Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2221-2231
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135211

具有Logistic源的三维趋化模型解的大时间行为

徐坤桦，彭红云

广东工业大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期：2024年4月29日；录用日期：2024年5月22日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

本文研究了一类在全空间$\mathbb{R}^3$上具有奇性和Logistic源项的趋化模型解的大时间行为，并得到了解的衰减估计。通过一类Cole-Hopf变换，将有奇性的趋化模型变换成无奇性的趋化模型。然后采用能量估计的方法得到变换后模型的全局解的衰减估计。

关键词

趋化模型，Logistic源，能量估计，衰减估计

Large Time Behavior for a Three-Dimensional Chemotaxis System with Logistic Source

Kunhua Xu, Hongyun Peng

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology,
Guangzhou Guangdong

Received: Apr. 29^{th}, 2024; accepted: May 22^{nd}, 2024; published: May 31^{st}, 2024

文章引用: 徐坤桦, 彭红云. 具有Logistic源的三维趋化模型解的大时间行为[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2221-2231. DOI: 10.12677/aam.2024.135211

Abstract

In this paper, we study the large time behavior of a singular chemotaxis system with logistic source in three dimensional whole spaces and obtain the decay estimates for the solutions. The singular chemotaxis is converted to a non-singular hyperbolic system by a Cole-Hopf type transformation. Then the decay estimates of the global solutions of the transformed system are established by using the method of energy estimates.

Keywords

Chemotaxis System, Logistic Source, Energy Estimates, Decay Estimates

1. 引言

肿瘤血管生成（Tumor angiogenesis）的过程在癌症细胞生成和转移中发挥着至关重要的作用。通过促进血管生成，肿瘤可以获取足够维持其快速生长所需的营养和氧气。在肿瘤微环境中，多种细胞可以分泌促肿瘤血管生成因子，它们在调节正常和异常血管生成中发挥重要作用，其中血管内皮生长因子（VEGF）在肿瘤血管生成中起关键作用。因此，了解癌性肿瘤细胞开始向周围的正常细胞释放VEGF 的潜在机制并激活血管内皮细胞内信号通路具有重要意义。为此，Levine等 [1]以描述细菌趋化性的Keller-Segal 模型 [2]为原型提出了以下PDE模型：

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D\nabla u - \chi u \nabla \ln c), \\ c_t = \varepsilon \Delta c - \mu u c, \end{cases} \tag{1}$$

其中，未知函数$u(x,t)$和$c(x,t)$分别表示血管内皮细胞的密度和VEGF的浓度。参数$D > 0$、$\chi > 0$、$\varepsilon \leq 0$和μ分别表示内皮细胞的扩散率、趋化性强度的趋化系数、化学扩散率和化学物质c的退化率。在很多文献中 [2–4]，认为化学扩散系数ε可能很小或可以忽略不计，因为化学扩散远不如其与内皮细胞的相互作用重要。由细胞动力学理论，当时间尺度较大时，细胞的增殖和死亡也应该被考虑，

在数学模型上体现为logistic源项的出现。因此，本文考虑以下具有logistic源项的模型：

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D\nabla u - \chi u \nabla \ln c) + ru(1-u), \\ c_t = \varepsilon \Delta c - \mu uc, \end{cases} \tag{2}$$

其中$r \geq 0$为细胞增长率。该模型的显着特点是，第一个方程包含一个对数灵敏度函数lnc，该函数在c=0时为奇异函数。为解决该奇性，应用以下Cole-Hopf变换 [3,5]：

$$\mathbf{v} = -\nabla \ln c = -\frac{\nabla c}{c}$$

以及$\tilde{t} = \frac{\chi\mu}{D}t, \tilde{x} = \frac{\sqrt{\chi\mu}}{D}x, \tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{\frac{\chi}{\mu}}\mathbf{v}$，将模型(1)转化为以下模型：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \nabla \cdot (u\mathbf{v}) + ru(1-u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \mathbf{v}_t - \varepsilon \Delta \mathbf{v} = \nabla \left(-\varepsilon |\mathbf{v}|^2 + u\right), & x \in \Omega, t > 0, \\ (u, \mathbf{v})(x, 0) = (u_0, \mathbf{v}_0)(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

其中，$\Omega \subset \mathrm{R}^d$既可以是整个空间，也可以是有光滑边界的有界区域。

当$r = 0$时，即没有logistic源项的情况：许多学者对模型3$r = 0$时进行了广泛的研究，在其解的全局适定性和渐近行为等方面取得了丰富的成果。当$\varepsilon = 0$时，在一维空间中，Zhang等 [6]首先得到了模型(3)在Neumann-Dirichlet 边值条件下具有小初值解的全局存在性，Guo等 [7]验证了模型(3)在大初值条件下，柯西问题解的全局存在性。在高维空间中，Li等 [8]得到了在Neumann边界条件下，具有小初值的模型(3)的解的全局存在性和指数衰减率。当初值接近于常状态$(\bar{u}, 0)$时，Li等 [9]在$(u_0, \mathbf{v}_0) \in H^s(\mathbb{R}^d)$,$s > \frac{d}{2} + 1$和$\|(u_0 - \bar{u}, \mathbf{v}_0)\|_{H^s}$的初值条件下，研究了模型(3)柯西问题的经典解的全局适定性和大时间行为。接着，基于在Chemin-Lerner空间中的最小正则性，Hao [10]验证了在临界Besov空间$\dot{B}_{2,1}^{-\frac{1}{2}} \times (\dot{B}_{2,1}^{-\frac{1}{2}})^d$中强解的全局存在性和唯一性。如果初值$\|(u_0 - \bar{u}, v_0)\|_{L^2 \times H^1}$很小时，通过Fourier分析可得到三维空间中的强解 [11]。若初值有更高的正则性使得$\|(u_0 - \bar{u}, v_0)\|_{H^2 \times H^1}$ 足够小时，在三维空间中的解的代数衰减率可被推导出 [12]。当$\varepsilon > 0$时，在一维空间中，Tao [12]等得到模型(3)在Neumann-Dirichlet边值条件下具有大初值解的存在性，而在Dirichlet边界条件下的初边值问题得到进一步的研究 [13]。在高维空间中，Wang等 [14]研究了模型(3) 在初值与常状态的值相近时其解的渐近行为。Song等 [15]得到了在适当的初始扰动下解趋向稳定状态的收敛率。

当$r > 0$时：模型3的这种情况近来受到广泛关注，在一维空间中，Zeng等 [16]研究了模型(3)柯西问题解的适定性、大时间行为、系数消失极限和衰减率。接着，他们进一步研究了如果初始值在具有有限能量值的常状态附近小扰动，当$\varepsilon = 0$时，得到其解的最优时间衰减率，当$\varepsilon > 0$时，进一步假设初始振幅较小但仍允许大振荡，也能得到其解的最优衰减率 [17]。Li等 [18]得到了模型(3)在$\varepsilon \geq 0$时的行波解，以及当$\varepsilon \to 0$时行波解的系数消失极限。

对于模型(3)高维空间的研究目前还不多，因此本文将开展模型(3)在三维空间中的研究。Jiang等 [19]已对模型(3)柯西问题解的适定性进行了研究，其研究结果如下：

定理1. 对常状态$\bar{u}>0$以及正整数$k\geq 2$，令$(u_0-\bar{u},\mathbf{v}_0)\in H^k(\mathbb{R}^3)\times H^k(\mathbb{R}^3)$，那么对任意常数$M_0>0$，$\|\nabla^2 u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla^2\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2\leq M_0^2$，存在一个与$M_0$有关的正常数$\eta$，使得如果

$$\|u_0-\bar{u}\|_{H^1}^2+\|\mathbf{v}_0\|_{H^1}^2\leq \eta^2,$$

当$\varepsilon\geq 0$时，模型(3)的全局唯一解$(u,\mathbf{v})\in C\left([0,+\infty),H^k(\mathbb{R}^3)\right)$满足对所有$t>0$，

$$\begin{aligned}&\|u(t)-\tilde{u}\|_{H^k}^2+\|\mathbf{v}(t)\|_{H^k}^2+\int_0^t\left(\|\nabla u(\tau)\|_{H^k}^2+\|\nabla\mathbf{v}(\tau)\|_{H^{k-1}}^2+\varepsilon\|\nabla^{k+1}\mathbf{v}(\tau)\|_{L^2}^2\right)d\tau\\&\leq C\left(\|u_0-\tilde{u}\|_{H^k}^2+\|\mathbf{v}_0\|_{H^k}^2\right)\end{aligned}\tag{4}$$

其中C为常数，且与η和t无关。

本文将进一步开展对其解的衰减率的研究，主要研究结果如下：

定理2. 若定理1成立，进一步假设$(u_0-\bar{u},\mathbf{v}_0)\in\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)\times\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)$，其中$s\in(0,\frac{3}{2})$.则对任意$t\geq 0$，定理1得到的解$(u,\mathbf{v})$在$\eta$适当小时，有以下衰减率：

$$\begin{aligned}&\|\nabla^\ell(u-\bar{u})\|_{L^2}+\|\nabla^\ell\mathbf{v}\|_{L^2}\leq C\big(1+t\big)^{-\frac{s+\ell}{2}},\qquad(\ell=0,1,\cdots,k-1)\\&\|\nabla^k(u-\bar{u})\|_{L^2}+\|\nabla^k\mathbf{v}\|_{L^2}\leq C\big(1+t\big)^{-\frac{s+k-1}{2}},\end{aligned}\tag{5}$$

其中C为常数，且与t无关。

2. 预备知识

在证明之前，我们先将对一些符号和惯例进行说明。我们定义：

$$\dot{H}^{-s}:=\left\{f\in L^2:\left\||\xi|^{-s}\hat{f}(\xi)\right\|_{L^2}<\infty\right\},\quad \|f\|_{\dot{H}^{-s}}:=\||\xi|^{-s}\hat{f}(\xi)\|_{L^2},$$

$$\nabla^\ell f=\nabla^\alpha f=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}f,\quad |\alpha|=\sum_{i=1}^3\alpha_i=\ell,$$

$$\int f\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}f\,\mathrm{d}x,$$

$$\Lambda:=\sqrt{-\Delta},\quad \widehat{\Lambda f}(\xi)=|\xi|\hat{f}(\xi),$$

$$\mathcal{E}_\ell(t):=\left\|\nabla^\ell p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{\ell+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^\ell\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+2\delta\int\nabla^{\ell+1}p\cdot\nabla^\ell\mathbf{v}dx,$$

$$\mathcal{F}_\ell(t):=r\|\nabla^\ell p\|+(1+r)\|\nabla^{\ell+1}p\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\|\nabla^{\ell+2}p\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\delta\|\nabla^\ell\nabla\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

其中ℓ为任意非负整数，常数$\delta\in(0,1)$。

我们会使用下面两个基本事实：

$$\Delta\mathbf{v}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}),\quad \|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2}\simeq\|\nabla^\ell\nabla\cdot\mathbf{v}\|_{L^2}.$$

为了使结果更加简明，在后续证明中取$\bar{u}=1$，然后令$p=u-1$，则方程组(3)可以改写为

$$\begin{cases}\partial_t p-\Delta p-\nabla\cdot\mathbf{v}=\nabla\cdot(p\mathbf{v})-rp(1+p), & x\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ \partial_t\mathbf{v}-\varepsilon\Delta\mathbf{v}-\nabla p=-\varepsilon\nabla|\mathbf{v}|^2, & x\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ (p,\mathbf{v})(x,0)=(p_0,\mathbf{v}_0)(x), & x\in\mathbb{R}^3,\end{cases}\tag{6}$$

我们就将问题转化为求方程组(6)的衰减率。

引理1. [19] 由于有$A\simeq B\Longleftrightarrow c_0B\le A\le\hat{c}_0B$，则对任意整数$\ell\ge 0$以及任意$\delta\in(0,1)$，存在两个常数$c_0$和$\hat{c}_0$，使得

$$\mathcal{E}_\ell(t)\simeq\left\|\nabla^\ell p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{\ell+1}p\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^\ell\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\right\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\ell(t)\simeq&\|\nabla^\ell p\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\|\nabla^{\ell+1}p\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\|\nabla^{\ell+2}p\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\\&+\|\nabla^\ell\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\varepsilon\|\nabla^{\ell+2}\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\end{aligned}$$

引理2. [19] 假设方程组(6)的解满足

$$\left\|\nabla^2p(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\mathbf{v}(t)\right\|_{L^2}^2\le\frac{2\hat{c}_0}{c_0}M_0^2,$$

$$\|p(t)\|_{H^1}^2+\|\mathbf{v}(t)\|_{H^1}^2\le\kappa_0^2,$$

对任意给定的$M_0>0$，如果κ_0适当小，则存在一个常数$c_1>0$，使得对所有$t\in[0,T]$有

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\ell(t)+c_1\mathcal{F}_\ell(t)\le 0\quad(\ell=0,1,\cdots,k-1).\tag{7}$$

引理3. [20] *(L^p-L^q估计)*假设$0<s<3$，$1<p<q<+\infty$，$1/q=1/p-s/d$，那么有

$$\|\Lambda^{-s}f\|_{L^q}\leqslant C\|f\|_{L^p}.$$

不失一般性，因为$(u_0-\bar{u},\mathbf{v}_0)\in\dot{H}^{-s}\times\dot{H}^{-s}$，所以我们可以假设存在一个正常数$M_1>1$，使得

$$\|p_0\|_{\dot{H}^{-s}}^2+\|\mathbf{v}_0\|_{\dot{H}^{-s}}^2\le M_1^2.\tag{8}$$

引理4. 假设方程组(6)的解$(p,\mathbf{v})$满足引理2。若

$$\|p(t)\|_{\dot{H}^{-s}}^2+\|\mathbf{v}(t)\|_{\dot{H}^{-s}}^2\le 2M_1^2,\quad t\in[0,T],\tag{9}$$

其中，$0<s<\frac{3}{2}$。那么，对任意$t\in[0,T]$以及所有$\ell=0,1,\cdots,k-1$，有

$$\|\nabla^\ell p\|_{L^2}^2+\|\nabla^{\ell+1}p\|_{L^2}^2+\|\nabla^\ell\mathbf{v}\|_{L^2}^2+\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2}^2\le CM_1^2\left(1+t\right)^{-(s+\ell)};\tag{10}$$

对某一正常数$\kappa>1$以及任意$t\in[0,T]$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}^2\right)+\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\nabla p\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\Lambda^{-s}\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2+r\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2\\&\quad\leq CM_1^2\eta^{\frac{s}{4}}\Big(\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}\Big)(1+t)^{-\kappa},\end{aligned}\tag{11}$$

其中C为正常数，且与t无关。

证明 先证不等式(10)。由插值法，可以得到

$$\|\nabla^\ell p\|_{L^2}\leq C\|p\|_{\dot H^{-s}}^{\frac{1}{s+\ell+1}}\|\nabla^{\ell+1}p\|_{L^2}^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}\leq 2CM_1^{\frac{1}{s+\ell+1}}\|\nabla^{\ell+1}p\|_{L^2}^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}$$

以及

$$\|\nabla^\ell\mathbf{v}\|_{L^2}\leq C\|\mathbf{v}\|_{\dot H^{-s}}^{\frac{1}{s+\ell+1}}\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2}^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}\leq 2CM_1^{\frac{1}{s+\ell+1}}\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2}^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}.$$

同理，由插值不等式

$$\|\nabla p\|_{\dot H^{-s}}=\|p\|_{\dot H^{1-s}}\leq C\|p\|_{\dot H^{-s}}^{\frac{s}{s+1}}\|p\|_{\dot H^{1}}^{\frac{1}{s+1}}\leq CM_1$$

可以推导出

$$\|\nabla^{\ell+1}p\|_{L^2}\leq C\|\nabla p\|_{\dot H^{-s}}^{\frac{1}{s+\ell+1}}\|\nabla^{\ell+2}p\|_{L^2}^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}\leq 2CM_1^{\frac{1}{s+\ell+1}}\|\nabla^{\ell+2}p\|_{L^2}^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}.$$

将引理2的先验估计(7)两边同时积分可得

$$\mathcal{E}_\ell(t)+c_1\int_0^t\mathcal{F}(\tau)d\tau\leq\mathcal{E}_\ell(0).$$

那么有

$$\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2}^2\leq C_1\Big(\left\|\nabla^\ell p_0\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{\ell+1}p_0\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^\ell\mathbf{v}_0\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}_0\right\|_{L^2}^2\Big)\leq C.$$

因而

$$\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2}\leq C\|\nabla^{\ell+1}\mathbf{v}\|_{L^2}^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}.$$

将以上结果相加，由引理1可得

$$\mathcal{E}_\ell(t)\leq CM_1^{\frac{2}{s+\ell+1}}\mathcal{F}_\ell^{\frac{s+\ell}{s+\ell+1}}(t).$$

将其代入到(7)中可以得到

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\ell(t)+CM_1^{-\frac{2}{s+\ell}}\mathcal{E}_\ell^{\frac{s+\ell+1}{s+\ell}}(t)\leq 0.$$

不等式两边同时积分，整理得到

$$\mathcal{E}_\ell(t)\leq CM_1^2\Big(\mathcal{E}_\ell(0)^{-\frac{1}{s+\ell}}+t\Big)^{-(s+\ell)}\leq CM_1^2(1+t)^{-(s+\ell)},$$

再结合引理1，即可证得不等式(10).

接下来，证明不等式(11)。Λ^{-s}分别作用于方程组(6)的第一式和第二式，并将所得到的结果分别与$\Lambda^{-s}p$和$\Lambda^{-s}\mathbf{v}$做内积，得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\nabla p\|_{L^2}^2-\displaystyle\int\Lambda^{-s}p\Lambda^{-s}\nabla\cdot\mathbf{v}dx+r\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2\\ \qquad=\displaystyle\int\Lambda^{-s}p\Lambda^{-s}\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-r\int\Lambda^{-s}p\Lambda^{-s}|p|^2dx,\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\Lambda^{-s}\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2-\displaystyle\int\Lambda^{-s}\nabla p\cdot\Lambda^{-s}\mathbf{v}dx=-\varepsilon\int\Lambda^{-s}\mathbf{v}\cdot\Lambda^{-s}\nabla|\mathbf{v}|^2dx,\end{cases}$$

将两式相加，分部积分后得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}^2\right)+\|\Lambda^{-s}\nabla p\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\Lambda^{-s}\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2+r\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2\\&=\int\Lambda^{-s}p\Lambda^{-s}\nabla\cdot(p\mathbf{v})dx-\varepsilon\int\Lambda^{-s}\mathbf{v}\cdot\Lambda^{-s}\nabla|\mathbf{v}|^2dx-r\int\Lambda^{-s}p\Lambda^{-s}|p|^2dx\\&:=\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2+\mathcal{S}_3.\end{aligned}\tag{12}$$

对$\mathcal{S}_1$，应用Hölder不等式和引理3得到

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1&\le C\left\|\Lambda^{-s}p\right\|_{L^2}\left\|\Lambda^{-s}(\nabla p\cdot\mathbf{v}+p\nabla\cdot\mathbf{v})\right\|_{L^2}\\&\le C\left\|\Lambda^{-s}p\right\|_{L^2}\left(\|\nabla p\cdot\mathbf{v}\|_{L^{\frac{6}{2s+3}}}+\|p\nabla\cdot\mathbf{v}\|_{L^{\frac{6}{2s+3}}}\right)\\&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\left(\|\nabla p\|_{L^{\frac{3}{s+1}}}\|\mathbf{v}\|_{L^6}+\|p\|_{L^6}\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|_{L^{\frac{3}{s+1}}}\right).\end{aligned}$$

然后应用Sobolev嵌入不等式以及插值不等式，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\left(\|\nabla p\|_{L^{\frac{3}{s+1}}}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}+\|\nabla p\|_{L^2}\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|_{L^{\frac{3}{s+1}}}\right)\\&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\left(\|p\|_{L^2}^{\frac{2s+1}{4}}\|\nabla^2p\|_{L^2}^{\frac{3-2s}{4}}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}+\|\nabla p\|_{L^2}\|\mathbf{v}\|_{L^2}^{\frac{2s+1}{4}}\|\nabla^2\mathbf{v}\|_{L^2}^{\frac{3-2s}{4}}\right)\\&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\left(\|p\|_{L^2}+\|\mathbf{v}\|_{L^2}\right)^{\frac{2s+1}{4}}\left(\|\nabla p\|_{L^2}+\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}\right)\left(\left\|\nabla^2p\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^2\mathbf{v}\right\|_{L^2}\right)^{\frac{3-2s}{4}}.\end{aligned}\tag{13}$$

只要将$\mathcal{S}_1$估计中的p替换成$\mathbf{v}$即可得到$\mathcal{S}_2$的估计：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2&\le C\left\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\right\|_{L^2}\left\|\Lambda^{-s}\nabla|\mathbf{v}|^2\right\|_{L^2}\\&\le C\left\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\right\|_{L^2}\left\|\nabla|\mathbf{v}|^2\right\|_{L^{\frac{6}{2s+3}}}\\&\le C\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^{\frac{3}{s+1}}}\|\mathbf{v}\|_{L^6}\\&\le C\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^{\frac{3}{s+1}}}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}\\&\le C\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}\|\mathbf{v}\|_{L^2}^{\frac{2s+1}{4}}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}\|\nabla^2\mathbf{v}\|_{L^2}^{\frac{3-2s}{4}}.\end{aligned}\tag{14}$$

相似地，可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_3&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\|\Lambda^{-s}|p|^2\|_{L^2}\\&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\|\||p|^2\|_{\frac{6}{2s+3}}\\&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\|\|p\|_{L^6}\|p\|_{L^{\frac{3}{s+1}}}\\&\le C\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}\|\|\nabla p\|_{L^2}\|p\|_{\dot{H}^{-s}}^{\frac{1-s}{2}}\|\nabla p\|_{L^2}^{\frac{s+1}{2}}.\end{aligned}\tag{15}$$

衰减估计(10)取$\ell=1$，有

$$\|\nabla p\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 p\|_{L^2}^2+\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 \mathbf{v}\|_{L^2}^2\le CM_1^2\big(1+t\big)^{-(s+1)}. \tag{16}$$

取$\ell=2$，有

$$\|\nabla^2 p\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 p\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 \mathbf{v}\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 \mathbf{v}\|_{L^2}^2\le CM_1^2\big(1+t\big)^{-(s+2)}. \tag{17}$$

将(13)-(15)带入(12)，由定理1得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}^2\Big)+\|\Lambda^{-s}\nabla p\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\Lambda^{-s}\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}^2+r\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2\\
&\le C\Big(\big\|\Lambda^{-s}p\big\|_{L^2}+\big\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\big\|_{L^2}\Big)\left(\|p\|_{L^2}+\|\mathbf{v}\|_{L^2}\right)^{\frac{2s+1}{4}}\left(\|\nabla p\|_{L^2}+\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}\right)\left(\big\|\nabla^2 p\big\|_{L^2}+\big\|\nabla^2 \mathbf{v}\big\|_{L^2}\right)^{\frac{3-2s}{4}}\\
&\le C\eta^{\frac{2s+1}{8}}\left(\big\|\Lambda^{-s}p\big\|_{L^2}+\big\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\big\|_{L^2}\right)\left(\|\nabla p\|_{L^2}+\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}\right)\left(\big\|\nabla^2 p\big\|_{L^2}+\big\|\nabla^2 \mathbf{v}\big\|_{L^2}\right)^{\frac{3-2s}{4}},
\end{aligned}$$

由(16)和(17)可得估计

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}^2\Big)+\|\Lambda^{-s}\nabla p\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\Lambda^{-s}\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}^2+r\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}^2\\
&\le CM_1^2\eta^{\frac{2s+1}{8}}\left(\big\|\Lambda^{-s}p\big\|_{L^2}+\big\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\big\|_{L^2}\right)(1+t)^{-\frac{s+1}{2}}(1+t)^{-\frac{s+2}{2}\cdot\frac{3-2s}{4}}\\
&\le CM_1^2\eta^{\frac{s}{4}}\Big(\|\Lambda^{-s}p\|_{L^2}+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}\|_{L^2}\Big)(1+t)^{-\kappa},
\end{aligned} \tag{18}$$

其中，

$$\kappa:=\frac{s+1}{2}+\frac{s+2}{2}\cdot\frac{3-2s}{4}>1,\quad s\in(0,\frac{3}{2})$$

证毕.

3. 定理2的证明

证明 封闭对某一大于0的常数M_1的先验假设(9)，通过引理4就能由(10)得到衰减估计(5)。下面先验证(9)确实成立。为此，先由(11)两边同时积分得到对$\kappa>1$，有

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda^{-s}p(t)\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}(t)\|_{L^2}^2\\
&\le\left(\|\Lambda^{-s}p_0\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2\right)+CM_1^2\eta^{\frac{s}{4}}\int\limits_0^t\left(\big\|\Lambda^{-s}p(\tau)\big\|_{L^2}+\big\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}(\tau)\big\|_{L^2}\right)(1+\tau)^{-\kappa}\,d\tau\\
&\le\left(\|\Lambda^{-s}p_0\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2\right)+CM_1^2\eta^{\frac{s}{4}}\sup_{\tau\in[0,t]}\left(\big\|\Lambda^{-s}\rho(\tau)\big\|_{L^2}^2+\big\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}(\tau)\big\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^t(1+\tau)^{-\kappa}\,d\tau\\
&\le\left(\|\Lambda^{-s}p_0\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2\right)+CM_1^2\eta^{\frac{s}{4}}\sup_{\tau\in[0,t]}\left(\big\|\Lambda^{-s}p(\tau)\big\|_{L^2}^2+\big\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}(\tau)\big\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

令

$$\mathcal{M}(t):=\sup_{\tau\in[0,t]}\left(\big\|\Lambda^{-s}p(\tau)\big\|_{L^2}^2+\big\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}(\tau)\big\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

由Young不等式可得

$$\mathcal{M}^2(t) \leq M_1^2 + CM_1^2\eta^{\frac{s}{4}}\mathcal{M}(t) \leq \frac{1}{4}\mathcal{M}^2(t) + M_1^2 + C_1M_1^4\eta^{\frac{s}{2}}$$

其中正常数C_1与η和M_1无关。取η适当小使得$C_1\eta^{\frac{s}{2}}M_1^2 \leq \frac{1}{2}$，可得

$$\left\|\Lambda^{-s}p(t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\Lambda^{-s}\mathbf{v}(t)\right\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{M}^2(t) \leq 2M_1^2,$$

即先验假设(9)成立。因此，定理2得证。

证毕.

4. 总结与展望

本文主要考虑具有logistic源项的趋化模型(2)的衰减率。该模型具有奇性，因此用Cole-Hofp变换将其转化成没有奇性的模型(3)。已有研究证明模型(3)在小初值条件下解的全局适定性 [19]，在此基础上，本文进一步用了能量方法在齐次负Sobolev 空间$\dot{H}^{-s}$中得到其衰减率。与通常在H^k空间中得到的衰减率相比，初始值的$\dot{H}^{-s}$泛函将解的衰减速率提高了$\frac{3}{2}$。

本文考虑的是模型(3)在三维空间中的大时间行为，若是在二维空间中，能否得到相同的衰减率？这将是我们接下来的研究方向。

参考文献

[1] Levine, H.A., Sleeman, B.D. and Nilsen-Hamilton, M. (2000) A Mathematical Model for the Roles of Pericytes and Macrophages in the Initiation of Angiogenesis. I. The Role of Protease Inhibitors in Preventing Angiogenesis. *Mathematical Biosciences*, **168**, 77-115. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(00)00034-1

[2] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1971) Traveling Bands of Chemotactic Bacteria: A Theoretical Analysis. *Journal of Theoretical Biology*, **30**, 235-248. https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90051-8

[3] Levine, H.A. and Sleeman, B.D. (1997) A System of Reaction Diffusion Equations Arising in the Theory of Reinforced Random Walks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **57**, 683-730. https://doi.org/10.1137/S0036139995291106

[4] Levine, H.A., Pamuk, S., Sleeman, B.D., *et al.* (2001) Mathematical Modeling of Capillary Formation and Development in Tumor Angiogenesis: Penetration into the Stroma. *Bulletin of Mathematical Biology*, **63**, 801-863. https://doi.org/10.1006/bulm.2001.0240

[5] Wang, Z. and Hillen, T. (2007) Shock Formation in a Chemotaxis Model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **31**, 45-70. https://doi.org/10.1002/mma.898

[6] Zhang, M. and Zhu, C. (2007) Global Existence of Solutions to a Hyperbolic-Parabolic System. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**, 1017-1027. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08773-9

[7] Guo, J., Xiao, J., Zhao, H., *et al.* (2009) Global Solutions to a Hyperbolic-Parabolic Coupled System with Large Initial Data. *Acta Mathematica Scientia*, **29**, 629-641. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(09)60059-X

[8] Li, T., Pan, R. and Zhao, K. (2012) Global Dynamics of a Hyperbolic-Parabolic Model Arising from Chemotaxis. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **72**, 417-443. https://doi.org/10.1137/110829453

[9] Li, D., Li, T. and Zhao, K. (2011) On a Hyperbolic-Parabolic System Modeling Chemotaxis. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **21**, 1631-1650. https://doi.org/10.1142/S0218202511005519

[10] Hao, C. (2012) Global Well-Posedness for a Multidimensional Chemotaxis Model in Critical Besov Spaces. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **63**, 825-834. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0193-0

[11] Deng, C. and Li, T. (2014) Well-Posedness of a 3D Parabolic-Hyperbolic Keller-Segel System in the Sobolev Space Framework. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1311-1332. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.05.014

[12] Tao, Y., Wang, L. and Wang, Z.A. (2013) Large-Time Behavior of a Parabolic-Parabolic Chemotaxis Model with Logarithmic Sensitivity in One Dimension. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **18**, 821-845. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.821

[13] Li, H. and Zhao, K. (2015) Initial-Boundary Value Problems for a System of Hyperbolic Balance Laws Arising from Chemotaxis. *Journal of Differential Equations*, **258**, 302-338. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.09.014

[14] Wang, Z.A., Xiang, Z. and Yu, P. (2016) Asymptotic Dynamics on a Singular Chemotaxis System Modeling Onset of Tumor Angiogenesis. *Journal of Differential Equations*, **260**, 2225-2258. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.063

[15] Song, X. and Li, J. (2023) Convergence Rate of Solutions towards Spiky Steady State for the Keller-Segel System with Logarithmic Sensitivity. *Nonlinear Analysis*, **232**, Article 113284. https://doi.org/10.1016/j.na.2023.113284

[16] Zeng, Y. and Zhao, K. (2019) On the Logarithmic Keller-Segel-Fisher/KPP System. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, **39**, 5365-5402. https://doi.org/10.3934/dcds.2019220

[17] Zeng, Y. and Zhao, K. (2020) Optimal Decay Rates for a Chemotaxis Model with Logistic Growth, Logarithmic Sensitivity and Density-Dependent Production/Consumption Rate. *Journal of Differential Equations*, **268**, 1379-1411. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.08.050

[18] Li, T. and Wang, Z.A. (2022) Traveling Wave Solutions of a Singular Keller-Segel System with Logistic Source. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **19**, 8107-8131. https://doi.org/10.3934/mbe.2022379

[19] 江昱邦, 彭红云. 具有Logistic源的三维趋化模型解适定性研究[J]. 理论数学, 2024, 14(5).

[20] Stein, E.M. (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, University, NJ, 119.