

□

然后我们将定义以下变量

$$\begin{cases}
\mathrm{K}_1=\int_{R^3}\nabla^l p\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx,\\
\mathrm{K}_2=\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\nabla^{l+1}\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-\delta\int_{R^3}\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\nabla^l\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx,\\
\mathrm{K}_3=-\varepsilon\int_{R^3}\nabla^l\mathbf{v}\cdot\nabla^l\nabla|\mathbf{v}|^2dx,\\
\mathrm{K}_4=\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}\nabla\mathbf{v}\cdot\nabla^{l+1}|\mathbf{v}|^2dx-\delta\varepsilon\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|\mathbf{v}|^2dx,\\
\mathrm{K}_5=-r\int_{R^3}\nabla^l p\cdot\nabla^l|p|^2dx,\\
\mathrm{K}_6=-r\int_{R^3}\nabla^{l+1}p\cdot\nabla^{l+1}|p|^2dx,\\
\mathrm{K}_7=\delta r\int_{R^3}\nabla^l|p|^2\cdot\left(\nabla^l\nabla\cdot\mathbf{v}\right)dx.
\end{cases}$$

那么等式(13)就可以写成

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_l(t)+F_l(t)=\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2+\mathrm{K}_3+\mathrm{K}_4+\mathrm{K}_5+\mathrm{K}_6+\mathrm{K}_7 \tag{17}$$

那么现在问题的关键是得到关于项K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 和K_7.的估计。在本文中，我们将采用先验估计。首先，我们假设方程(6)的解$(p,\mathbf{v})$对于任意的$t\in[0,T]$满足

$$\left\|\nabla^2 p(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\left\|\nabla^2\mathbf{v}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\leq\frac{2\hat{c}_0}{c_0}M_0^2 \tag{18}$$

和

$$\|p(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2+\|\mathbf{v}(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2\leq\kappa_0^2 \tag{19}$$

其中c_0 和$\hat{c}_0$ 来自引理3。

引理4. *我们令方程组(6)的解满足(18)和(19)。对任意的$M_0>0$，如果k_0足够小，那么存在一个正常数c_1，对任意的$t\in[0,T]$，使得*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_l(t)+c_1F_l(t)\leq 0. \tag{20}$$

其中的$l=0,1,\cdots,k-1$。

证明 接下来的证明将分为三个部分。

步骤一$(l=0)$

在接下来的证明中，我们将频繁的使用以下两个不等式：

$$\|f\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}},\quad \|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\leq C\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{21}$$

上述两个不等式由G-N不等式和Sobolev不等式得到。而假设的不等式(18)与(19)也将在接下来的证明中不断使用。其中，关于K_1至K_4已经在文献 [20]中有了详细的证明。所以接下来这里将给出K_5至K_7的证明。

$$|\mathrm{K}_1|=\left|-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla p\cdot(p\mathbf{v})dx\right|\leq C\kappa_0\left(\|\nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\right), \tag{22}$$

$$|\mathrm{K}_2|=\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla^2 p+\delta\nabla\cdot\mathbf{v}\right)(\nabla p\cdot\mathbf{v}+p\nabla\cdot\mathbf{v})dx\right|\quad\leq C\kappa_0\left(\left\|\nabla^2 p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\right), \tag{23}$$

$$|\mathrm{K}_3|=\varepsilon\left|\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}\cdot\nabla|\mathbf{v}|^2dx\right|=\varepsilon\left|-\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{v}|^2\nabla\cdot\mathbf{v}dx\right|\quad\leq C\kappa_0\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \tag{24}$$

$$|\mathrm{K}_4|=\varepsilon\left|\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})-\delta\nabla p)\cdot\nabla|\mathbf{v}|^2dx\right|\leq C\kappa_0\left(\|\nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\varepsilon\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\right), \tag{25}$$

对于K_5至K_7，我们运用(21)的两个不等式以及Hölder不等式，我们可以推出

$$\begin{aligned}|\mathrm{K}_5| = \left|-r\int_{R^3} p\cdot|p|^2\,dx\right| &\le C\|p\|_{L^2}\|p\|_{L^3}\|p\|_{L^6} \le C\|p\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla p\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\le Ck_0\left(\|p\|_{L^2}^2+\|\nabla p\|_{L^2}^2\right),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&|\mathrm{K}_6| = \left|-r\int_{R^3}\nabla p\cdot\nabla|p|^2\,dx\right| \le C\|\nabla p\|_{L^2}\|\nabla p\|_{L^3}\|\nabla p\|_{L^6} \\ &\le C\|\nabla p\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla^2 p\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \le Ck_0\left(\|\nabla p\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 p\right\|_{L^2}^2\right),\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{K}_7| &= \left|\delta r\int_{R^3}|p|^2(\nabla\cdot\mathbf{v})dx\right| \le C\|\mathbf{v}\|_{L^2}\|p\|_{L^3}\|\nabla p\|_{L^6} \\ &\le C\|\mathbf{v}\|_{L^2}\|p\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla p\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 p\|_{L^2} \le Ck_0\left(\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 p\|_{L^2}^2\right).\end{aligned} \tag{28}$$

将(22)至(28)代入到(17)中，并运用**引理3**可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_0(t)+F_0(t) &\le C_0k_0\left(\|p\|_{L^2}^2+\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2+\|\nabla p\|_{L^2}^2+\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 p\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right) \\ &\le \frac{C_0}{c_0}k_0F_0(t).\end{aligned}$$

所以，如果我们让k_0适当小，使得$\frac{C_0}{c_0}\kappa_0 \le \frac{1}{2}$，我们就可以找到一个正数$c_1$，使得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_0(t)+c_1F_0(t)\le 0.$$

步骤二$(l=1)$

在本节中，我们运用莱布尼茨公式，Hölder不等式和不等式(21)可以推出以下结果：

$$|\mathrm{K}_1| \le C\kappa_0\left(\left\|\nabla^2 p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right), \tag{29}$$

$$|\mathrm{K}_2| \le C\left(\kappa_0^{\frac{1}{2}}M_0^{\frac{1}{2}}+\kappa_0\right)\left(\left\|\nabla^3 p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\right), \tag{30}$$

$$|\mathrm{K}_3| \le C\kappa_0\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}^2, \tag{31}$$

$$|\mathrm{K}_4| \le C\kappa_0^{\frac{1}{2}}M_0^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\nabla^2 p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^3\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right). \tag{32}$$

运用同样的方法，可以得到K_5 和K_6的估计

DOI: 10.12677/pm.2024.145195

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{K}_5| = \left| -r\int_{R^3} \nabla p\cdot\nabla|p|^2\,dx\right| &\le C\|\nabla p\|_{L^2}\|p\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla p\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla^2 p\|_{L^2} \\
&\le Ck_0\left(\|\nabla p\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 p\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned} \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{K}_6| = &\left| -r\int_{R^3} \nabla^2 p\cdot\nabla^2|p|^2\,dx\right| \le C\left\|\nabla^3 p\right\|_{L^2}\|p\|_{L^3}\|\nabla p\|_{L^6} \\
&\le C\left\|\nabla^2 p\right\|_{L^2}\|p\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla p\|_{L^2}^{\frac12}\left\|\nabla^3 p\right\|_{L^2}\le Ck_0\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3\rho\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned} \tag{34}
$$

而对于K_7我们首先运用分部积分和莱布尼茨公式得到

$$
|\mathrm{K}_7| = \left|\delta r\int_{R^3}\nabla|p|^2\left(\nabla^2\cdot\mathbf{v}\right)dx\right| = \sum_{j=0}^{2} C_2^j\int_{R^3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\nabla^j p\nabla^{2-j}p dx,
$$

其中$C_2^j := \begin{pmatrix} 2 \\ j \end{pmatrix}$，因此我们可以得到

$$
|\mathrm{K}_7| \le C\sum_{j=0}^{2}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}\left\|\nabla^j p\nabla^{2-j}p\right\|_{L^2}.
$$

在这一不等式中，我们需要估计不等式右侧的第二项。利用G-N不等式和插值不等式可以得到如下不等式，具体推导过程可参见文献 [20]

$$
\left\|\nabla^j p\nabla^{\ell-j}\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\left(\kappa_0^{\frac34}M_0^{\frac14}+\kappa_0\right)\left(\left\|\nabla^{\ell+1}p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\left\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right), \tag{35}
$$

$$
\left\|\nabla^j p\nabla^{\ell+1-j}\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\left(\kappa_0^{\frac14}M_0^{\frac34}+\kappa_0\right)\left(\left\|\nabla^{\ell+2}p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\left\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right), \tag{36}
$$

故通过(36)我们能推导出

$$
|\mathrm{K}_7| \le C\sum_{j=0}^{2}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}\left\|\nabla^j p\nabla^{2-j}p\right\|_{L^2} \le Ck_0^{\frac34}M_0^{\frac14}\left(\left\|\nabla^3 p\right\|_{L^2}^2+\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2\right). \tag{37}
$$

整合(29)至(34)和(37)到(17)中，运用**引理3**可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac12\frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t)+F_1(t)\le C_1\left(k_0+k_0^{\frac12}M_0^{\frac12}+k_0^{\frac34}M_0^{\frac14}\right) \\
&\cdot\left(\|\nabla p\|_{L^2}^2+\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 p\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^3\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right)\le\frac{C_1}{c_0}k_0^{\frac34}M_0^{\frac14}F_1(t).
\end{aligned}
$$

同样的，我们令k_0足够小，使得$\frac{C_1}{c_0}\kappa_0^{\frac34}M_0^{\frac14}\le\frac12$，就存在一个正常数$c_1$满足

$$
\frac12\frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t)+c_1\mathcal{F}_1(t)\le 0.
$$

步骤三$(l \geq 2)$

对于K_1至K_4，我们运用分部积分，(36)和(37)可以得到相应估计：

$$|\mathrm{K}_1| \leq C\left(\kappa_0^{\frac{3}{4}} M_0^{\frac{1}{4}} + \kappa_0\right)\left(\left\|\nabla^{\ell+1} p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \left\|\nabla^{\ell+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\right), \tag{38}$$

$$|\mathrm{K}_2| \leq C\left(\kappa_0^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}} + \kappa_0\right)\left(\left\|\nabla^{\ell+2} p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \left\|\nabla^{\ell+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\right), \tag{39}$$

$$|\mathrm{K}_3| \leq C\left(\kappa_0^{\frac{3}{4}} M_0^{\frac{1}{4}} + \kappa_0\right)\left\|\nabla^{\ell+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \tag{40}$$

$$|\mathrm{K}_4| \leq C\left(\kappa_0^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}} + \kappa_0\right)\left(\left\|\nabla^{\ell+1} p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \left\|\nabla^{\ell+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \varepsilon\left\|\nabla^{\ell+2} \mathbf{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\right). \tag{41}$$

关于K_5，我们首先运用莱布尼兹公式可以得到

$$\mathrm{K}_5 = r\int_{R^3} \nabla^l p \cdot \nabla^l |p|^2 dx = r\sum_{j=0}^{l} C_l^j \int_{R^3} \nabla^l p \cdot \nabla^j p \nabla^{l-j} p dx,$$

在使用Hölder不等式就有

$$|\mathrm{K}_5| \leq C\sum_{j=0}^{l}\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}\left\|\nabla^j p \nabla^{l-j} p\right\|_{L^3}. \tag{42}$$

类似K_1的处理方式，将(35)中的$\mathbf{v}$替换成p，有

$$\left\|\nabla^l p \nabla^{l-j} p\right\|_{L^2} \leq C\left(k_0^{\frac{3}{4}} M_0^{\frac{1}{4}} + k_0\right)\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}. \tag{43}$$

这样我们能得到K_5的对应估计：

$$\begin{aligned} |\mathrm{K}_5| &\leq C\sum_{j=0}^{l}\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}\left\|\nabla^j p \nabla^{l-j} p\right\|_{L^2} \leq C\left(k_0^{\frac{3}{4}} M_0^{\frac{1}{4}} + k_0\right)\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2} \\ &\leq C\left(k_0^{\frac{3}{4}} M_0^{\frac{1}{4}} + k_0\right)\left(\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2\right). \end{aligned} \tag{44}$$

关于K_6，有

$$\mathrm{K}_6 = r\int_{R^3} \nabla^{l+1} p \cdot \nabla^{l+1} |p|^2 dx = \sum_{j=0}^{l} C_l^j \int_{R^3} \nabla^{l+1} p \cdot \nabla^j p \nabla^{l+1-j} p dx,$$

运用Hölder不等式可以得到

$$|\mathrm{K}_6| \leq C\sum_{j=0}^{l}\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}\left\|\nabla^j p \nabla^{l+1-j} p\right\|_{L^2}.$$

其中，对任意的$j \geq 0$，将(36)中的$\mathbf{v}$替换成p，可以推出

$$\left\|\nabla^j p \nabla^{l+1-j} p\right\|_{L^2} \leq C\left(k_0^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}}+k_0\right)\left(\left\|\nabla^{l+2} p\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}\right). \tag{45}$$

故我们能得到K_6的估计

$$|\mathrm{K}_6| \leq C\left(k_0^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}}+k_0\right)\left(\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2} p\right\|_{L^2}^2\right). \tag{46}$$

同样的，对于K_7首先用Hölder不等式后，再运用(45)可以得到

$$|\mathrm{K}_7| \leq C\left(k_0^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}}+k_0\right)\left(\left\|\nabla^l \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2} p\right\|_{L^2}^2\right). \tag{47}$$

那么结合(38)至(41)以及(44)，(46)和(47)代入到(17)中，我们推出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_l(t)+F_l(t) \leq C\left(k_0+k_0^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}}\right) \cdot\left(\left\|\nabla^l p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} p\right\|_{L^2}^2\right. \\
&\left.+\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2} p\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2} \mathbf{v}\right\|_{L^2}^2\right) \leq \frac{C_2}{c_0} k_0^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}} F_l(t).
\end{aligned} \tag{48}$$

我们令k_0足够小，就可以使得$\frac{C_2}{c_0} k_0{}^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2}$，我们能找到一个正常数$c_1$使得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_l(t)+c_1 F_l(t) \leq 0,$$

其中，$l \geq 2$。以上就是**引理4**的一个证明。

□

引理5. *(先验估计) 假设方程组(6)的解$(p, \mathbf{v})$满足**引理5**即以下假设*

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla^l p(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} p(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}(t)\right\|_{L^2}^2+c_1 \int_0^t\left(\left\|\nabla^l p(\tau)\right\|_{L^2}^2\right. \\
&\left.+\left\|\nabla^{l+1} p(\tau)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+2} p(\tau)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}(\tau)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}(\tau)\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla^{l+2} \mathbf{v}(\tau)\right\|_{L^2}^2\right) d\tau \\
&\leq \frac{\hat{c}_0}{c_0}\left(\left\|\nabla^l p_0\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} p_0\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^l \mathbf{v}_0\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{l+1} \mathbf{v}_0\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned} \tag{49}$$

其中$t \in [0, T]$ 和$l = 0, 1, \cdots, k-1$。

证明 可以直接从**引理3**和**引理4**得到，故这里省略过程。 □

3. 定理1的证明

证明 对于任意的$t \in [0, T]$，在不等式(49)我们取$l = 0$，有

$$\|p(t)\|_{H^1}^2+\|\mathbf{v}(t)\|_{H^1}^2 \leq \frac{\hat{c}_0}{c_0}\left(\left\|p_0\right\|_{H^1}^2+\left\|\mathbf{v}_0\right\|_{H^1}^2\right) \leq \frac{\hat{c}_0}{c_0} \eta^2.$$

令η足够小，使得$\frac{\hat{c}_0}{c_0}\eta^2 \le \kappa_0^2$，那么可以推出

$$\|p(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\mathbf{v}(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \le \kappa_0^2, \quad t \in [0,T],$$

这样就和(19)一致了。我们继续令(49)中$l=1$，可以得到

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^2 p(t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 \mathbf{v}(t)\right\|_{L^2}^2 &\le \frac{\hat{c}_0}{c_0}\left(\|\nabla p_0\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 p_0\right\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{v}_0\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 \mathbf{v}_0\right\|_{L^2}^2\right)\\ &\le \frac{\hat{c}_0}{c_0}\left(\eta^2 + M_0^2\right) \le \frac{2\hat{c}_0}{c_0}M_0^2,\end{aligned}$$

这与(18)相一致。那么将(49)中$l=0,1,\cdots,k-1$的结果都整合在一起，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\|p(t)\|_{H^k}^2 + \|\mathbf{v}(t)\|_{H^k}^2 + \int_0^t \left(\|p(\tau)\|_{H^k}^2 + \|\mathbf{v}(\tau)\|_{H^{k-1}}^2 + \varepsilon\left\|\nabla^{k+1}\mathbf{v}(\tau)\right\|_{L^2}^2\right) d\tau\\ &\le C\left(\|p_0\|_{H^k}^2 + \|\mathbf{v}_0\|_{H^k}^2\right),\end{aligned}$$

那么根据**引理1**的局部存在性和**引理5**的先验估计就可以得到解$(p,\mathbf{v})$的全局存在性，因此定理一得证。

$\square$

本文证明了在三维情况下具有奇性和Logistic源的趋化模型的适定性。对于Logistic源项在系统中起到防止爆破作用的方式还不够明确，未来将继续研究其中的机制。而其他可能的成果，如行波解，零扩散极限和收敛率等，我们将继续探索和研究其结果。

参考文献

[1] Zeng, Y. and Zhao, K. (2020) Recent Results for the Logarithmic Keller-Segel-Fisher/Kpp System. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, **38**, 37-48. https://doi.org/10.5269/bspm.v38i7.44494

[2] Stevens, A. and Othmer, H.G. (1997) Aggregation, Blowup, and Collapse: The ABC's of Taxis in Reinforced Random walks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **57**, 1044-1081. https://doi.org/10.1137/S0036139995288976

[3] Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y. and Winkler, M. (2015) Toward a Mathematical Theory of Keller-Segel Models of Pattern Formation in Biological Tissues. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **25**, 1663-1763. https://doi.org/10.1142/S021820251550044X

[4] Hillen, T. and Painter, K.J. (2009) A User's Guide to PDE Models for Chemotaxis. *Journal of Mathematical Biology*, **58**, 183-217. https://doi.org/10.1007/s00285-008-0201-3

[5] Horstmann, D. (2004) From 1970 Until Present: The Keller-Segel Model in Chemotaxis and Its Consequences. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **51**, 103-165.

[6] Kalinin, Y.V., Jiang, L., Tu, Y. and Wu, M. (2009) Logarithmic Sensing in *Escherichia coli* Bacterial Chemotaxis. *Biophysical Journal*, **96**, 2439-2448. https://doi.org/10.1016/j.bpj.2008.10.027

[7] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1971) Traveling Bands of Chemotactic Bacteria: A Theoretical Analysis. *Journal of Theoretical Biology*, **30**, 235-248. https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90051-8

[8] Levine, H.A., Sleeman, B.D. and Nilsen-Hamilton, M. (2000) A Mathematical Model for the Roles of Pericytes and Macrophages in the Initiation of Angiogenesis. I. The Role of Protease Inhibitors in Preventing Angiogenesis. *Mathematical Biosciences*, **168**, 77-115. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(00)00034-1

[9] Sleeman, B.D. and Levine, H.A. (1997) A System of Reaction Diffusion Equations Arising in the Theory of Reinforced Random Walks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **57**, 683-730. https://doi.org/10.1137/S0036139995291106

[10] Wang, Z. and Hillen, T. (2008) Shock Formation in a Chemotaxis Model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **31**, 45-70. https://doi.org/10.1002/mma.898

[11] Zeng, Y. and Zhao, K. (2019) On the Logarithmic Keller-Segel-Fisher/Kpp System. *Discrete & Continuous Dynamical Systems: Series A*, **39**, 5365-5402. https://doi.org/10.3934/dcds.2019220

[12] Zeng, Y. and Zhao, K. (2020) Optimal Decay Rates for a Chemotaxis Model with Logistic Growth, Logarithmic Sensitivity and Density-Dependent Production/Consumption Rate. *Journal of Differential Equations*, **268**, 1379-1411. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.08.050

[13] Wang, Z.-A., Xiang, Z. and Yu, P. (2016) Asymptotic Dynamics on a SINGULAR Chemotaxis System Modeling Onset of Tumor Angiogenesis. *Journal of Differential Equations*, **260**, 2225-2258. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.063

[14] Li, D., Li, T. and Zhao, K. (2011) On a Hyperbolic-Parabolic System Modeling Chemotaxis. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **21**, 1631-1650. https://doi.org/10.1142/S0218202511005519

[15] Fefferman, C.L., McCormick, D.S., Robinson, J.C. and Rodrigo, J.L. (2014) Higher Order Commutator Estimates and Local Existence for the Non-resistive MHD Equations and Related Models. *Journal of Functional Analysis*, **267**, 1035-1056. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.03.021

[16] Tello, J.I. and Winkler, M. (2007) A Chemotaxis System with LOGISTIC Source. *Communications in Partial Differential Equations*, **32**, 849-877. https://doi.org/10.1080/03605300701319003

[17] Winkler, M. (2008) Chemotaxis with Logistic Source: Very Weak Global Solutions and Their Boundedness Properties. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **348**, 708-729. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.07.071

[18] Winkler, M. (2014) How Far Can Chemotactic Cross-Diffusion Enforce Exceeding Carrying Capacities. *Journal of Nonlinear Science*, **24**, 809-855. https://doi.org/10.1007/s00332-014-9205-x

[19] Cao, X. (2014) Boundedness in a Quasilinear Parabolic-Parabolic Keller-Segel System with Logistic Source. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **412**, 181-188. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.061

[20] Cao, X. and Zheng, S. (2014) Boundedness of Solutions to a Quasilinear Parabolic-Elliptic Keller-Segel System with Logistic Source. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **37**, 2326-2330. https://doi.org/10.1002/mma.2992

[21] Winkler, M. (2010) Boundedness in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Chemotaxis System with Logistic Source. *Communications in Partial Differential Equations*, **35**, 1516-1537. https://doi.org/10.1080/03605300903473426